# ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί ''πνευματικό παιδί'' (πάντα ήθελα να το πω αυτό! ☺) του συγγραφέα που ''συνελήφθη'' κατά τη (συν-)διδασκαλία σχετικών μαθημάτων στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Η αρχική του μορφή ήταν ένα σύνολο σημειώσεων από τον καιρό που ο συγγραφέας ακόμα προπτυχιακός φοιτητής. Από ολιγοσέλιδα φυλλάδια στην αρχή, κατέληξαν να είναι σχεδόν αυτοτελείς σημειώσεις, αρκούντως συμπληρωματικές στο διδακτικό υλικό του εκάστοτε διδάσκοντα. Από το 2015 και μετά, τμήμα του βιβλίου αυτού αποτελούσε το κύριο υλικό μελέτης των φοιτητών των σχετικών μαθημάτων. Η ιδέα της ''επίσημης'' συγγραφής ήρθε εντελώς φυσιολογικά - και θα έλεγε κανείς, αναπόφευκτα - δεδομένης της θετικής διάθεσης με την οποία τις υποδέχονταν οι φοιτητές κάθε χρονιά.

Ασφαλώς ένα υλικό που ξεκίνησε να γράφεται στις αρχές του 2007 δε θα μπορούσε να είναι άξιο δημοσίευσης στην ίδια μορφή στα τέλη της δεύτερης δεκαετίας του 21ου αιώνα, σχεδόν 12 χρόνια αργότερα. Οι ανάγκες της εποχής, η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας, τα νέα συγγράμματα που είδαν το φως της δημοσίευσης, και η προσαρμογή (ως συγγραφέας και διδάσκων) στις απαιτήσεις των φοιτητών ανάγκασαν την προσθήκη αρκετού υλικού τόσο για την κάλυψη όσο περισσότερων θεμάτων θεώρησα ότι είναι αναγκαίο σε ένα εισαγωγικό σύγγραμμα, όσο και για να τα εξηγήσω αναλυτικά.

Στην εποχή της έκρηξης του διαδικτύου και της πληθώρας πληροφορίας κάθε μορφής (κειμένου, ακουστική, οπτική, και συνδυασμός τους), κάθε σύγγραμμα που ζητά μια αξιοπρεπή θέση στα προγράμματα σπουδών των σχολών και στις πανεπιστημιακές βιβλιοθήκες πρέπει να έχει *κάτι περισσότερο ή κάτι διαφορετικό* να προσφέρει σε σχέση με τα ήδη υπάρχοντα βιβλία αλλά και σε σχέση με την, αξιόπιστη ή μη, πληροφορία που μπορεί να αναζητήσει ο φοιτητής/αναγνώστης στο διαδίκτυο. Η αλήθεια είναι ότι κίνητρο μου αποτέλεσε η ανάγκη για ένα σύγγραμμα που προσπαθεί να γεφυρώσει το χάσμα συγγραφέα-διδάσκοντα και αναγνώστη-σπουδαστή *έξω* από την αίθουσα διδασκαλίας: προσπάθησα να γράψω αυτό το βιβλίο σκεπτόμενος όχι ως συγγραφέας αλλά ως αναγνώστης, έχοντας στο μυαλό μου *πώς θα ήθελα να μου παρουσιαστεί η ύλη του βιβλίου αυτού αν ήμουν φοιτητής*, αποκαλύπτοντας τη σημασία των μαθηματικών συμβολισμών και εννοιών καθώς και τις πρακτικές εφαρμογές τους με έναν τρόπο απλό και κατανοητό. Βέβαια, οι απορίες που θα προκύψουν από τη μελέτη του υλικού που ακολουθεί θα είναι πολλές, αναπόφευκτες, και διαφορετικές για κάθε αναγνώστη. Προσπάθησα να προβλέψω τις περισσότερες από αυτές, βασισμένος κυρίως στις ερωτήσεις των φοιτητών κατά τη διάρκεια των αμέτρητων ωρών διδασκαλίας αλλά και από προσωπικές συζητήσεις μαζί τους.

**Τι (πιστεύω ότι) είναι αυτό το βιβλίο;**

Πιστεύω ότι το βιβλίο αυτό

- αποτελεί μια *εισαγωγή* στην επεξεργασία σήματος και ανάλυση συστημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου. Το περιεχόμενο του βιβλίου έχει διαμορφωθεί έτσι ώστε να δίνεται βάρος στη διαίσθηση και την κατανόηση βασικών μεθόδων και εννοιών των σημάτων και των συστημάτων, βάζοντας σε υποστηρικτικό ρόλο την αυστηρή μαθηματική τους θεμελίωση. Οι έννοιες παρουσιάζονται με τρόπο απλό - αλλά όχι απλοϊκό - επιχειρώντας να διατηρηθεί το ενδιαφέρον του αναγνώστη ως το τέλος κάθε κεφαλαίου, και συνολικά του βιβλίου.

- περιέχει ύλη που παρουσιάζεται με τρόπο που υποστηρίζει την κριτική σκέψη και ενισχύει την αναλυτική μέθοδο στην επίλυση προβλημάτων: κάθε κεφάλαιο ξεκινά με μια γνωστή εφαρμογή ως κίνητρο για τη μελέτη του και καταλήγει με ερωτήματα που γεννιούνται και προκαλούν την περιέργεια του αναγνώστη για το τι επακολουθεί. Επίσης, σχεδόν κάθε κεφάλαιο αποτελεί *επέκταση* των εννοιών που παρουσιάζονται στο αμέσως προηγούμενο (ή στα προηγούμενα). Με αυτόν τον τρόπο, ο αναγνώστης κατακτά αρχικά τα θεμέλια της επιστήμης των σημάτων και των συστημάτων και προχωρά με ένα πυραμιδοειδή τρόπο σε όλο και ειδικότερα θέματα που δίνουν λύση σε προβλήματα που τα προηγούμενα επίπεδα της πυραμίδας δεν μπορούσαν να δώσουν.

- περιέχει υλικό που στηρίζεται αρκετά σε πρακτικές εφαρμογές και εμπλουτίζεται με ευανάγνωστα, καθαρά, και

περιεκτικά σχήματα και εικόνες, που ενισχύουν τη διαισθητική κατανόηση των εννοιών που περιγράφονται. Το κομμάτι της πρακτικής εφαρμογής στηρίζεται από το προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB, περισσότερο ως αρχική γνωριμία με το περιβάλλον παρά ως αυτόνομο συμπλήρωμα της θεωρίας.

- αποδίδει τη θεωρία επεξεργασίας σημάτων και ανάλυσης συστημάτων αρκετά αφαιρετικά ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διδακτικό σύγγραμμα τόσο από μελετητές των σημάτων και συστημάτων στο επίπεδο του υλικού, όσο και από αυτούς που προγραμματίζουν σήματα και συστήματα σε λογισμικό.

- είναι ιδανικό για εξάσκηση του αναγνώστη στα θέματα που παρουσιάζει, διότι στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρέχεται πληθώρα από ασκήσεις προς λύση. Σε κάποιες από αυτές η απάντηση που αναζητείται δίνεται ως τμήμα της εκφώνησης. Με αυτόν τον τρόπο, ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει τις γνώσεις του και να επαληθεύσει τα αποτελέσματά του, αποκτώντας την πολύ σημαντική *αυτοπεποίθηση* που απαιτείται σε κάθε μαθησιακή διαδικασία.

**Τι *δεν* είναι αυτό το βιβλίο;**

Αναγνωρίζω ότι το βιβλίο αυτό ***δεν***

- περιλαμβάνει μια πλήρη επισκόπηση της θεωρίας σημάτων και συστημάτων. Αρκετά σημαντικά τμήματα, όπως η Ανάλυση Συστημάτων στο Χώρο της Κατάστασης, τα διαγράμματα Bode, και ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (μεταξύ άλλων) έχουν παραληφθεί. Στη θέση τους παρουσιάζονται οι έννοιες της Συσχέτισης και των Φασματικών Πυκνοτήτων, τόσο στο συνεχή όσο και στο διακριτό χρόνο.

- περιέχει το μαθηματικό πλούτο και την αυστηρότητα που μπορεί κανείς να βρει σε συγγράμματα παρόμοιου περιεχομένου. Τα μαθηματικά παίζουν *υποστηρικτικό* ρόλο, ενώ είναι όσο αυστηρά πρέπει στα θέματα που (νομίζω ότι) πρέπει. Το βάρος του βιβλίου αυτού δεν έχει δοθεί στην υποστήριξη της παραμικρής μαθηματικής λεπτομέρειας, αλλά στην ποιοτική και τη διαισθητική κατανόηση *βασικών εννοιών*. Υπάρχουν εξαιρετικά συγγράμματα για τον αναγνώστη που θέλει να εμβαθύνει σε περισσότερες λεπτομέρειες, τα οποία και αναφέρω συνήθως στο τέλος κάθε κεφαλαίου.

**Ο σκοπός**

Ο σκοπός του βιβλίου αυτού είναι να παρουσιάσει τα βασικά στοιχεία της επεξεργασίας σήματος στο συνεχή και στο διακριτό χρόνο με ένα ξεχωριστό τρόπο: ως μια *ιστορία*, της οποίας κάθε κεφάλαιο αποτελεί μια *επέκταση* των όσων έχει κανείς διαβάσει ως τότε, και η οποία τον οδηγεί σε νέα μονοπάτια, με (ελπίζω) ανανεωμένο ενθουσιασμό! Ίσως σκέφτεστε ότι μια τέτοια περιγραφή ταιριάζει περισσότερο σε ένα μυθιστόρημα αλλά ποιός είπε ποτέ ότι η τεχνική επιστήμη δεν μπορεί να παρουσιαστεί ως τέτοια; Σίγουρα μια απόπειρα προς αυτήν την κατεύθυνση είναι παράτολμη και επικίνδυνη, καθώς μια τεχνική περιγραφή ενός θέματος απαιτεί αυστηρότητα και όχι τη χαλαρότητα μιας ιστορίας. Προσπάθησα όμως να κρατήσω τη χαλαρή ατμόσφαιρα του ζεύγους ενός δασκάλου που προσπαθεί να διασκεδάσει περιγράφοντας με ενθουσιασμό και πάθος το αντικείμενό του, και ενός ακροατη-αναγνώστη που επιθυμεί να κατανοήσει και αποκρυπτογραφήσει τον κόσμο των σημάτων. Δια του λόγου το αληθές, διαβάστε την επόμενη παράγραφο.

**Το περιεχόμενο**

Τι περιλαμβάνει λοιπόν το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας; Θεωρώ - όπως έχω ήδη αναφέρει πολλές φορές ως τώρα - πως ένα εισαγωγικό σύγγραμμα στην επεξεργασία σήματος πρέπει να δίνει ιδιαίτερη σημασία στις *θεμελιώδεις έννοιες* που διέπουν και τους δυο χώρους: συνεχή και διακριτό χρόνο.

Έτσι λοιπόν, πέρα από το **εισαγωγικό κεφάλαιο** που ακολουθεί και περιγράφει ενδεικτικές εφαρμογές της επεξεργασίας σήματος, το **1ο Κεφάλαιο** δίνει στον αναγνώστη το απαραίτητο υπόβαθρο για όλα τα υπόλοιπα κεφάλαια. Δεδομένου ότι η ύλη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις αντίστοιχες κατευθύνσεις αλλάζει συχνά, ένα τέτοιο κεφάλαιο αναλαμβάνει να υπενθυμίσει ή να εισάγει τον αναγνώστη στα βασικά στοιχεία μαθηματικών που απαιτούνται. Το ολιγοσέλιδο **2ο Κεφάλαιο** αναλαμβάνει τις συστάσεις στους θεμέλιους λίθους του βιβλίου: τα σήματα και τα συστήματα - και στους δυο χώρους. Το **3ο Κεφάλαιο** ξεκινά την περιήγηση εξετάζοντες τις βασικές ιδιότητες των σημάτων και συστημάτων συνεχούς χρόνου, και περιγράφει μερικά σήματα που θα σας συντροφεύουν από την αρχή ως το τέλος του συγγράμματος. Στη συνέχεια, το **4ο Κεφάλαιο** παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο αναλύουμε σήματα μέσω συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις στο πεδίο του συνεχούς χρόνου. Βασικός πυρήνας του κεφαλαίου αποτελεί η πράξη της *συνέλιξης* - φόβος και τρόμος των περισσότερων φοιτητών ☺! Επειδή ο χώρος του χρόνου δε μας είναι αρκετός - θέλουμε πάντα περισσότερα! - το **5ο Κεφάλαιο** περιγράφει ένα συμπληρωματικό χώρο, αυτόν της συχνότητας, ο οποίος προσφέρει μια εναλλακτική θεώρηση ενός σήματος. Το **6ο Κεφάλαιο** αναλαμβάνει να επιβραβεύσει τον αναγνώστη για τον κόπο που έκανε προσπαθώντας να κατανοήσει το αμέσως προηγούμενό του ☺, δίνοντας ευκολότερους και πολύτιμους διαισθητικά

τρόπους ανάλυσης συστημάτων στο χώρο της συχνότητας. Κεντρικό ρόλο στα δυο αυτά κεφάλαια παίζουν τόσο οι *Σειρές Fourier* όσο και ο *Μετασχηματισμός Fourier*. Οι περιορισμοί των τελευταίων οδηγούν στο Μετασχηματισμό Laplace του **7ου Κεφαλαίου**, ο οποίος περιγράφει μεγαλύτερη γκάμα σημάτων με ένα λίγο διαφορετικό τρόπο ο οποίος αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμος στο **8ο Κεφάλαιο**, όπου πλέον μπαίνουμε βαθύτερα στη λειτουργία των συστημάτων. Το **9ο Κεφάλαιο** αφήνει τη μελέτη μεμονωμένων σημάτων και πραγματοποιεί μια μικρή εισαγωγή στη μελέτη της *ομοιότητας* μεταξύ τους, και στο πως αυτή μεταφράζεται στο χώρο της συχνότητας. Το πρώτο μέρος του συγγράμματος κλείνει με το **10ο Κεφάλαιο**, που αποτελεί τη μετάβαση από το συνεχή στο διακριτό χρόνο, περιγράφοντας την έννοια της *δειγματοληψίας*.

Το δεύτερο μέρος ξεκινά αντίστοιχα με το πρώτο: το **11ο Κεφάλαιο** ξεκινά με τις βασικές ιδιότητες των σημάτων και των συστημάτων διακριτού χρόνου. Η ομοιότητα με τις αντίστοιχες του συνεχούς χρόνου είναι εμφανής, αλλά οι όποιες λίγες διαφορές είναι ιδιαίτερα κρίσιμες. Έπειτα, το **12ο Κεφάλαιο** παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ σημάτων και συστημάτων στο διακριτό χρόνο, με τις περίφημες εξισώσεις διαφορών να παίζουν κυρίαρχο ρόλο. Αναπόφευκτα ακολουθεί ο χώρος της συχνότητας στο **13ο Κεφάλαιο**, πρώτα με τις *Σειρές Fourier* και στη συνέχεια με το *Μετασχηματισμό Fourier* Διακριτού Χρόνου. Συνεχίζοντας στο **14ο Κεφάλαιο** θα βρούμε πως μετατρέπονται οι εξισώσεις διαφορών στο πεδίο της συχνότητας και τι κερδίζουμε με τέτοιες αναπαραστάσεις. Αντίστοιχα με το Μετασχηματισμό Laplace του 7ου Κεφαλαίου, ο Μετασχηματισμός Z έρχεται προς βοήθειά μας για να περιγράψει σήματα στα οποία δυσκολεύεται ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου στο **15ο Κεφάλαιο**. Ακολουθεί η ανάλυση συστημάτων μέσω του Μετασχηματισμού Z στο **16ο Κεφάλαιο** και η μελέτη της ομοιότητας σημάτων μέσω των συσχετίσεων και των φασματικών πυκνοτήτων στο **17ο Κεφάλαιο**.

### Τα ''προσόντα''

Πέραν του περιεχομένου που αναφέρθηκε πριν, κατέβαλλα ιδιαίτερη προσπάθεια για τη χρηστικότητα και την αισθητική του βιβλίου.

- Το βιβλίο χωρίζεται σε δυο μέρη: συνεχή χρόνο και διακριτό χρόνο. Τα παραδείγματα κάθε μέρους έχουν χρωματιστεί διαφορετικά: κόκκινο χρώμα για το συνεχή χρόνο, μπλε χρώμα για το διακριτό χρόνο, έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορεί ευκολα να προσανατολιστεί ανοίγοντας το βιβλίο.

- Στην πλειονότητα τους, ο χρωματισμός των σχημάτων επίσης έχει κωδικοποιηθεί: τα σήματα του πεδίου του χρόνου (συνεχούς ή διακριτού) έχουν χρωματιστεί με μπλε χρώμα (και τις αποχρώσεις του, σε περίπτωση πολλαπλών σημάτων στο ίδιο γράφημα), ενώ τα σήματα του πεδίου της συχνότητας έχουν χρωματιστεί με κόκκινο χρώμα (και τις αποχρώσεις του, ξανά για τον ίδιο λόγο). Έτσι ο αναγνώστης μπορεί εύκολα και άμεσα να κατανοήσει ποιό χώρο βλέπει σε ένα δεδομένο σχήμα.

- Κάθε κεφάλαιο (πλην των εισαγωγικών στους δυο χώρους) αρχίζει και τελειώνει με τον ίδιο τρόπο: στις πρώτες γραμμές περιγράφεται **μια μικρή εφαρμογή** που προσπαθεί να εμπνεύσει και να ενθαρρύνει τον αναγνώστη να συνεχίσει στις επόμενες σελίδες. Η μεγάλη πλειονότητα των εφαρμογών είναι πραγματικές και γνωστές από την καθημερινότητα, ενώ κάποιες λιγότερες απλώς θέτουν το πλαίσιο του κάθε κεφαλαίου. Επίσης, η τελευταία παράγραφος κάθε κεφαλαίου (πριν τις ασκήσεις προς λύση) τιτλοφορείται ''**Όμως...**'', και αναλαμβάνει να προβληματίσει τον αναγνώστη σχετικά με την επάρκεια όσων έμαθε στο εκάστοτε κεφάλαιο. Συνήθως η παράγραφος θέτει προβληματισμούς που δεν αντιμετωπίζονται με όσα έχουν περιγραφεί ως εκείνο το σημείο και θέτει τις βάσεις για το επόμενο κεφάλαιο που αναλαμβάνει συνήθως να καλύψει το ''κενό γνώσης''.

- Βασικό κομμάτι του συγγράμματος αποτελούν τα προσεκτικά επιλεγμένα λυμένα παραδείγματα, κυρίως όσον αφορά τις *ιδιότητες* των μετασχηματισμών Fourier, Laplace, και Z, όπου αυτοί αναπτύσσονται. Κάθε ιδιότητα αποδεικνύεται αναλυτικά και ακολουθείται από ένα παράδειγμα χρήσης της, πράγμα που θεωρώ ότι θα αποβεί ιδιαίτερα χρήσιμο για τον αναγνώστη.

- Το μέγεθος του συγγράμματος οφείλεται τόσο στα αρκετά παραδείγματα που περιέχει όσο και στα μεγάλα και ευανάγνωστα σχήματα. Πολλά από τα τελευταία καταλαμβάνουν πλήρεις σελίδες, ώστε να είναι ξεκάθαρες και κατανοητές όλες οι λεπτομέρειες που περιγράφουν.

### Ο στόχος

Ο στόχος αυτού του συγγράμματος δεν είναι άλλος από το **φοιτητή** του Ελληνικού πανεπιστημίου. Το σύγγραμμα αυτό θα τον βοηθήσει να εξασκήσει τη δύναμή του (είναι ένα *βαρύ* βιβλίο!), ή να φτάσει κάπου ψηλά χρησιμοποιώντας το (είναι ένα *παχύ*, πολυσέλιδο σύγγραμμα!) ☺. Κυρίως όμως, θα ήθελα να του εμφυσήσει το πάθος για μάθηση. Ελπίζω να είναι το ίδιο πάθος που είχα εγώ όταν ανακάλυπτα βήμα-βήμα τις πτυχές πίσω από τα μαθηματικά σύμβολα και τα μιγαδικά επίπεδα, τόσο ως φοιτητής όσο και ως διδάσκων. Αναμφίβολα επιθυμώ να δείξω ότι

τα μαθηματικά της επεξεργασίας σήματος (όποια από αυτά παρουσιάζονται εδώ) *μπορούν* να είναι ενδιαφέροντα ή και διασκεδαστικά, μπορούν να είναι χρήσιμα, μπορούν να κατανοηθούν όταν παρουσιαστούν σωστά, μπορούν να εφαρμοστούν στην πράξη!

**Υποστήριξη**

Το σύγγραμμα υποστηρίζεται ηλεκτρονικά από την ιστοσελίδα

https://github.com/gpk1983/SignalProcessing

Εκεί θα αναρτώνται και όποια λάθη ή παραλείψεις παρουσιάζονται στο σύγγραμμα αυτό και δε διορθώθηκαν εγκαίρως. Οι αναγνώστες μπορούν ελεύθερα να επικοινωνούν μαζί μου για υποδείξεις ως προς το κείμενο, τα παραδείγματα, τεχνικά θέματα, ή ό,τι άλλο θελήσουν στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

gkafen@gmail.com

**Ευχαριστίες**

Ξεκινώντας, θα ήταν μεγάλη παράλειψη να μην ευχαριστήσω τον επόπτη της διδακτορικής μου διατριβής και νυν συνεργάτη μου, καθηγητή Γιάννη Στυλιανού, ο οποίος με το παράδειγμα, το ήθος, και τον τρόπο διδασκαλίας του με ώθησε να ακολουθήσω τον τομέα της Επεξεργασίας Σήματος. Το συγγραφικό του ύφος και ο τρόπος που παρουσιάζει μέχρι και σήμερα πολλά δυσνόητα θέματα της επεξεργασίας σήματος ουσιαστικά αποτέλεσαν το ''φυτίλι'' που πυροδότησε αυτό το σύγγραμμα.

Επίσης, δε θα πρέπει να ξεχάσω τους καθηγητές κ. κ. Παναγιώτη Τσακαλίδη, Θανάση Μουχτάρη, και Γιώργο Τζιρίτα, στα μαθήματα των οποίων υπήρξα για λίγο διάστημα βοηθός διδασκαλίας προς το τέλος των σπουδών μου: ο καθένας μου έδωσε και κάτι.

Μεγάλη συνεισφορά στην τελική μορφή αυτού του βιβλίου είχαν οι φοιτητές/τριες των σχετικών μαθημάτων στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης, είτε διορθώνοντας λάθη και αβλεψίες είτε ''αναγκάζοντάς'' με να επαναδιατυπώσω τμήματα του συγγράμματος ώστε να γίνουν πιο κατανοητά. Μια μικρή ειδική αναφορά αξίζει στους φοιτητές Αναστάση Λιβανίδη, Γεώργιο Λυδάκη, Νίκολαο Χαλκιαδάκη, και Αναστάσιο Χατζηαλεξίου, που διάβασαν με ιδιαίτερη λεπτομέρεια το σύγγραμμα αυτό (σε αρχική έκδοσή του, στα πλαίσια των σχετικών μαθημάτων) και επεσήμαναν πλειάδα τυπογραφικών, συντακτικών, και νοηματικών λαθών. Φυσικά, η ευθύνη για οποιασδήποτε μορφής σφάλμα επιμένει ακόμα να βρίσκεται στις σελίδες που ακολουθούν βαρύνει αποκλειστικά το συγγραφέα.

Επιπλέον, ευχαριστώ τον εκδοτικό οίκο Gutenberg για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε: τον κ. Δαρδανό, με τον οποίο η προσωπική επικοινωνία υπήρξε πάντοτε γόνιμη και ευχάριστη, τον κ. Μαμάη, έναν πραγματικό ειδικό στην κατασκευή βιβλίων, για τις πολύτιμες συμβουλές του στη διαμόρφωση των σελιδών και της γενικότερης αισθητικής δομής του βιβλίου, και τις κ. κ. Δημοπούλου και Μπομπόλα, για την ευγένεια και την προθυμία τους να με βοηθήσουν σε κάθε απορία που είχα.

Κλείνοντας, οφείλω τις μεγαλύτερες των ευχαριστιών στην οικογένειά μου. Αρχικά, στους γονείς μου, Παναγιώτη και Διαμάντω Καφεντζή, και τα αδέρφια μου, Στέλιο και Μαριάνθη, γιατί σε αυτούς οφείλω αυτό που είμαι σήμερα. Στη συνέχεια, στη οικογένειά μου στην Κρήτη: το Μύρωνα Σφακιανάκη, που δεν μπορώ να τον συναγωνιστώ ούτε στο τρέξιμο (βραβευμένος μαραθωνοδρόμος!) ούτε στην οργανωτικότητα παρ΄ όλο που έχει τα διπλάσια μου χρόνια, την Αναστασία Κασμά, που προσέχει τα πάντα (αλλά κυρίως την υγεία μας!) πριν από μας για εμάς, και τη Δήμητρα Σφακιανάκη που αποτελεί καλλιτεχνικό συμμέτοχο στην προσπάθεια μου, καθώς επιμελήθηκε τα (εκπληκτικά!) σκίτσα του βιβλίου που κρατάτε.

Τέλος, δε θα υπήρχε ούτε σελίδα από το σύγγραμμα στα χέρια σας αν δεν είχα την υποστήριξη, την αν(τ)οχή, την κατανόηση, και την αγάπη της συζύγου μου, Άννας Σφακιανάκη, και την υπομονή και το τεράστιο χαμόγελο του γιού μου, Παναγιώτη, που μου τραβούσε το χέρι για να με πάρει να παίξουμε κάθε φορά που καθόμουν στον υπολογιστή για να γράψω. Η κόρη μου, Μυρέτα, είναι στους πρώτους της μήνες τώρα που γράφω αυτές τις γραμμές, οπότε δεν πρόλαβε να ''ταλαιπωρηθεί'' από μένα, αλλά σίγουρα ο ερχομός της με ώθησε να ''βάλω μια τελεία'' σε αυτό το σύγγραμμα για να μπορέσω να της δώσω όλη μου την προσοχή! ☺

Γιώργος Π. Καφεντζής

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Φανταστείτε ότι επιστρέφετε στο σπίτι σας μετά από μια κοπιαστική, χειμωνιάτικη ημέρα στη δουλειά. Το αυτοοδηγούμενο μεταφορικό σας μέσο σας οδηγεί με ασφάλεια στο σπίτι, αφού ενημερώνεται για την κίνηση στους δρόμους σε πραγματικό χρόνο και προσαρμόζει την ταχύτητά του στις καιρικές συνθήκες, ενώ παράλληλα εκφωνεί από τα ηχεία του τα νέα της ημέρας που μόλις τελείωσε. Παράλληλα, επιλέγετε στο φορητό υπολογιστή σας τις καλύτερες από τις υψηλής ποιότητας φωτογραφίες που τραβήξατε στην εκδρομή που πήγατε το προηγούμενο Σαββατοκύριακο. Λίγο πριν φτάσετε, επικοινωνείτε με το ''έξυπνο'' σπίτι σας και του ζητάτε να ανάψει τη θέρμανση. Με την άφιξή σας, ανοίγετε την πόρτα με χρήση του δακτυλικού σας αποτυπώματος και ανάβετε τα φώτα απλά προσφωνόντας ''σπίτι, άναψε τα φώτα''. Όσο μαγειρεύετε το κρέας με τη βοήθεια της ''έξυπνης'' κουζίνας σας - που αναγνωρίζει το υλικό και καθορίζει αυτόματα τον τρόπο και τη θερμοκρασία ψησίματος - ζητάτε από την τηλεόρασή σας να κατεβάσει την αγαπημένη σας σειρά από το διαδίκτυο - σε τρία λεπτά, μερικά GB βρίσκονται στην εσωτερική μνήμη της τηλεόρασης σας. Ξαπλώνετε στον καναπέ και απολαμβάνετε το φαγητό σας παρακολουθώντας τη σειρά σας σε πολύ υψηλής ποιότητας 4K εικόνα και επτακάναλο ήχο. Ο αισθητήρας υγείας στο ρολόι που φοράτε σας ενημερώνει ότι πρέπει να κοιμηθείτε σε μια ώρα, καθώς οι δείκτες κούρασής σας είναι υψηλοί. Πριν το κάνετε, συνομιλείτε με τον προσωπικό βοηθό του κινητού σας για την αναζήτηση ενός καλού εστιατορίου στο κέντρο της πόλης για το αυριανό γεύμα με το/τη σύντροφό σας. Σε λίγη ώρα έχετε κοιμηθεί και το σπίτι σας φροντίζει η θερμοκρασία στο σαλόνι σας να είναι κατάλληλη ώστε να έχετε έναν άνετο ύπνο. Μόλις ξυπνήσετε, επικοινωνείτε με την ''έξυπνη'' καφετιέρα σας ώστε να έχει έτοιμο τον αγαπημένο καφέ σας μέχρι να σηκωθείτε από το κρεβάτι.

Ίσως νομίζετε ότι η παραπάνω περιγραφή αποσπάστηκε από κάποια κινηματογραφική ταινία ή βιβλίο επιστημονικής φαντασίας. Η αλήθεια είναι ότι οι περισσότερες, αν όχι όλες, από τις εντυπωσιακές τεχνολογίες που μόλις αναφέρθηκαν βρίσκονται εδώ ***τώρα***! Θα αναρωτιέστε πιθανότατα τι σκοπό έχει μια τέτοια περιγραφή ως η πρώτη επαφή σας με το σύγγραμμα που κρατάτε στα χέρια σας - σίγουρα θέλω να σας τραβήξω την προσοχή, υπάρχει όμως κάτι περισσότερο; Βέβαια, και για να το αποκαλύψω σας θέτω την εξής ερώτηση: ''*Ποιός είναι ο συνδετικός κρίκος των τεχνολογιών που μόλις διαβάσατε; Ποιά είναι η τεχνολογική κόλλα που συνδέει και καθιστά πραγματοποιήσιμες όλες αυτές τις εφαρμογές;*'' Η απάντηση είναι ο λόγος ύπαρξης αυτού του βιβλίου: η επιστήμη της *Επεξεργασίας Σήματος - Signal Processing*! Η Επεξεργασία Σήματος αφορά τη μετάδοση, ανάλυση, κι εξαγωγή πληροφοριών από *οτιδήποτε* φέρει την τελευταία. Μπορείτε να αναγνωρίσετε τα σήματα που εμπλέκονται στο κινηματογραφικό σενάριο της πρώτης παραγράφου;[1]

Η παραπάνω εισαγωγή μας δίνει την ευκαιρία να αναλάβουμε το ''εναρκτήριο λάκτισμα'' για έναν τομέα ιδιαίτερα ενδιαφέρων, που όπως προείπαμε, λέγεται *επεξεργασία σήματος*. Η πλούσια ιστορία και οι μελλοντικές υποσχέσεις του τομέα της Επεξεργασίας Σήματος προέρχονται από μια δυνατή και αγαστή συνεργασία μεταξύ αυξανόμενα περίπλοκων εφαρμογών (applications), νέων αλγοριθμικών εξελίξεων (algorithms), και συνεχώς αναδυόμενων νέων αρχιτεκτονικών στον τομέα του υλικού (hardware). Εφαρμογές της Επεξεργασίας Σήματος περιλαμβάνουν έναν αχανή χώρο ο οποίος περιλαμβάνει τους τομείς της διασκέδασης (entertainment), των επικοινωνιών (communications), της εξερεύνησης του διαστήματος (space exploration), της τεχνητής νοημοσύνης (artificial intelligence), των στρατιωτικών εφαρμογών (military applications), της ιατρικής (medicine), της αρχαιολογίας (archaeology), της βιοπληροφορικής (bioinformatics), και της γεωφυσικής (geophysics), απλά για να αναφέρουμε μερικούς. Αλγόριθμοι και υλικό επεξεργασίας σήματος κυριαρχούν σε ένα ευρύ πεδίο συστημάτων, από υψηλής εξειδίκευσης στρατιωτικά συστήματα και βιομηχανικές εφαρμογές, μέχρι χαμηλού κόστους, υψηλής κατανάλωσης ηλεκτρονικά συστήματα του εμπορίου.

Για παράδειγμα, αν και συνήθως παίρνουμε ως δεδομένη την εκπληκτική επίδοση των συστημάτων πολυμέσων όπως το βίντεο υψηλής ποιότητας (high definition video), ο ήχος υψηλής πιστότητας (high fidelity audio), και οι εφαρμογές αναγνώρισης και σύνθεσης φωνής (speech recognition - synthesis), αυτά τα συστήματα πάντα βασίζονταν

[1] Ξεκινήστε από το αυτο-οδηγούμενο όχημα: πρέπει αυτό να λαμβάνει σήματα από δορυφόρους για να ελέγχει τη θέση του σε σχέση με τον προορισμό του, να μπορεί να ''βλέπει'' το δρόμο (η οπτική πληροφορία είναι ένα σήμα) για να προσανατολίζεται με ασφάλεια, να λαμβάνει και να καταλαβαίνει το ακουστικό σήμα (ομιλία) του επιβάτη και να ανταποκρίνεται σε αυτό, κλπ.

σε μεγάλο βαθμό σε τελευταίας τεχνολογίας επεξεργασία σήματος. Στον πυρήνα όλων των μοντέρνων έξυπνων κινητών τηλεφώνων (smartphones) βρίσκονται επεξεργαστές ψηφιακού σήματος. Το πρότυπο συμπίεσης βίντεο MPEG, καθώς και το πρότυπο συμπίεσης εικόνας JPEG βασίζονται πολύ σε γνωστές αρχές και τεχνικές επεξεργασίας σήματος. Το πολύ γνωστό σας πρότυπο συμπίεσης ήχου MP3 οφείλει την επιτυχία του στη γνώση μας για την αντίληψη και τη διάδοση των ακουστικών κυμάτων. Οι συσκευές αποθήκευσης υψηλής πυκνότητας και οι νέοι δίσκοι στερεάς κατάστασης (solid state disks - SSDs) δουλεύουν επειδή ακριβώς υπάρχουν τεχνικές επεξεργασίας σήματος που επιτρέπουν την παροχή συνέπειας και ευρωστίας σε, κατά τα άλλα, εύθραυστες τεχνολογίες. Καθώς κοιτάζουμε προς το μέλλον, είναι εμφανές ότι ο ρόλος της Επεξεργασίας Σήματος επεκτείνεται, οδηγούμενος εν μέρει από τη σύγκλιση των Τηλεπικοινωνιών, των Υπολογιστών, της Τεχνητής Νοημοσύνης, και της Επεξεργασίας Σήματος, τόσο στην αρένα της κατανάλωσης όσο και στις προχωρημένες βιομηχανικές εφαρμογές.

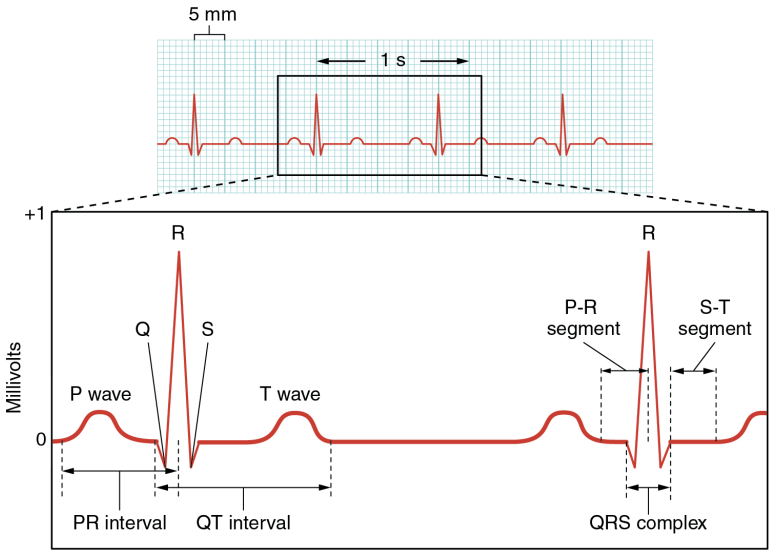
# Εφαρμογές - Μια γρήγορη ματιά

Ο αυξανόμενος αριθμός των εφαρμογών και η απαίτηση για εξελιγμένους αλγορίθμους οδηγούν στην ταχύτατη ανάπτυξη τεχνολογικών συσκευών για υλοποίηση συστημάτων επεξεργασίας σήματος. Σύμφωνα με εκτιμήσεις, η ικανότητα επεξεργασίας τόσο των εξειδικευμένων μικροεπεξεργαστών σήματος όσο και τον προσωπικών υπολογιστών πιθανότατα θα αυξηθεί κατά πολλές τάξεις μεγέθους στα επόμενα 10 χρόνια. Πέραν πάσης αμφιβολίας, ο ρόλος και η σημασία της Επεξεργασίας Σήματος θα συνεχίσει να επεκτείνεται σε αυξανόμενους ρυθμούς στο μέλλον.

Η Επεξεργασία Σήματος έχει να κάνει με την αναπαράσταση, το μετασχηματισμό, και τη χειραγώγιση σημάτων και της πληροφορίας που αυτά περιέχουν. Στη συνέχεια, θα δούμε μερικά παραδείγματα για να καταλάβετε καλύτερα περί τίνος πρόκειται.

## Βιοσήματα

Ας ξεκινήσουμε από τα λεγόμενα *βιολογικά σήματα ή βιοσήματα*. Η ηλεκτρική δραστηριότητα της καρδιάς αναπαρίσταται από το *Ηλεκτροκαρδιογράφημα* (Electrocardiography (ECG) Signal). Ένα τυπικό ηλεκτροκαρδιογράφημα φαίνεται στο Σχήμα 1[1]. Το ηλεκτροκαρδιογράφημα είναι (προσεγγιστικά) ένα περιοδικό σήμα - θυμηθείτε την




Σχήμα 1: *Στοιχεία ηλεκτροκαρδιογραφήματος.*

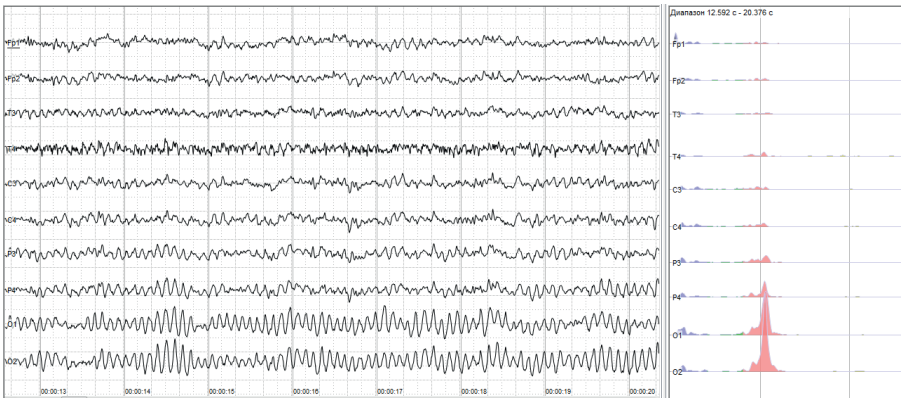
έννοια της περιοδικότητας: περιοδικό λέγεται ένα σήμα που επαναλαμβάνεται ανά τακτά διαστήματα. Δυο τέτοιες περίοδοι του ηλεκτροκαρδιογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 1, και καθεμιά αναπαριστά έναν κύκλο μεταφοράς του αίματος απο την καρδιά στις αρτηρίες. Αυτό το τμήμα του σήματος παράγεται απο μια ηλεκτρική διέγερση που προέρχεται από το φλεβόκομβο, στο δεξιό κόλπο της καρδιάς (ναι, η φύση του τομέα είναι διεπιστημονική - λίγη καρδιολογία είναι απαραίτητη ☺). Η διέγερση αυτή προκαλεί συστολή των κόλπων, που ωθεί το αίμα σε κάθε κόλπο στις κοιλίες. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα ως το κύμα-P (P-wave). Ο κολποκοιλιακός κόμβος καθυστερεί τη διέγερση μέχρι να ολοκληρωθεί η μεταφορά του αίματος από τους κόλπους στις κοιλίες, με αποτέλεσμα το διάστημα P-R στο ηλεκτροκαρδιογράφημα. Η διέγερση μετά προκαλεί συστολή των κοιλιών, που προωθούν

το αίμα στις αρτηρίες. Αυτή η διαδικασία παράγει το τμήμα QRS στο ηλεκτροκαρδιογράφημα. Κατα τη διάρκεια αυτής της φάσης, οι κόλποι χαλαρώνουν και γεμίζουν με αίμα. Το κύμα-T (T-wave) της κυματομορφής αναπαριστά τη χαλάρωση των κοιλίων. Όλη αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται περιοδικά, ξανά και ξανά. Κάθε τμήμα του ηλεκτροκαρδιογραφήματος φέρει διάφορες πληροφορίες για τον ιατρό που αναλύει την κατάσταση της καρδιάς του ασθενούς. Για παράδειγμα, το πλάτος και ο χρόνος που συμβαίνει το κύμα-P και το τμήμα QRS δείχνουν την κατάσταση της καρδιακής μυικής μάζας.

Κάποια απώλεια πλάτους δείχνει μυική ζημιά, ενώ αυξημένο πλάτος είναι ένδειξη μη ομαλών καρδιακών ρυθμών. Ένα μακρύ διάστημα P-R καταδεικνύει μεγάλη καθυστέρηση του κολποκοιλιακού κόμβου. Παρόμοια, μερική ή ολική διακοπή των διεγέρσεων συστολής αντανακλάται από διακοπτόμενο συγχρονισμό μεταξύ των κυμάτων P και QRS. Οι περισσότερες από αυτές τις ανωμαλίες μπορούν να θεραπευτούν με φαρμακευτικές αγωγές, και η αποτελεσματικότητα αυτών μπορεί να εποπτευθεί με την παρακολούθηση του νέου ηλεκτροκαρδιογραφήματος, μετά τη χορήγηση της αγωγής. Στην πράξη, υπάρχουν διαφόρων ειδών εξωτερικές παρεμβολές που αλλοιώνουν το ηλεκτροκαρδιογραφικό σήμα. Αν αυτές οι παρεμβολές δεν αφαιρεθούν είναι δύσκολο για έναν ιατρό να κάνει σωστή διάγνωση. Μια κοινή πηγή θορύβου είναι οι γραμμές ρεύματος των 60 Hz που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του καρδιογραφήματος. Άλλες πηγές παρεμβολών είναι τα ηλεκτρομυογραφικά σήματα, που είναι διαφορές δυναμικού που αναπτύσσονται με τη συστολή των μυών. Αυτές όλες οι παρεμβολές μπορούν να αφαιρεθούν με διάφορες τεχνικές επεξεργασίες σήματος.

Καθώς η καρδιά αποτελεί τον κινητήρα της λειτουργίας του ανθρώπινου – και όχι μόνο – σώματος, η σωστή δόμηση και απρόσκοπτη ευρωστία εργαλείων που μπορεί η επεξεργασία σήματος να παράσχει στους ιατρούς καθίσταται απαραίτητη.

Εξίσου δημοφιλής τομέας ανάλυσης βιοσημάτων αποτελεί η ανάλυση *ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος*. Το σύνολο της ηλεκτρικής δραστηριότητας που προκαλείται από την τυχαία εκπυρσοκρότηση δισεκατομμυρίων ανεξάρτητων νευρώνων στον εγκέφαλο, αναπαρίσταται από το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα - Electroencephalographic Signal - EEG. Σε πολλαπλές εγγραφές ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων, ηλεκτρόδια τοποθετούνται σε διάφορες θέσεις στο κρανίο, με δυο κοινά ηλεκτρόδια να βρίσκονται στους λοβούς των αυτιών, και οι διαφορές δυναμικού ανάμεσα στα διάφορα ηλεκτρόδια καταγράφονται. Ένα τυπικό εύρος ζώνης (θα μάθετε τι είναι αυτό ☺) τέτοιων εγκεφαλογραφημάτων κυμαίνεται από 0.5 ως 100Hz, και τα πλάτη κυμαίνονται από 2 ως 100mV. Ένα παράδειγμα πολλαπλής μέτρησης εγκεφαλογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 2[2]. Έχουν αναπτυχθεί τεχνικές ανάλυσης τόσο στο χώρο




Σχήμα 2: *Στοιχεία ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος.*

του χρόνου όσο και στο χώρο της συχνότητας για τη διάγνωση της επιληψίας, διαταραχές του ύπνου, ψυχιατρικές διαταραχές, κλπ. Γι΄ αυτό το σκοπό, το φάσμα (κι αυτό θα μάθετε τι είναι ☺) του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος χωρίζεται στις ακόλουθες πέντε περιοχές: (1) την περιοχή Δέλτα, που καλύπτει το εύρος από 0.5 ως 4Hz, (2) την περιοχή Θήτα, που καλύπτει το εύρος από 4 ως 8Hz, (3) την περιοχή Άλφα, που καλύπτει το εύρος από 8 ως 13Hz, (4) την περιοχή Βήτα, που καλύπτει το εύρος από 13 ως 22Hz, και (5) την περιοχή Γάμμα, που καλύπτει το εύρος από 22 ως 30Hz. Το σήμα Δέλτα εμφανίζεται κανονικά σε παιδιά και ενήλικες κατά τη διάρκεια του ύπνου. Αν εμφανιστεί σε ενήλικα σε άγρυπνη κατάσταση, είναι ένδειξη συγκεκριμένων εγκεφαλικών ασθενειών. Το σήμα Θήτα συνήθως απαντάται σε παιδιά, αν και έχει εμφανιστεί και σε άγρυπνους ενήλικες. Το σήμα Άλφα είναι κοινό σε όλους τους φυσιολογικούς ανθρώπους και είναι περισσότερο εμφανές σε χαλαρούς, άγρυπνους ενήλικες με κλειστά μάτια.

Παρόμοια, το σήμα Βήτα είναι παρατηρίσιμο σε φυσιολογικούς ενήλικες. Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα παρουσιάζει ταχεία, χαμηλής έντασης κύματα, που λέγονται κύματα REM - Rapid Eye Movement, σε ένα άτομο που ονειρεύεται όταν κοιμάται. Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα ενός επιληπτικού ασθενούς παρουσιάζει διαφόρων ειδών

ανωμαλίες, ανάλογα με τον τύπο της επιληψίας που προκαλείται από μη ελεγχόμενες νευρικές διαταραχές. Όπως καταλαβαίνετε, κάποιος που έχει την ικανότητα να εξάγει τα διάφορα σήματα με ακρίβεια, παρουσία θορύβου ή άλλων παρεμβολών, μέσα από την επεξεργασία τους, είναι ιδιαίτερα χρήσιμος!

Κάθε μέρα μαθαίνουμε όλο και περισσότερα για τη λειτουργία του εγκεφάλου και οι σχετικές μελλοντικές έρευνες σίγουρα θα μας εκπλήξουν. Αυτό που δε θα μας εκπλήξει είναι η συμβολή της επεξεργασίας σήματος ως κινητήρια δύναμη των ερευνών αυτών! Για περισσότερα, μπορείτε να συμβουλευτείτε τα συγγράμματα [3], [4], [5], [6], [7], [8].

## Σεισμικά σήματα

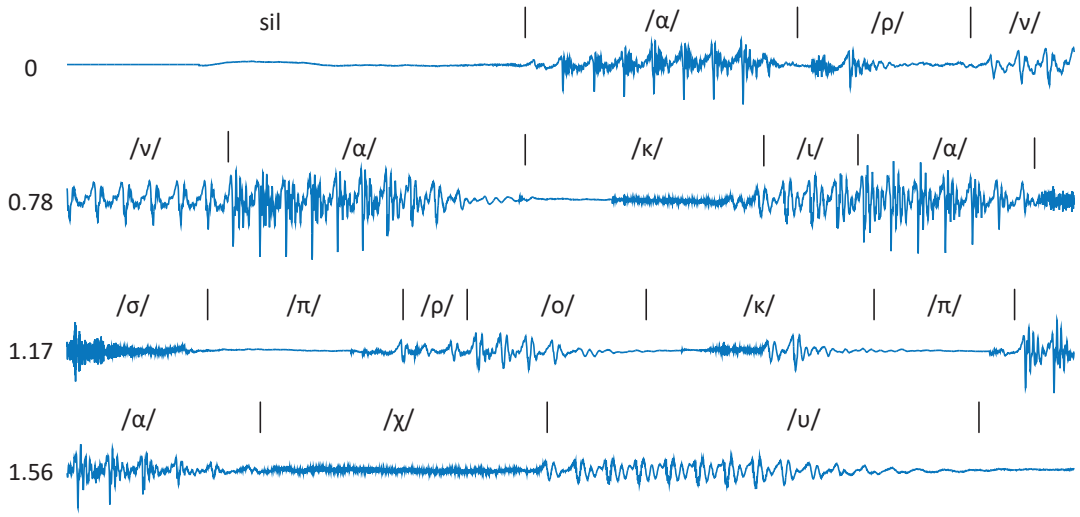
Τα σεισμικά σήματα προκαλούνται από την κίνηση των πετρωμάτων ως αποτέλεσμα κάποιου σεισμού, μιας ηφαιστειακής έκρηξης, ή μιας υπόγειας έκρηξης. Η κίνηση του εδάφους προκαλεί ελαστικά κύματα που διαδίδονται μέσα από το σώμα της Γης σε όλες τις κατευθύνσεις ξεκινώντας από την πηγή της κίνησης. Τρείς βασικοί τύποι ελαστικών κυμάτων παράγονται από την κίνηση του εδάφους.
Δυο από αυτά διαδίδονται στο σώμα της Γης, με το ένα να είναι ταχύτερο από το άλλο. Το ταχύτερο αυτό σήμα λέγεται *πρωτεύον* κύμα (P-wave), ενώ το πιο αργό λέγεται *δευτερεύον* κύμα (S-wave). Το τρίτο κύμα είναι γνωστό ως *κύμα επιφάνειας*, που κινείται κατά μήκος της επιφάνειας του εδάφους. Αυτά τα σεισμικά κύματα μετατρέπονται σε ηλεκτρικά σήματα από ένα σεισμογράφο και καταγράφονται σε ένα χαρτί ή σε μαγνητική ταινία.

Λόγω της τρισδιάστατης κίνησης του εδάφους, ο σεισμογράφος συνήθως αποτελείται από τρεις ξεχωριστές συσκευές καταγραφής που παρέχουν πληροφορίες για την κίνηση στις δυο οριζόντιες κατευθύνσεις και στη μια κάθετη. Κάθε μια τέτοια εγγραφή είναι ένα μονοδιάστατο σήμα. Από τις εγγραφές αυτές, είναι δυνατόν να καθορίσει κανείς την ένταση του σεισμού ή μιας πυρηνικής έκρηξης, καθώς και το επίκεντρο του σεισμού. Τα σεισμικά σήματα επίσης παίζουν σημαντικό ρόλο στη γεωφυσική εξερεύνηση για πετρέλαιο και αέρια. Σε αυτές τις εφαρμογές, γραμμικές διατάξεις από σεισμικές πηγές, όπως εκρηκτικά υψηλής ενέργειας, τοποθετούνται ανά τακτά διαστήματα στην επιφάνεια του εδάφους. Τα εκρηκτικά παράγουν σεισμικά κύματα που διαδίδονται μέσω των υποεπιφανειακών γεωλογικών δομών, και αντανακλώνται πίασω στην επιφάνεια. Τα ανακλώμενα κύματα μετατρέπονται σε ηλεκτρικά με μια διάταξη γεωφώνων τοποθετημένα σε συγκεκριμένους σχηματισμούς και απεικονίζονται ως δισδιάστατα σήματα σε συνάρτηση του χώρου και του χρόνου. Πριν αναλυθούν αυτά τα σήματα, γίνονται κάποιες διορθώσεις στα πλάτη και στους χρονισμούς. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη γεωφυσική και την ανάλυσης των σημάτων της μπορείτε να δείτε τα συγγράμματα [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15].

## Σήματα Φωνής

Η γραμμική ακουστική θεωρία της παραγωγής φωνής έχει οδηγήσει σε μαθηματικά μοντέλα για την αναπαράσταση των σημάτων φωνής. Ένα σήμα φωνής σχηματίζεται από τη διέγερση της φωνητικής οδού και συνίσταται από δυο είδη ήχων: έμφωνους και άφωνους. Οι έμφωνοι ήχοι, που περιλαμβάνουν τα φωνήεντα και έναν αριθμό από σύμφωνα, όπως τα /α/, /ε/, /ι/ κλπ, διεγείρονται από ένα κύμα αέρα που παράγεται από τους πνεύμονες και διαμορφώνεται από τις ανοιγοκλειόμενες φωνητικές χορδές. Από την άλλη, οι άφωνοι ήχοι παράγονται από την ελεύθερη διέλευση του άερα μέσα από τις χαλαρές φωνητικές χορδές, διαμορφώνονται κυρίως από τη στοματική κοιλότητα, και περιλαμβάνουν ήχους όπως οι /φ/, /σ/. Ένα σήμα φωνής φαίνεται στο Σχήμα 3, το οποίο εικονίζει τη φράση *αρνάκι άσπρο και παχύ*, σε διαδοχικές γραφικές παραστάσεις. Η συνολική διάρκεια του σήματος είναι 1.6 δευτερόλεπτα. Μπορείτε να παρατηρήσετε το φώνημα SH, στην αρχή της πρότασης, το οποίο έχει ακανόνιστη, ''θορυβώδη'' μορφή, και είναι σήμα υψηλής συχνότητας (αλλάζει πολύ γρήγορα στη μονάδα του χρόνου). Επίσης, δείτε το φώνημα /ι/, το οποίο είναι χαμηλής συχνότητας σήμα (αλλάζει αργά στη μονάδα του χρόνου), με κάποια περιοδικότητα και ομοιομορφία. Το ίδιο ισχύει και για το φώνημα /α/, όπως και όμοιο με το αρχικό φώνημα /σ/ φαίνεται και το φώνημα /χ/. Η χρονική δομή τους είναι τέτοια που μας επιτρέπει να χωρίζουμε τα φωνήματα σε (σχεδόν) περιοδικά (quasi-periodic) και απεριοδικά (aperiodic). Έχει δειχθεί ότι τα σχεδόν περιοδικά σήματα μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα άθροισμα πεπερασμένου αριθμού συνημιτόνων - ναι, τα γνωστά συνημίτονα που γνωρίζετε από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση! Η χαμηλότερη συχνότητα ταλάντωσης αυτών των σημάτων λέγεται *θεμελιώδης συχνότητα* και η εύρεσή της με ακρίβεια αποτελεί ακόμα hot θέμα στην Επεξεργασία Φωνής. ☺Τα απεριοδικά σήματα δεν έχουν σταθερή χρονική δομή και μοιάζουν περισσότερο με θόρυβο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.

Εν γένει, μπορούμε να πούμε ότι στην Επεξεργασία Φωνής υπάρχουν δυο τάσεις, δυο ''στρατόπεδα'': το πρώτο εξετάζει το σήμα φωνής με βάση το ανθρώπινο σύστημα παραγωγής φωνής: μια διέγερση που περνάει απ΄τις φωνητικές χορδές, διατρέχει τη φωνητική οδό, φτάνει στη στοματική κοιλότητα, και διαμορφώνεται τελικά από τα χείλη. Βάση αυτής της διαδικασίας είναι το γνωστό μοντέλο πηγής - φίλτρου (source-filter model). Η χρήση αυτού του μοντέλου είναι άκρως χρήσιμη στην Ανάλυση Φωνής, στην Ανίχνευση Παθολογιών, στη μελέτη του ανθρώπινου συστήματος παραγωγής φωνής, και αλλού. Το άλλο ''στρατόπεδο'' βλέπει το σήμα της φωνής ως μια απλή




Σχήμα 3: *Το σήμα φωνής "αρνάκι άσπρο και παχύ".*

χρονοσειρά, χωρίς να ενδιαφέρεται τόσο πολύ για τον τρόπο παραγωγής της. Έτσι, το σήμα φωνής συνήθως μοντελοποιείται από ένα άθροισμα ημιτόνων με πλάτη και συχνότητες που μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Τέτοια μοντέλα περιλαμβάνουν το Ημιτονοειδές μοντέλο (Sinusoidal Model, SM), το Αρμονικό+Θόρυβος Μοντέλο(Harmonic Plus Noise Model, HNM, τα Προσαρμόσιμα Ημιτονοειδή Μοντέλα (Adaptive Sinusoidal Models, aSMs), και τα Εκθετικά Φθίνοντα Ημιτονοειδή Μοντέλα (Exponentially Damped Sinusoidal Models, EDSM).
Όπως καταλάβατε, μια από τις σπουδαιότερες εφαρμογές στην Επεξεργασία Σήματος είναι στη γενική περιοχή της Επεξεργασίας Φωνής. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στην περιοχή αυτή χωρίζονται εν γένει σε τρεις κατηγορίες: (1) Ανάλυση Φωνής, (2) Σύνθεση Φωνής, και (3) Ανάλυση και Σύνθεση Φωνής. Μέθοδοι Ανάλυσης Φωνής χρησιμοποιούνται στην Αυτόματη Αναγνώριση Ομιλίας (Automatic Speech Recognition), στην Ταυτοποίηση Ομιλητή (Speaker Verification), και στην Αναγνώριση Ομιλητή (Speaker Identification). Επίσης σχετικά πρόσφατα υπάρχουν εφαρμογές στην Ιατρική και στη διάγνωση παθήσεων του συστήματος παραγωγής φωνής. Εφαρμογές της Σύνθεσης Φωνής παρουσιάζονται στη Μετατροπή Κειμένου σε Ομιλία (Text-to-Speech Synthesis), και στην Εξόρυξη Δεδομένων από Υπολογιστές σε μορφή ομιλίας (Data Retrieval), μεταξύ άλλων. Ένα παράδειγμα Ανάλυσης και Σύνθεσης Φωνής (3η κατηγορία) είναι η Κρυπτογράφηση Φωνής για ασφαλείς επικοινωνίες (Voice Scrambling for Secure Transmission). Ένα ακόμα παράδειγμα είναι η Συμπίεση Φωνής (Speech Compression), που χρειάζεται για τη γρήγορη και αποτελεσματική μετάδοση μέσω ενός μέσου. Ένα τρίτο παράδειγμα είναι η Βελτίωση Φωνής (Speech Enhancement), που αποσκοπεί στη βελτίωση της ποιότητας του σήματος της φωνής, με την έννοια του ότι γίνεται πιο αντιληπτό στο αυτί μας. Ένα τέταρτο, πολύ δημοφιλές παράδειγμα, είναι η Τροποποίηση Φωνής (Speech Modification), και η Μετατροπή Φωνής (Voice Conversion). Τροποποίηση φωνής ορίζεται ως η αλλαγή των διάφορων χαρακτηριστικών της φωνής ενός ατόμου, όπως η τονικότητα, ο ρυθμός άρθρωσης, η ένταση, και άλλα. Μετατροπή φωνής ορίζεται ως η αλλαγή των χαρακτηριστικών της φωνής ενός ομιλητή (source speaker) ώστε να φαίνεται ότι η φωνή προέρχεται από κάποιον άλλο, συγκεκριμένο, ομιλητή (target speaker). Μπορείτε εδώ[2] να βρείτε και να ακούσετε παραδείγματα τροποποίησης φωνής (στην παράγραφο VTLN-Based Voice Conversion), που έχουν δημιουργηθεί με μια πολύ απλή τεχνική, που λέγεται Κανονικοποίηση του Μήκους της Φωνητικής Οδού (Vocal Tract Length Normalization). Μερικά από αυτά είναι αρκετά αστεία. Φυσικά, τέτοιες τεχνικές, που βασίζονται σε αλλαγή ενός μόνο χαρακτηριστικού, δεν έχουν ιδιαίτερη ευελιξία ούτε ιδιαίτερα καλή απόδοση. Η βιβλιογραφία στην επεξεργασία σήματος φωνής και φυσικής γλώσσας είναι μεγάλη, με χαρακτηριστικότερα παραδείγματα τα [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22].

## Σήματα Ήχου/Μουσικής

Το ηλεκτρονικό συνθεσάιζερ είναι ένα παράδειγμα της χρήσης σύγχρονων τεχνικών επεξεργασίας σήματος στη μουσική. Ο φυσικός ήχος που παράγεται από τα περισσότερα μουσικά όργανα παράγεται, εν γένει, από μηχανικές δονήσεις που προκαλούνται από κάποιου είδους ταλαντωτή. Όλες αυτές οι δονήσεις μαζί σε ένα μουσικό όργανο παράγουν τη μουσική. Για παράδειγμα, σε ένα βιολί, ο κύριος ταλαντωτής είναι οι χορδές. Όταν κινούνται, κάνουν το ξύλινο σώμα του βιολιού να δονείται, το οποίο μετέπειτα προκαλεί δονήσεις στα μόρια του αέρα μέσα και έξω

[2] http://suendermann.com/su/misc/vc/sample/index.html

από το βιολί. Ο ήχος των οργάνων μπορεί να χωριστεί σε δυο κατηγορίες: σχεδόν περιοδικοί και απεριοδικοί ήχοι. Οι σχεδόν περιοδικοί ήχοι μπορούν να αναπαρασταθούν ως ένα άθροισμα από πεπερασμένου πλήθους συνημίτονα με μεταβαλλόμενα πλάτη και συχνότητες. Οι απεριοδικοί ήχοι συνηθίζεται να μοντελοποιούνται με κατάλληλη επεξεργασία λευκού θορύβου. Αρκετά μοντέλα ανάλυσης ήχου που χρησιμοποιούν παρόμοιο διαχωρισμό έχουν αναπτυχθεί στο παρελθόν, με αρκετή επιτυχία. Γνωστότερο όλων είναι το Ημιτονοειδές Μοντέλο (SM), που αναφέραμε και στην παράγραφο σχετικά με την επεξεργασία φωνής.

Ένας άλλος τομέας με αρκετό ερευνητικό ενδιαφέρον είναι η Συμπίεση Ήχου (Audio Compression). Ένα παράδειγμα που είναι γνωστό σε όλους σας είναι το πρότυπο ήχου MPEG-Layer III, το γνωστό MP3. Η συμπίεση ήχου στο MP3 επιτυγχάνεται με τη μείωση ή εξάλειψη συγκεκριμένων τμημάτων του ήχου, που θεωρείται ότι είναι εκτός της ακουστικής εμβέλειας των περισσότερων ανθρώπων. Αυτή η μέθοδος λέγεται Ψυχοακουστική Κωδικοποίηση (Perceptual Coding), και χρησιμοποιεί ψυχοακουστικά μοντέλα για να απορρίψει ή να μειώσει την ακρίβεια κομματιών ήχου που είναι λιγότερο αντιληπτά από την ανθρώπινη ακοή, και τα τμήματα που απομένουν καταγράφονται και κωδικοποιούνται με αποτελεσματικό τρόπο, επιτυγχάνοντας συμπίεση που φτάνει μέχρι και 11 φορές το μέγεθος του αρχικού σήματος (ένα CD ήχου περιέχει μουσική που έχει 44100 δείγματα ανά δευτερόλεπτο, με 16 bit ακρίβεια, σε 2 κανάλια, άρα απαιτούνται 1411200 bit/s. Το ίδιο αρχείο μουσικής, κωδικοποιημένο με MP3 στα 128 kb/s, απαιτεί 128000 bit/sec. Ο λόγος των δυο είναι $1411200/128000 = 11.025$, άρα το MP3 αρχείο είναι 11 φορές μικρότερο σε μέγεθος). Επίσης, μια πολύ πρόσφατη, ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, και ραγδαίως αναπτυσσόμενη ερευνητική περιοχή είναι αυτή της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας (Compressive Sampling - C.S). Αξίζει να αναφέρουμε λίγα πράγματα, πολύ συνοπτικά. Πρόκειται λοιπόν για μια θεωρία που αναφέρει ότι ένα σήμα (ήχος, φωνή, εικόνα, οποιοδήποτε σήμα) μπορεί να ανακατασκευαστεί από πολύ λιγότερα δείγματα απ΄όσα χρησιμοποιούν οι παραδοσιακές τεχνικές που βασίζονται στο θεώρημα του Shannon - το οποίο και θα μάθετε στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας! Το θέωρημα του Shannon θέτει ένα κάτω όριο στο πόσα δείγματα (τιμές) πρέπει να πάρουμε από ένα σήμα συνεχούς χρόνου για να μπορούμε να το ανακατασκευάσουμε τέλεια από αυτά τα δείγματα. Φυσικά η θεωρία της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας δεν παραβιάζει αυτό το όριο για την τέλεια ανακατασκευή του σήματος, απλά αφ΄ ενός χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές ''αναπλήρωσης'' των δειγμάτων που λείπουν, και αφ΄ ετέρου η ανακατασκευή του σήματος είναι επιτυχής με κάποια (μεγάλη) *πιθανότητα*. Στην περίπτωση αυτή η διαφορά μεταξύ του αυθεντικού και του ανακατασκευασμένου σήματος είναι πολύ δύσκολα διακριτή. Κύρια προϋπόθεση (μεταξύ άλλων) για την ''καλή'' ανακατασκευή του σήματος είναι αυτό να είναι *αραιό* (sparse) σε κάποιο χώρο, πράγμα που σημαίνει ότι οι τιμές του σήματος στο χώρο αυτό πρέπει να είναι ως επί το πλείστον πολύ μικρές (σχεδόν μηδενικές).

Άλλες εφαρμογές περιλαμβάνουν τον Τρισδιάστατο Ήχο (3D Audio), τον Εικονικό Ήχο (Virtual Audio), τα Πολυκαναλικά Συστήματα Ήχου (Multichannel Audio Systems), το Τυφλό Διαχωρισμό Πηγών Ήχου (Blind Source Separation), την Αποθορυβοποίηση Ήχου (Audio Denoising), και πολλά άλλα. Ένα διασκεδαστικό παράδειγμα μπορείτε να βρείτε εδώ [3], όπου χρησιμοποιείται η πολύ απλή τεχνική της Φασματικής Αφαίρεσης (Spectral Subtraction) για την αφαίρεση του ενοχλητικότατου ήχου από τις βουβουζέλες στις μεταδόσεις του Παγκοσμίου Κυπέλλου Ποδοσφαίρου, που έγινε στη Νότια Αφρική, το 2010! ☺Ακούστε τη διαφορά! Να σημειωθεί ότι ο κώδικάς που υλοποιεί τον αλγόριθμο δεν ξεπερνά τις $200 - 250$ γραμμές. Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε τα [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29].

## Χρονοσειρές

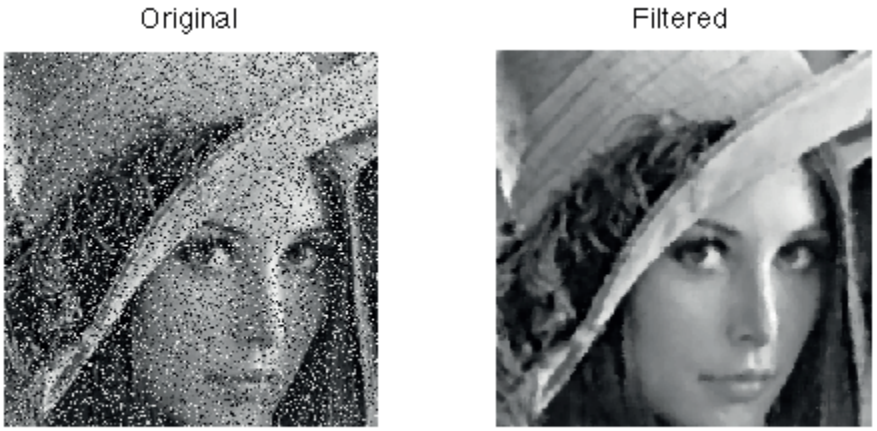
Τα σήματα που έχουμε περιγράψει ως τώρα είναι συνεχή στο χρόνο, δηλ. ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή. Σε πολλές περιπτώσεις, τα σήματα που μας ενδιαφέρουν είναι διακριτού χρόνου, δηλ. ορίζονται μόνο σε ακέραιες χρονικές στιγμές (φυσικά και τα σήματα ήχου, φωνής, εγκεφάλου, και καρδιάς είναι και αυτά διακριτού χρόνου όταν τα επεξεργαζόμαστε στον Η/Υ. Από τη φύση τους όμως είναι συνεχή στο χρόνο - πρακτικά, κάθε σήμα επεξεργάσιμο σε Η/Υ αποτελεί μια χρονοσειρά). Συχνά αυτά τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας. Για παράδειγμα, τέτοια σήματα είναι οι ημερήσιες κινήσεις των μετοχών, ο ετήσιος πληθυσμός μιας χώρας, οι επιβάτες αεροπορικών εταιριών ανά έτος, και άλλα. Αυτού του είδους τα σήματα, που συνήθως αποκαλούνται *χρονοσειρές*, εμφανίζονται συχνά στα οικονομικά, στις φυσικές επιστήμες, στις κοινωνικές επιστήμες, στη μηχανική, στην ιατρική, και σε πολλά άλλα πεδία. Υπάρχουν πολλοί λόγοι που η ανάλυση χρονοσειρών είναι σημαντική. Σε μερικές εφαρμογές, προκύπτει η ανάγκη ανάπτυξης ενός μοντέλου για τον προσδιορισμό της φύσης της εξάρτησης των δεδομένων από μια ανεξάρτητη μεταβλητή, και η χρήση αυτού του μοντέλου για μελλοντικές προβλέψεις. Για παράδειγμα, στον επιχειρηματικό σχεδιασμό οι προβλέψεις πωλήσεων είναι απαραίτητες. Κάποιου είδους χρονοσειρές έχουν περιοδικές συνιστώσες και είναι σημαντικό να μπορούμε να εξάγουμε αυτές τις συνιστώσες. Η μελέτη των ηλιακών κηλίδων είναι, για παράδειγμα, σημαντική για την πρόβλεψη των κλιματικών αλλαγών. Ένα θεμελιώδες στοιχείο

[3] http://soundcloud.com/choc29/vuvuzela-correction-with-matlab

στην ανάλυση χρονοσειρών είναι ότι τα δεδομένα χρονοσειρών είναι θορυβώδη και η αναπαράστασή τους απαιτεί μοντέλα που είναι βασισμένα σε στατιστικές ιδιότητες. Μερικά καλά εισαγωγικά άρθρα και συγγράμματα είναι τα [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37].

## Σήματα Εικόνας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η εικόνα είναι ένα δισδιάστατο σήμα, του οποίου η ένταση σε κάθε σημείο είναι μια συνάρτηση δυο χωρικών μεταβλητών. Παραδείγματα αποτελούν η φωτογραφία, η ακίνητη εικόνα βίντεο, εικόνες από ραντάρ και σόναρ, καθώς και ακτινογραφίες στήθους ή οδοντοστοιχείας. Μια ακολουθία εικόνων, όπως αυτές που βλέπετε στην τηλεόραση, είναι ουσιαστικά ένα τρισδιάστατο σήμα για το οποίο η ένταση της εικόνας σε κάθε σημείο είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών: δυο χωρικών μεταβλητών, και μια τρίτης - του χρόνου.
Τα βασικά προβλήματα στην Επεξεργασία Εικόνας είναι η Αναπαράσταση και Μοντελοποίηση σήματος εικόνας (Image Signal Representation and Modeling), η Βελτίωση Εικόνας (Image Enhancement), η Ανακατασκευή Εικόνας από προβολές (Image Reconstruction from projections), η Αποκατάσταση Εικόνας (Image Restoration), η Ανάλυση Εικόνας (Image Analysis), και η Κωδικοποίηση Εικόνας (Image Coding). Κάθε στοιχείο μιας εικόνας αναπαριστά μια φυσική ποσότητα - ο χαρακτηρισμός του στοιχείου λέγεται *αναπαράσταση εικόνας*. Για παράδειγμα, μια φωτογραφία αναπαριστά τη φωτεινότητα ενός αντικειμένου όπως αυτό φαίνεται στην κάμερα. Μια εικόνα υπερύθρων παρμένη από δορυφόρο ή αεροπλάνο αναπαριστά τη θερμοκρασία μιας τοποθεσίας. Ανάλογα του είδους της εικόνας και των εφαρμογών της, διάφορα μοντέλα εικόνας ορίζονται. Τέτοια μοντέλα βασίζονται επίσης στην αντίληψη, και σε τοπικά ή καθολικά χαρακτηριστικά. Η φύση και η απόδοση των αλγορίθμων επεξεργασίας εικόνας εξαρτώνται από το μοντέλο εικόνας που χρησιμοποιείται. Αλγόριθμοι *Βελτίωσης Εικόνας* χρησιμοποιούνται για να τονίσουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της εικόνας, για να βελτιώσουν την ποιότητα της εικόνας, ή για βοηθήσουν στην ανάλυση της εικόνας για περαιτέρω εξαγωγή χαρακτηριστικών. Αυτοί περιλαμβάνουν μεθόδους για βελτίωση αντίθεσης, ανίχνευση ακμών, ''ακόνισμα'', γραμμικό και μη γραμμικό φιλτράρισμα, μεγέθυνση, και αφαίρεση θορύβου. Ένας πολύ απλός αλγόριθμος, που στηρίζεται στο median filter, και μπορεί να αφαιρέσει θόρυβο τύπου ''αλατιού και πιπεριού'' (salt and pepper noise) φαίνεται στο Σχήμα 4. Μπορείτε να κρίνετε οι ίδιοι την απόδοσή του. ☺Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για εξουδετέρωση ή μείωση υποβάθμισης της εικόνας, όπως το θόλωμα (blurring) ή η διαταραχή λόγω του περιβάλλοντος ή του συστήματος καταγραφής, είναι γνωστοί ως *Αποκατάσταση Εικόνας*. Η *Ανακατασκευή Εικόνας από προβολές* αφορά την κατασκευή μιας δισδιάστατης εικόνας - ''φέτας'' από ένα τρισδιάστατο αντικείμενο, λαμβάνοντας υπόψη έναν αριθμό από προβολές που προέρχονται από διαφορετικές γωνίες. Κατασκευάζοντας έναν αριθμό από συνεχόμενες ''φέτες'', μπορεί να δημιουργηθεί μια τρισδιάστατη εικόνα που δείχνει το περιεχόμενο του αντικειμένου. Η *Ανάλυση Εικόνας* αναλαμβάνει να αναπτύξει μια ποσοτική περιγραφή και ταξινόμιση ενός ή περισσοτέρων αντικειμένων σε μια εικόνα. Η *Κωδικοποίηση Εικόνας* αναλαμβάνει να μειώσει τον συνολικό αριθμό από bits σε μια εικόνα, χωρίς καμιά υποβάθμιση στην ποιότητά της [4]. Μερικά πολύ καλά εισαγωγικά συγγράμματα για το θέμα είναι τα [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44].




Σχήμα 4: *Αφαίρεση θορύβου (πριν και μετά).*

[4] Η φωτογραφία στο Σχήμα 4 λήφθηκε το Νοέμβρη του 1972, και έκτοτε δημοσιεύεται τακτικά σε επιστημονικά papers, ως εικόνα πάνω στην οποία εφαρμόζονται διάφοροι αλγόριθμοι, ενώ υπάρχει σε όλα τα κλασικά βιβλία Επεξεργασίας Εικόνας, για τον ίδιο λόγο. Το όνομά της κυρίας είναι Lenna. Μια αναζήτηση στο Google σχετικά με *Lenna Story* θα σας οδηγήσει σε ένα μικρό, ενδιαφέρον παρασκήνιο σχετικά με την προέλευσή της... ☺

## Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα

Από τις σημαντικότερες εφαρμογές της Επεξεργασίας Σήματος. Η βάση των τηλεπικοινωνιών, στο χαμηλότερο επίπεδο στηρίζεται πραγματικά σε όσα θα διαβάσετε παρακάτω, ειδικότερα οι αναλογικές επικοινωνίες. Σίγουρα έχετε ακούσει για τη ραδιοφωνία AM και FM. Δείτε πόσο απλή είναι η θεωρία πίσω από αυτούς τους τρόπους μετάδοσης.

Κατ΄ αρχάς να ειπωθεί ότι τα αρχικά AM και FM προέρχονται από τις λέξεις Amplitude Modulation-Διαμόρφωση Πλάτους, και Frequency Modulation-Διαμόρφωση Συχνότητας. Έστω $m(t)$ το σήμα πληροφορίας που θέλουμε να στείλουμε. Η μαθηματική αναπαράσταση – δεν ήθελα να γράψω μαθηματικά σε αυτό το εισαγωγικό κείμενο, αλλά ο πειρασμός είναι μεγάλος ☺– των δυο αυτών τρόπων μετάδοσης, δηλ. το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης (το ραδιόφωνό σας, εν προκειμένω), δίνεται ως:

$$y_{AM} = (1 + k_{AM} m(t)) \cos(2\pi f_c t)$$
$$y_{FM} = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_{PM} \int m(u) du\right)$$

Μπορείτε να αγνοήσετε για την ώρα τις σταθερές $k_{AM}, k_{PM}$, και τη συχνότητα $f_c$. Αυτό που αξίζει να δείτε είναι ότι το μήνυμα $m(t)$ στην πρώτη περίπτωση (AM) ''αποθηκεύεται'' στο πλάτος του συνημιτόνου, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (FM) ''αποθηκεύεται'' στη φάση του συνημιτόνου. Όταν λοιπόν ρυθμίζετε το κουμπί στο ραδιόφωνό σας, ουσιαστικά προσπαθείτε να το συντονίσετε στη συχνότητα $f_c$ που βλέπετε παραπάνω.
Η όλη τηλεπικοινωνιακή διαδικασία είναι αρκετά περίπλοκη στην πράξη. Ας δούμε ένα απλό, αναλογικό (όχι ψηφιακό) παράδειγμα εδώ, για να αποκαλυφθεί πού ακριβώς βοηθά η Επεξεργασία Σήματος στην όλη διαδικασία. Ας υποθέσουμε ότι κάνουμε μια κλήση από το κινητό μας τηλέφωνο σε ένα σταθερό τηλέφωνο. Η ανθρώπινη φωνή είναι αναλογικό και συνεχούς χρόνου σήμα (μη σας προβληματίζει προς το παρόν ο ακριβής ορισμός των λέξεων), οπότε πρέπει πρώτα να μετατραπεί σε ψηφιακή μορφή απ΄ το κινητό τηλέφωνο, να γίνει μια επεξεργασία (κωδικοποίηση), και μετά θα σταλεί από τον πομπό ένα *αναλογικό*, ηλεκτρομαγνητικό σήμα στην την κεραία εκπομπής του. [5] Το ραδιοκύμα θα ταξιδέψει μέσω του αέρα στο σταθμό βάσης, όπου και αποδιαμορφώνεται για να ανακτηθεί το σήμα φωνής (ή οποιοδήποτε σήμα στέλνουμε, εικόνα, βίντεο, κλπ - τα μοντέρνα κινητά έχουν αυτή τη δυνατότητα). Η κλήση, ως ψηφιακό σήμα, συνεχίζει να ταξιδεύει μέσα από ένα διακόπτη ηλεκτρικών σημάτων και μπαίνει ως είσοδος σε μια οπτική ίνα ως *αναλογικό σήμα φωτός*. Το κύμα ταξιδεύει τώρα μέσα στο δίκτυο και η διαδικασία αντιστρέφεται μέχρι να παραχθεί ο αναλογικός ήχος στο ακουστικό του δέκτη. Τα συστήματα επικοινωνιών είναι αρκετά πιο περίπλοκα στην πράξη, όπως είπαμε. Παράγοντες όπως η εξασθένιση του σήματος, ο θόρυβος του καναλιού μετάδοσης/επικοινωνίας, το είδος του καναλιού, και άλλοι, παίζουν σημαντικό ρόλο στην ευρωστία της επικοινωνίας. Όλα αυτά έχουν μελετηθεί και μοντελοποιηθεί κατάλληλα, έτσι ώστε κάθε επικοινωνία να μπορεί να προσομοιωθεί σε Η/Υ προτού εφαρμοστεί. Τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα έχουν μακρά ιστορία και η σχετική βιβλιογραφία είναι εκτενής. Προτείνουμε ως εισαγωγή τα [45], [46], [47], [48], [49], [50].

## Η επεξεργασία σήματος στη νέα χιλιετία

Πέρα από τους παραπάνω τομείς που η επεξεργασία σήματος ανθοφορεί και καθοδηγεί τις εξελίξεις, η σύγκλιση πολλών διαφορετικών τομέων όπως η Βιολογία, η Στατιστική, η Ιατρική, η Τεχνητή Νοημοσύνη, κλπ. δημιούργησε νέες ανάγκες και τομείς οι οποίοι κυριαρχούν στις μέρες μας. Ο διεθνής επιστημονικός σύλλογος για την επεξεργασία σήματος, η περίφημη Signal Processing Society[6], θέτει ως αναδυόμενους τομείς του ενδιαφέροντός των μελών της (πέραν από τους προαναφερόμενους) τους ακόλουθους:

(α΄) Τεχνητή νοημοσύνη: σίγουρα έχετε ακουστά για τεχνολογίες τεχνητής νοημοσύνης που μπορούν να προβλέψουν καταστάσεις, να εκπαιδεύσουν αλγορίθμους που επικοινωνούν με τους χρήστες σε φυσική γλώσσα, να διαγνώσουν σοβαρές ασθένειες, και να αναλύσουν χρηματιστηριακές αγορές. Η τεχνητή νοημοσύνη δεν συμπορεύτηκε εξ΄ αρχής με την επεξεργασία σήματος - η άνθηση του τομέα της Μηχανικής Μάθησης (Machine Learning) σε συνδυασμό με την εξέλιξη του υλικού και του λογισμικού των υπολογιστών, πρόσφερε πολλές, σημαντικές από κοινού εφαρμογές που τάραξαν τα νερά και θόλωσαν αρκετά τη διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δυο επιστημών. Η Μηχανική Μάθηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη σύγκλιση της επιστήμης των υπολογιστών και της στατιστικής με σκοπό τη δημιουργία ισχυρής ικανότητας εκμάθησης και πρόβλεψης σε πολλά τεχνολογικά προβλήματα, όπως η αναγνώριση και η σύνθεση ομιλίας. Στα δυο τελευταία, υπάρχει τεράστια πρόοδος τα τελευταία χρόνια λόγω της σύγκλισης της επεξεργασίας σήματος φωνής και της Βαθιάς

[5] Ναι, καλά (ίσως) το μαντέψατε: ένα αναλογικό ή ψηφιακό σήμα μπορεί να μεταδοθεί με αναλογικά ή ψηφιακά μέσα. Δεν υπάρχει κάποια δέσμευση του ενός απέναντι στο άλλο.

[6] https://signalprocessingsociety.org/

Μάθησης (Deep Learning), ένα πολύ σύγχρονο κλάδο της Μηχανικής Μάθησης που βασίζεται τόσο στην πληθώρα δεδομένων φωνής στην εποχή μας όσο και στην αύξηση της υπολογιστικής ισχύος των καρτών γραφικών (GPUs). Η μεγαλύτερη πρόκληση της Τεχνητής Νοημοσύνης είναι η κατάκτηση της περίφημης *γενικής νοημοσύνης*, και πιθανή επιτυχία θα πρόκειται για το μεγαλύτερο ανθρώπινο επίτευγμα από καταβολής του είδους μας. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να ανατρέξει στα [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60].

(β′) Ακουστικά βοηθήματα: σε αυτά, η επεξεργασία σήματος συμμετέχει στη συλλογή των ήχων από το περιβάλλον και στην επεξεργασία τους (βελτίωση, καταληπτότητα) πριν φτάσουν στο αυτί του φέροντα το ακουστικό. Όσο προχωρά η τεχνολογία των υλικών και των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, τόσο περισσότερος χώρος προκύπτει για εξελιγμένους αλγορίθμους επεξεργασίας σήματος που επιτρέπουν στον ακροατή να ακούει καθαρότερα. Στο μέλλον, θα μας συναρπάσουν τεχνολογίες όπως η εμφύτευση του ακουστικού βοηθήματος μέσα (!) στο αυτί μας και η επικοινωνία τους με τις έξυπνες συσκευές μας. Επίσης, όσο οι τεχνολογίες αυτές γίνονται όλο και πιο εύρωστες, θα μας απασχολήσουν και προβλήματα που δε σχετίζονται με το γλωσσικό περιεχόμενο του μηνύματος που θέλουμε να φτάσει στο ακουστικό αλλά με το *συναισθηματικό* του περιεχόμενο ή με άλλα γλωσσολογικά στοιχεία. Η σχετική βιβλιογραφία σε συγγράμματα είναι περιορισμένη [61], [62], [63], [64], αλλά υπάρχουν αρκετά ενδιαφέροντα κεφάλαια σε βιβλία ή άρθρα [65], [66], [67], [68].

(γ′) Αυτόνομη οδήγηση: σε πολλές κινηματογραφικές ταινίες επιστημονικής φαντασίας έχετε δει αυτοκίνητα να οδηγούν μόνα τους ενώ οι επιβάτες απολαμβάνουν τη διαδρομή, πίνοντας ένα φλιτζάνι καφέ ή διαβάζοντας ένα βιβλίο. Για να γίνει πραγματικότητα μια τέτοια τεχνολογία (που ήδη υπάρχει σε ένα αρκετά προχωρημένο στάδιο) χρειάζεται η βοήθεια της επεξεργασίας σήματος στην απόφαση για το αν το αυτοκίνητο θα ξεκινήσει ή όχι, για να αποφύγει μια σύγκρουση, ή για να ανιχνεύσει τις καιρικές συνθήκες και να προσαρμόσει κατάλληλα την πορεία του. Η αυτόνομη πλοήγηση οχημάτων είναι αρκετά πρόσφατη, οπότε τα σχετικά συγγράμματα είναι περιορισμένα [69], [70], [71], [72], [73], [74].

(δ′) Επιστήμη των δεδομένων: στην εποχή της έκρηξης του διαδικτύου, με κάθε ανάρτηση σε κάποιο μέσο κοινωνικής δικτύωσης και με κάθε αναζήτησή σας σε μια δημοφιλή μηχανή αναζήτησης, προσθέτετε μια μικρή συνεισφορά σε αυτό που ονομάζουμε ''Μεγάλα Δεδομένα'' (Big Data), προφανώς αναφερόμενοι στον όγκο τους. Η επιστήμη των μεγάλων δεδομένων είναι μια ταχέως αναδυόμενη επιστήμη, ως πρόσφατο τέκνο των εξελίξεων στους τομείς της αποθήκευσης δεδομένων και της μεταφοράς πληροφορίας με μεγάλες ταχύτητες. Όμως, τα μεγάλα δεδομένα έχουν το εξής πρόβλημα: είναι δύσκολα διαχειρίσιμα, με την έννοια της διαχείρησης να αναφέρεται στην επεξεργασία τους και στην ανάκτηση χρήσιμων πληροφοριών (data mining, όπως τιτλοφορείται ο σχετικός τομέας) από αυτά. Για παράδειγμα, πολλές εταιρίες χρησιμοποιούν τα δεδομένα που αναρτάτε ή αναζητείτε στο διαδίκτυο για να προβλέψουν τη συμπεριφορά σας και να μάθουν τις συνήθειές σας, έτσι ώστε να σας προσφέρουν περισσότερο εξατομικευμένες υπηρεσίες. Ποιό είναι το κλειδί λοιπόν πίσω από αυτές τις λειτουργίες; Φυσικά η επεξεργασία σήματος! Το νέο επιστημονικό πεδίο των Big Data έχει αποτυπωθεί σε μερικά ενδιαφέροντα συγγράμματα [75], [76], [77], [78], [79],[80].

(ε′) Ένδυση: όσο περίεργο κι αν σας φαίνεται, η τεχνολογική αγορά της ενδυμασίας γίνεται όλο και περισσότερο δημοφιλής. Η παρουσία αισθητήρων μέσα στο ρουχισμό σας μπορεί να σας δώσει πολύτιμες πληροφορίες για τη φυσική σας κατάσταση ή για την τοποθεσία που βρίσκεστε. Η επεξεργασία σήματος βοηθά στη συλλογή, επεξεργασία, και επικοινωνία της πληροφορίας των αισθητήρων με πολλούς τρόπους. Γνωρίζετε ήδη τον αισθητήρα που τοποθετείτε επάνω σας όταν ασκείστε σε ένα διάδρομο γυμναστικής, σκεφτείτε έναν παρόμοιο αισθητήρα που βρίσκεται μόνιμα στα ρούχα και μεταδίδει χρήσιμες πληροφορίες για την κατάσταση της καρδιάς ενός αγαπημένου σας προσώπου στον οικογενειακό γιατρό σας! Σχετικές πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στα [81], [82], [83], [84], [85].

## Κλείνοντας...

Η Επεξεργασία Σήματος και οι τεχνικές της έχουν ήδη προκαλέσει επαναστατικές προόδους στα πεδία εφαρμογών που μόλις γνωρίσαμε. Μια παρόμοια επίδραση μπορεί κανείς να αναμένει και σε άλλους τομείς. Πράγματι, η Επεξεργασία Σήματος ήταν, είναι, και θα είναι ένας τομέας που ευδοκιμεί σε νέες εφαρμογές. Οι ανάγκες ενός νέου πεδίου εφαρμογών μπορούν να καλυφθούν από γνώσεις που προέρχονται από άλλα πεδία, αλλά συχνά οι νέες εφαρμογές χρειάζονται νέους αλγόριθμους και νέα συστήματα υλικού που θα τους υλοποιούν. Για παράδειγμα, παλαιότερα, εφαρμογές της Σεισμολογίας, των Ραντάρ, και των Επικοινωνιών έδωσαν τη βάση για την ανάπτυξη νέων τεχνικών σε διαφορετικούς τομείς. Σίγουρα, η Επεξεργασία Σήματος θα παραμείνει στην καρδιά των εφαρμογών στη διασκέδαση, στις επικοινωνίες, στην ιατρική φροντίδα και διάγνωση, και σε άλλες εφαρμογές.

Αν και είναι δύσκολο να προβλέπει κανείς που θα αναπτυχθεί έδαφος για νέες εφαρμογές, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι θα είναι εμφανείς σε αυτούς/ες που θα είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι/ες να τις αναγνωρίσουν. Το κλειδί

για την ετοιμότητα κάποιου να λύσει νέα προβλήματα επεξεργασίας σήματος είναι - και πάντα ήταν - η σε βάθος κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών της Επεξεργασίας Σήματος.

Αυτός είναι και ο σκοπός αυτού του βιβλίου. Να σας δώσει τους θεμέλιους αυτούς λίθους για να ανακαλύψετε τις ενδιαφέρουσες εφαρμογές στο προσκήνιο της τεχνολογίας! Είναι σίγουρο ότι όλα όσα διαβάσατε σας κάνουν ανυπόμονους να τα δείτε όλα αυτά στην πράξη. Εδώ υπάρχει ένα μάλλον όχι τόσο ευχάριστο νέο για σας, που κράτησα επίτηδες για το τέλος: δε θα δείτε σχεδόν τίποτα από όλα τα παραπάνω στο σύγγραμμα που κρατάτε στα χέρια σας, τουλάχιστον όχι σε όσο βάθος και λεπτομέρεια θα θέλατε, παρά μόνο κάποια από αυτά, επιφανειακά. Το βιβλίο αυτό είναι το πρώτο σκαλοπάτι. Κοιτάζοντάς το, δεν προμηνύει κάτι τρομερά ενδιαφέρον αλλά χωρίς αυτό δε θα μπορέσετε ποτέ να φτάσετε στους ‘‘ορόφους’’ που διαβάσατε παραπάνω. Άλλωστε κάθε ταξίδι ξεκινά με ένα και μόνο βήμα. Καλό ταξίδι λοιπόν στα μονοπάτια της Επεξεργασίας Σήματος!

# Κεφάλαιο 1

# Μαθηματικό Υπόβαθρο

## 1.1 Εισαγωγή

Η μελέτη των σημάτων και των συστημάτων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια βασίζεται κατά κύριο λόγο σε βασικές γνώσεις Απειροστικού Λογισμού και Μιγαδικών Αριθμών. Εν γένει, η θεωρία σημάτων και συστημάτων έχει πολύ ισχυρά μαθηματικά θεμέλια τα οποία εκτείνονται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε μόνο στα απαραίτητα, τα οποία και αποτελούν το αναγκαίο υπόβαθρο για τον αναγνώστη. Ο λόγος της σύντομης αυτής ανασκόπησης έγκειται στο ότι αφ΄ ενός το περισσότερο περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου δεν (πρέπει να) είναι καινούριο στον αναγνώστη που έχει ολοκληρώσει την τριτοβάθμια εκπαίδευση ή που έχει στοιχειώδες υπόβαθρο στον Απειροστικό Λογισμό, αφ΄ ετέρου είναι χρήσιμο να ‘‘φρεσκαριστούν’’ μερικές βασικές μαθηματικές έννοιες οι οποίες ‘‘διαπερνούν’’ ολόκληρο το βιβλίο ως το τέλος του.

## 1.2 Μιγαδικοί Αριθμοί

Θα ξεκινήσουμε με μια μικρή ανασκόπηση στους **μιγαδικούς αριθμούς**. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα σπουδαίο μαθηματικό εργαλείο με εφαρμογές σε πολλές επιστήμες μηχανικού. Παρ΄ όλο που οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπάρχουν πουθενά στη φύση και αποτελούν καθαρά θεωρητικό κατασκεύασμα, έχουν αποδειχθεί πολύτιμοι στην απλοποίηση πραγματικών προβλημάτων.

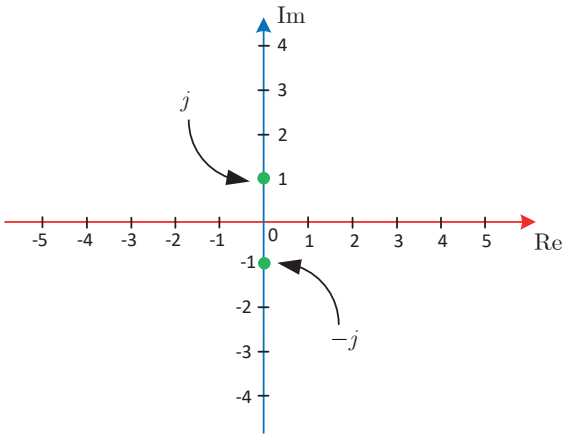
Ο λόγος πίσω από αυτό είναι ότι ενώ ένα πραγματικό πρόβλημα πρέπει να ξεκινά και να τελειώνει με πραγματικούς αριθμούς, η πορεία προς την επίλυση δεν είναι απαραίτητο να περνά μέσα από το ‘‘βασίλειο’’ των πραγματικών αριθμών. Φυσικά κάθε πραγματικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί αποκλειστικά χρησιμοποιώντας πραγματικούς αριθμούς και σχέσεις. Όμως, η χρήση μιγαδικών αριθμών και σχέσεων μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά τη διαδικασία. Άρα, ο μοναδικός πρακτικός λόγος μελέτης των μιγαδικών αριθμών είναι ένας: *γιατί μας διευκολύνουν!*

Ας θέσουμε το εξής πρόβλημα ως κίνητρο: έστω ότι σας ζητείται να βρείτε τη λύση της εξίσωσης

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.1}$$

Αβιάστα θα απαντούσε κανείς ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει πραγματική λύση. Πράγματι, αυτή είναι η σωστή απάντηση. Αν όμως ‘‘χαλαρώσουμε’’ λίγο τη μαθηματική μας αυστηρότητα, μπορούμε να αναρωτηθούμε τι τιμή θα έπρεπε να έχει το $x^2$ ώστε το $x$ να αποτελεί ρίζα της εξίσωσης. Προφανώς θα πρέπει

$$x^2 = -1 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} \tag{1.2}$$




Σχήμα 1.1: *Μιγαδικό επίπεδο.*

Έστω ότι ορίζουμε αυτήν την περίεργη λύση της παραπάνω εξίσωσης ως $j = \sqrt{-1}$. Αν λοιπόν αποδεσμευθούμε από το χώρο των πραγματικών αριθμών, μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο χώρο, αυτό των *μιγαδικών* αριθμών, ο οποίος συμβολίζεται ως $\mathbb{C}$ και στον οποίο λύσεις των εξισώσεων όπως η παραπάνω είναι απόλυτα αποδεκτές! Στο χώρο αυτό, οι αριθμοί δεν αναπαρίστανται επάνω σε

έναν άξονα (όπως στο χώρο των πραγματικών αριθμών) αλλά σε ένα *επίπεδο*. Δείτε το Σχήμα 1.1. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών όπως τον γνωρίζετε (και αναμενόμενα ονομάζεται *πραγματικός άξονας*), ενώ ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται *φανταστικός άξονας*, και αποτελείται από πραγματικά πολλαπλάσια της φανταστικής μονάδας $j$. Προσέξτε όμως ότι η φανταστική μονάδα $j$ δεν αποτελεί μέρος του άξονα, αλλά εμείς πρέπει να καταλαβαίνουμε ότι ο άξονας αυτός αφορά το τμήμα του μιγαδικού αριθμού που σχετίζεται με τη φανταστική μονάδα. Στο ίδιο Σχήμα απεικονίζονται οι μιγαδικοί αριθμοί $\pm j$ που αποτελούν λύσεις της παραπάνω εξίσωσης[1].

Ας γενικεύσουμε το παραπάνω παράδειγμα για ένα πολυώνυμο της μορφής

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \tag{1.3}$$

Οι ρίζες του δίνονται ως

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \tag{1.4}$$

με

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \tag{1.5}$$

Γνωρίζετε ότι αν $\Delta > 0$ το πολυώνυμο έχει δυο διακριτές πραγματικές ρίζες, αν $\Delta = 0$ το πολυώνυμο έχει μια διπλή ρίζα, και αν $\Delta < 0$ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta = -\Delta_+ \tag{1.6}$$

με $\Delta_+ = |\Delta|$, και τότε

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \tag{1.7}$$

$$= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)\Delta_+}}{2\alpha} \tag{1.8}$$

$$= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{\Delta_+}}{2\alpha} \tag{1.9}$$

$$= \frac{-\beta \pm \sqrt{(-1)}\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \tag{1.10}$$

$$= \frac{-\beta \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \tag{1.11}$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

**Παράδειγμα 1.1:**

Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \tag{1.12}$$

Λύση:
Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = (-2)^2 - 20 = 4 - 20 = -16 < 0 \tag{1.13}$$

άρα η εξίσωση δεν έχει λύση για πραγματικά $x$. Όμως, στο χώρο των μιγαδικών αριθμών, έχουμε

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} = \frac{2 \pm j\sqrt{16}}{2} = 1 \pm j2 \tag{1.14}$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $x_{1,2} = 1 \pm j2$.

■

Επιβεβαιώστε κάνοντας πράξεις ότι οι παραπάνω αριθμοί αποτελούν ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

[1] Ακριβέστερα, η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο ονομάζεται *εικόνα* του μιγαδικού αριθμού.

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι ένα εύπλαστο εργαλείο. Μπορούν να πάρουν πολλές μορφές, έχουν αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες και ερμηνείες, γι' αυτό και η χρήση τους στη μηχανική είναι αρκετά διαδεδομένη. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς ως ξεχωριστές ''οντότητες'', χωρίς να συνδέονται απαραίτητα με τη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων. Θα δούμε τις διάφορες μορφές και ιδιότητές τους, τις σχέσεις τους με την τριγωνομετρία, δηλ. με τα γνωστά σας ημίτονα και συνημίτονα, θα γνωρίσουμε τη βασική θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων, και αρκετά άλλα χρήσιμα στοιχεία.

### 1.2.1 Καρτεσιανή μορφή

Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + jy$ αναπαρίσταται στο *μιγαδικό επίπεδο* ως ένα σημείο με συντεταγμένες $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται *καρτεσιανή*. Στο μιγαδικό επίπεδο, ένας μιγαδικός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα με αρχή το $(0, 0)$ και πέρας τις συντεταγμένες του μιγαδικού αριθμού, όπως στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων του Σχήματος 1.2.

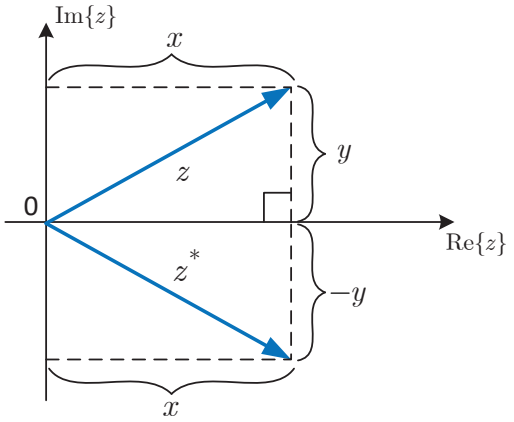
Η τετμημένη $x$ ονομάζεται *πραγματικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού, ενώ η τεταγμένη $y$ ονομάζεται *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού. Είναι πολύ σύνηθες να συμβολίζουμε τα παραπάνω ως

$$\mathrm{Re}\{z\} = x \tag{1.15}$$
$$\mathrm{Im}\{z\} = y \tag{1.16}$$

δηλ.

$$z = x + jy = \mathrm{Re}\{z\} + j\,\mathrm{Im}\{z\} \tag{1.17}$$

Το μήκος του διανύσματος που αναπαριστά το μιγαδικό $z$ ονομάζεται *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται ως $|z|$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο του Σχήματος 1.2 και με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος παρατηρούμε ότι



Σχήμα 1.2: *Ζεύγος συζυγών μιγαδικών* $z, z^*$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.18}$$

Ο *συζυγής* μιγαδικός αριθμός

$$z^* = x - jy \tag{1.19}$$

έχει ίδιο μέτρο, ίδιο πραγματικό μέρος, και αντίθετο φανταστικό μέρος με τον $z$. Δυο τυχαίοι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί $z, z^*$ αναπαρίστανται στο Σχήμα 1.2.

Αν επιστρέψουμε στο εισαγωγικό πρόβλημα της λύσης ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ένα τριώνυμο με *πραγματικούς* συντελεστές και αρνητική διακρίνουσα $\Delta$ έχει πάντα *συζυγείς* ρίζες. Ακόμα γενικότερα, ένα πολυώνυμο $N$ βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει $N$ μιγαδικές (εν γένει) ρίζες, οι οποίες αποτελούνται από ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $x^{100} + 3x^{50} + 10$ έχει 100 ρίζες, και όσες από αυτές είναι μιγαδικές πρέπει απαραίτητα να έρχονται σε συζυγή ζεύγη. Αντίθετα, το πολυώνυμο $jx^2 + x + 1$ έχει δυο *μη*-συζυγείς μιγαδικές ρίζες – επιβεβαιώστε το υπολογίζοντάς τες!

**Παράδειγμα 1.2:**

Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$2z^2 + 8z + k^2 = 0 \tag{1.20}$$

έχει δυο μιγαδικές ρίζες μέτρου 5.

Λύση:
Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι

$$z_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8k^2}}{4} = -2 \pm \frac{\sqrt{64 - 8k^2}}{4} \tag{1.21}$$

Εφ' όσον έχει δυο μιγαδικές ρίζες, η διακρίνουσά του θα είναι αρνητική. Έτσι

$$z_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8k^2}}{4} = \frac{-8 \pm j\sqrt{8k^2 - 64}}{4} = -2 \pm j\frac{\sqrt{8k^2 - 64}}{4} \tag{1.22}$$

Οι ρίζες ικανοποιούν τη σχέση $|z_{1,2}| = 5 \iff |z_{1,2}|^2 = 25$, και από την τελευταία έχουμε

$$|z_{1,2}|^2 = 25 \iff (-2)^2 + \Big(\frac{\sqrt{8k^2 - 64}}{4}\Big)^2 = 25 \tag{1.23}$$

$$4 + \frac{8k^2 - 64}{16} = 25 \iff 8k^2 - 64 = 336 \tag{1.24}$$

$$8k^2 = 400 \iff k^2 = 50 \tag{1.25}$$

Άρα οι τιμές του $k$ που ικανοποιούν την απαίτηση της εκφώνησης είναι οι $k = \pm\sqrt{50}$.

■

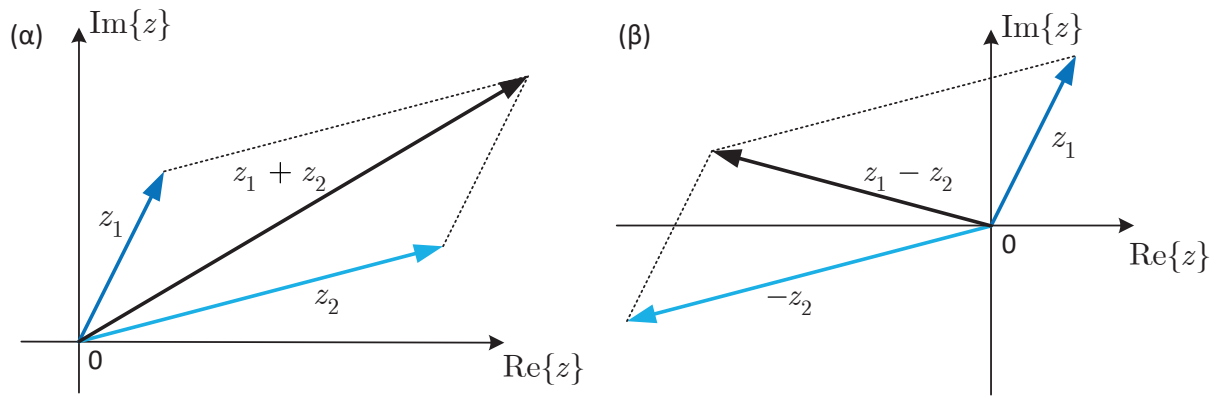
Οι μιγαδικοί αριθμοί διαθέτουν ένα σύνολο από πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1. Η απόδειξή τους είναι καθαρά θέμα πράξεων.

| Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή | |
|---|---|
| **Ιδιότητα** | **Μαθηματική περιγραφή** |
| | $z_1 = x + jy$ |
| | $z_2 = u + jv$ |
| Άθροισμα | $az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$ |
| Διαφορά | $az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$ |
| Πολλαπλασιασμός | $z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$ |
| Διαίρεση | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \Big(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\Big) + j\Big(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\Big)$ |
| Συζυγία | $z_1^* = x - jy$ |
| Άθροισμα συζυγών | $z_1 + z_1^* = 2\,\mathrm{Re}\{z_1\}$ |
| Διαφορά συζυγών | $z_1 - z_1^* = 2j\,\mathrm{Im}\{z_1\}$ |
| Γινόμενο συζυγών | $z_1 z_1^* = \lvert z_1\rvert^2 = x^2 + y^2$ |
| Πηλίκο συζυγών | $\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ |
| Ιδιότητες συζυγίας | $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$<br>$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$<br>$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$<br>$\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$ |
| Αμοιβαιότητα | $\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$ |
| Ισότητα | $z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}\{z_1\} = \mathrm{Re}\{z_2\}$ και $\mathrm{Im}\{z_1\} = \mathrm{Im}\{z_2\}$ |
| $z \in \mathrm{Re}$ | $z = z^*$ |
| $z \in \mathrm{Im}$ | $z = -z^*$ |

Πίνακας 1.1: *Πίνακας ιδιοτήτων των μιγαδικών αριθμών (καρτεσιανή μορφή)*

Μπορείτε να δοκιμάσετε να τις αποδείξετε, για εξάσκηση (Άσκηση 1.6). Είναι σημαντικό να παρατηρήσετε ότι οι βασικές πράξεις του αθροίσματος και της διαφοράς έχουν διαισθητική ερμηνεία υπό την οπτική της διανυσματικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών $z_1$, $z_2$, καθώς ισοδυναμούν με πράξεις μεταξύ διανυσμάτων. Δείτε το Σχήμα 1.3, όπου εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να βρούμε το άθροισμα και τη διαφορά δυο μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο. Πρέπει να μπορείτε να παρατηρήσετε ότι απλά προσθέτουμε γραφικά τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών μεταξύ τους. Επίσης, δείτε τις πράξεις και τις ιδιότητες που σχετίζονται με τη συζυγία και προσπαθήστε να τις αποδείξετε. Θα τις χρησιμοποιήσουμε αρκετά στη συνέχεια.

Αντίθετα, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δε δίνουν ιδιαίτερη διαίσθηση, καθώς το αποτέλεσμα μοιάζει πολύπλοκο να ερμηνευτεί. Σύντομα θα δούμε μια καλύτερη αναπαράσταση και ερμηνεία για αυτές τις




Σχήμα 1.3: *(α) Πρόσθεση και (β) αφαίρεση μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο.*

δυο πράξεις.

Ας δούμε ένα παράδειγμα των παραπάνω.

**Παράδειγμα 1.3:**

Αν $z_1 = 1 + j$ και $z_2 = 1 - j2$, υπολογίστε τους μιγαδικούς

(α′) $z_1^2 z_2$ (β′) $\frac{2j}{z_1} + \frac{1-j}{z_2}$ (γ′) $z_2^4$ (δ′) $\frac{z_1 \operatorname{Re}\{z_1^*\} - z_2^* \operatorname{Im}\{z_2\}}{z_2^* \operatorname{Re}\{z_2\} + z_1 \operatorname{Im}\{z_1^*\}}$

Λύση:

(α′) Έχουμε

$$z_1^2 z_2 = (1+j)^2(1-j2) = (1+2j+j^2)(1-j2) = 2j(1-j2) = 2j - 4j^2 = 2j + 4 = 4 + j2 \tag{1.26}$$

(β′) Θα είναι

$$\frac{2j}{z_1} + \frac{1-j}{z_2} = \frac{2jz_2}{z_1 z_2} + \frac{(1-j)z_1}{z_1 z_2} = \frac{2jz_2 + (1-j)z_1}{z_1 z_2} \tag{1.27}$$

$$= \frac{(2jz_2 + z_1 - jz_1)(z_1 z_2)^*}{z_1 z_2 (z_1 z_2)^*} = \frac{(2jz_2 + z_1 - jz_1) z_1^* z_2^*}{|z_1 z_2|^2} \tag{1.28}$$

$$= \frac{(2j(1-j2) + (1+j) - j(1+j))(1-j)(1+j2)}{10} = \frac{(2j - 4j^2 + 1 - j^2)(3+j)}{10} \tag{1.29}$$

$$= \frac{(2j+6)(3+j)}{10} = \frac{(2j+6))(3+j)}{10} = \frac{6j + 2j^2 + 18 + 6j}{10} \tag{1.30}$$

$$= \frac{8}{5} + j\frac{6}{5} \tag{1.31}$$

(γ′) Είναι

$$z_2^4 = (z_2^2)^2 = \left((1-j2)^2\right)^2 = (1 - 4j + 4j^2)^2 = (-3-4j)^2 = 9 + 24j + 16j^2 = -7 + 24j \tag{1.32}$$

(δ′) Έχουμε

$$\frac{z_1 \operatorname{Re}\{z_1^*\} - z_2^* \operatorname{Im}\{z_2\}}{z_2^* \operatorname{Re}\{z_2\} + z_1 \operatorname{Im}\{z_1^*\}} = \frac{z_1 + 2z_2^*}{z_2^* - z_1} = \frac{1 + j + 1 + j2}{1 + j2 - (1+j)} = 5 - j3 \tag{1.33}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τη σχέση

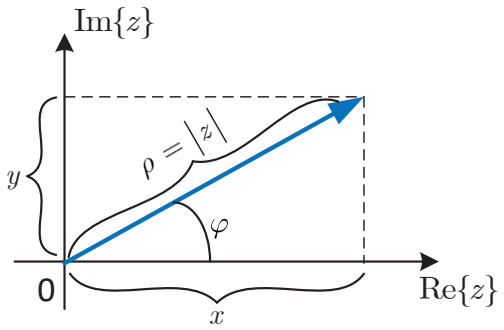
$$\pm j = \mp \frac{1}{j} \tag{1.34}$$

την οποία θα χρησιμοποιούμε συχνά.

### 1.2.2 Πολική μορφή

Μια εναλλακτική - και πιο χρήσιμη - μορφή ενός μιγαδικού αριθμού είναι η περίφημη **πολική μορφή**. Ένας μιγαδικός αριθμός $z$ με συντεταγμένες $(x, y)$ μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα διαφορετικό ζεύγος τιμών, $(\rho, \phi)$, που αναπαριστούν την απόσταση $\rho$ του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων - δηλ. το μέτρο του - και τη γωνία $\phi$ μεταξύ του οριζόντιου άξονα και του διανύσματος που αντιπροσωπεύει το μιγαδικό αριθμό.

Το Σχήμα 1.4 απεικονίζει τις παραμέτρους $\rho$ και $\phi$. Σημειώστε ότι η γωνία $\phi$ ορίζεται κατά την ορθή μαθηματική φορά (αντίθετα της φοράς του ρολογιού).




Σχήμα 1.4: *Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού $z$.*

Από το Σχήμα, είναι εμφανές ότι

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.35}$$

το οποίο έχουμε ήδη ονομάσει *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού $z$. Μερικές χρήσιμες ιδιότητες για το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού είναι οι ακόλουθες.

(α′) $|z| = |z^*| = |-z|$

(β′) $|z|^2 = zz^* = z^*z$

(γ′) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(δ′) $|z^k| = |z|^k$

(ε′) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(ϛ′) Τριγωνική Ανισότητα I: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(ζ′) Τριγωνική Ανισότητα II: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Η γωνία $\phi$, η οποία αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως **φάση**, ορίζεται ως

$$\phi = \sphericalangle z = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0,\ y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, & x = y = 0 \end{cases} \tag{1.36}$$

Η *πρωτεύουσα τιμή* της φάσης $\phi$ ορίζεται πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, όπως παραπάνω, και θα προσπαθούμε να εκφράζουμε κάθε τιμή της φάσης στο διάστημα αυτό. Μερικές σπουδαίες ιδιότητες της φάσης είναι οι ακόλουθες.

(α′) $\phi_{z_1 z_2} = \phi_{z_1} + \phi_{z_2}$

(β′) $\phi_{z_1^k} = k\phi_{z_1}$

(γ′) $\phi_{z_1/z_2} = \phi_{z_1} - \phi_{z_2}$