ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μεταξύ όλων των μαθηματικών κλάδων, η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι η πιο σημαντική... Παρέχει την εξήγηση όλων εκείνων των στοιχειωδών εκδηλώσεων της φύσης που περιλαμβάνουν χρόνο.

S. Lie

Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι η φυσική επιστήμη που μελετάται με μαθηματικά εργαλεία.

V.I. Arnold

Τα αποφθεγματα αυτά των μεγάλων μαθηματικών Sophus Lie και Vladimir Igorevich Arnold είναι χαρακτηριστικά όχι μόνο για την ἐκ τῶν ὦν οὐκ ἄνευ ενδομαθηματική σπουδαιότητα και ευρύτητα των εφαρμογών των διαφορικών εξισώσεων, αλλά αναφέρονται και στους τρεις βασικούς πυλώνες τους: θεωρία, επίλυση, μοντελοποίηση.

Σε αυτούς τους τρεις άξονες κινείται και το παρόν σύγγραμμα, για *Συνήθεις* Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ). Το σύγγραμμα αυτό προέκυψε μετά από πολύχρονη διδακτική και ερευνητική ενασχόληση και εμπειρία των συγγραφέων με τις διαφορικές εξισώσεις και, φυσικά, αντανακλά την προσωπική τους οπτική και προσέγγιση στο εν λόγω αντικείμενο. Αναπόφευκτα, αυτό συνεπάγεται την επιλογή και ανάπτυξη της ύλης, που φιλοδοξεί να είναι χρήσιμη σε πολλά και διαφορετικά ακροατήρια.

Συγκεκριμένα, με κατάλληλη επιλογή "κλασικής" ύλης, που περιέχεται στα Κεφάλαια 2 (Βαθμωτές ΣΔΕ Πρώτης Τάξης), 3 (Καλή Τοποθέτηση του Προβλήματος Αρχικών Τιμών), 4 (Ποιοτική Θεωρία για Βαθμωτές ΣΔΕ Πρώτης Τάξης), 5 (Γραμμικές ΣΔΕ Δεύτερης Τάξης), 6 (Η Μέθοδος των Δυναμοσειρών), 8 (Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, Θεωρία Sturm και Προβλήματα Sturm–Liouville), 9 (Συστήματα Γραμμικών ΣΔΕ Πρώτης Τάξης), 10 (Γραμμικές ΣΔΕ Ανώτερης Τάξης), 11 (Μετασχηματισμός Laplace), 12 (Ποιοτική Θεωρία για Συστήματα ΣΔΕ), το σύγγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα βασικό προπτυχιακό εξαμηνιαίο μάθημα ΣΔΕ, είτε για ένα δεύτερο προπτυχιακό εξαμηνιαίο μάθημα ΣΔΕ, είτε για ένα μεταπτυχιακό μάθημα ΣΔΕ ή/και Δυναμικών Συστημάτων, σε Τμήματα Μαθηματικών, Φυσικής, Πληροφορικής, Επιστημών Μηχανικού και Οικονομικών Σπουδών.

Πέραν της "κλασικής" ύλης που περιέχεται στα προαναφερθέντα κεφάλαια, περιλαμβάνεται επίσης ένα κεφάλαιο (Κεφ. 7) με συνοπτικά στοιχεία της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων Painlevé και της ολοκληρωσιμότητας: η συμπερίληψη ενός κεφαλαίου για τις εξισώσεις Painlevé σε ένα σύγχρονο σύγγραμμα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων κρίνεται ουσιώδης, καθώς αποτελούν τη φυσική και αναγκαία μετάβαση από τη γραμμική ανάλυση στη μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Ενώ οι κλασικές γραμμικές ΣΔΕ (όπως π.χ. η Bessel ή η Airy) είναι πλήρως κατανοητές μέσω της μεθόδου των δυναμοσειρών και των επεκτάσεών της, οι μη γραμμικές εξισώσεις εισάγουν την έννοια των κινητών ιδιομορφιών – σημείων, δηλαδή, όπου η λύση απειρίζεται και η θέση των οποίων εξαρτάται από τις σταθερές ολοκλήρωσης. Οι έξι εξισώσεις Painlevé κατέχουν κεντρική θέση στη Μαθηματική Φυσική, καθώς είναι οι μοναδικές μη γραμμικές ΣΔΕ δεύτερης τάξης που διαθέτουν την ιδιότητα Painlevé, στερούμενες κινητών κρίσιμων σημείων όπως κλαδικά σημεία ή ουσιώδεις ιδιομορφίες. Η διδακτική αξία αυτού του κεφαλαίου ενισχύεται από τη σύνδεσή του με τη μέθοδο Frobenius. Στην κλασική γραμμική θεωρία, η μέθοδος Frobenius επιτρέπει την ανάπτυξη λύσεων σε δυναμοσειρές γύρω από κανονικά ανώμαλα σημεία, της μορφής $w(z) = z^r \Sigma a_n z^n$.

Στην περίπτωση των εξισώσεων Painlevé, η τεχνική αυτή γενικεύεται με την αναζήτηση της γενικής λύσης ως σειράς Laurent γύρω από μια κινητή ιδιομορφία z_0: $w(z) = (z - z_0)^{-p} \Sigma c_n (z - z_0)^n$. Η επιτυχής εφαρμογή αυτής της μεθόδου, όπου οι απαραίτητες ελεύθερες παράμετροι εμφανίζονται στους συντελεστές της σειράς, αποτελεί το αυστηρό κριτήριο για το αν μια εξίσωση είναι "ολοκληρώσιμη". Επιπλέον, η σημασία του κεφαλαίου επεκτείνεται και στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) μέσω του λεγόμενου Τεστ Painlevé και της Εικασίας Ablowitz, Ramani, Segur (σύμφωνα με την οποία, κάθε ΜΔΕ που είναι ολοκληρώσιμη μέσω της μεθόδου του Μετασχηματισμού Αντίστροφης Σκέδασης μπορεί να μετατραπεί, μέσω κατάλληλων αναγωγών, σε μία από τις εξισώσεις Painlevé). Έτσι, οι εξισώσεις Painlevé, που συχνά αποκαλούνται "μη γραμμικές ειδικές συναρτήσεις του 21ου αιώνα", προσφέρουν το απαραίτητο υπόβαθρο για την κατανόηση της βαθιάς σύνδεσης μεταξύ αναλυτικής συμπεριφοράς και μαθηματικής ολοκληρωσιμότητας σε πεδία όπως η Στατιστική Μηχανική, η Κβαντική Θεωρία Πεδίου και η Θεωρία Τυχαίων Πινάκων.

Επιπλέον, περιλαμβάνεται ένα κεφάλαιο (Κεφ. 13) με στοιχεία Διαστατικής Ανάλυσης, Κανονικοποίησης και Μεθόδων (Κανονικών και Ιδιόμορφων) Διαταραχών: η συμπερίληψη ενός τέτοιου κεφαλαίου είναι ζωτικής σημασίας, καθώς γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ της ιδεατής μαθηματικής θεωρίας και της πραγματικής φυσικής εφαρμογής. Στην πράξη, η πλειονότητα των εξισώσεων που περιγράφουν φυσικά συστήματα –από την ουράνια μηχανική μέχρι τη δυναμική ρευστών– δεν επιδέχονται ακριβείς λύσεις σε κλειστή μορφή. Οι μέθοδοι διαταραχών παρέχουν το συστηματικό πλαίσιο για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων όταν το πρόβλημα περιέχει μια "μικρή παράμετρο" ε, επιτρέποντας την κατασκευή ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων της μορφής $y(t, \varepsilon) = \Sigma \varepsilon_n y_n(t)$. Το κεφάλαιο αυτό προσφέρει τα απαραίτητα εργαλεία για τη διαχείριση τόσο κανονικών διαταραχών, όπου η λύση μεταβάλλεται ομαλά, όσο και ιδιόμορφων διαταραχών, όπου η παράμετρος ϵ επηρεάζει την τάξη της εξίσωσης. Η μελέτη φαινομένων όπως τα οριακά στρώματα και η χρήση μεθόδων πολλαπλών κλιμάκων είναι αναντικατάστατη, καθώς επιτρέπει την ανάλυση συστημάτων με απότομες μεταβολές ή φαινόμενα που εξελίσσονται σε διαφορετικές κλίμακες χρόνου. Η εισαγωγή αυτών των μεθόδων μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις σε ένα ισχυρό εργαλείο μοντελοποίησης, ικανό να προσφέρει φυσική διαίσθηση εκεί όπου οι αριθμητικές μέθοδοι συχνά αδυνατούν να ερμηνεύσουν την ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος.

Περαιτέρω, περιλαμβάνεται ένα κεφάλαιο (Κεφ. 14) με συνοπτικά στοιχεία της Ιστορίας των ΣΔΕ και ένας κατάλογος με minimal βιογραφικά στοιχεία όλων των επιστημόνων που αναφέρονται στο σύγγραμμα.

Στο σύγγραμμα, όπου κρίνεται αναγκαίο, υπάρχουν αναφορές (όχι πάντα ιδιαίτερα σύντομες) σε έννοιες και αποτελέσματα Πραγματικής και Μιγαδικής Ανάλυσης, καθώς και Θεωρίας Πινάκων. Οι αναφορές αυτές ενισχύουν την αυτονομία του συγγράμματος. Επιπλέον, ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό είναι η πληθώρα λυμένων (και άλυτων) ασκήσεων και προβλημάτων, όπως και η μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων και εφαρμογών που εκτείνονται από εικόνες της καθημερινής ζωής (όπως, λ.χ., αν μια σταγόνα πρόκειται να στάξει ή όχι από μια βρύση) ως θέματα κλασικής και σύγχρονης Φυσικής (Κλασική Μηχανική, Κβαντομηχανική, Θεωρία Landau για αλλαγές φάσης, Κοσμολογία, κ.λπ.), Βιολογίας και Οικολογίας (μοντέλα δυναμικής πληθυσμών που περιγράφουν, λ.χ., την εξάπλωση του κορωνοϊού Covid-19), Οικονομίας, όπως και πολλών άλλων γνωστικών περιοχών (λ.χ., θέματα που σχετίζονται με τη Φυσική μουσικών οργάνων). Η παράθεση αυτών των παραδειγμάτων αναδεικνύει με τον πιο εμφατικό τρόπο την άρρηκτη σύνδεση των ΣΔΕ με διάφορες επιστημονικές περιοχές και, όπως ελπίζουμε, θα κεντρίσει την προσοχή και το ενδιαφέρον του αναγνώστη.

Η διεθνής βιβλιογραφία[1] περί συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι αχανής. Η βιβλιογραφία του παρόντος συγγράμματος αντανακλά τις προτιμήσεις των συγγραφέων του, είναι δε αρκετά εκτεταμένη και περιλαμβάνει (παλαιότερα, κλασικά και νεότερα) συγγράμματα με επίπεδο που κυμαίνεται από εισαγωγικό ως απαιτητικό. Το παρόν σύγγραμμα δεν περιέχει στοιχεία Αριθμητικής Επίλυσης ΣΔΕ, ούτε Στοχαστικών ΣΔΕ, που συνιστούν διακριτές περιοχές.

Η σχέση μεταξύ των Διαφορικών Εξισώσεων (ΣΔΕ) και της Φυσικής χρονολογείται από τη γένεση των ΣΔΕ και παραμένει ισχυρά αμφίδρομη και θεμε-

1. Εκτενής είναι άλλωστε και η βιβλιογραφία στην Ελληνική γλώσσα.

λιώδης. Οι ΣΔΕ δεν είναι απλώς ένα μαθηματικό εργαλείο για τη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων, αλλά συχνά προκύπτουν άμεσα από τις βασικές αρχές της Φυσικής, ενώ ταυτόχρονα η Φυσική εμπνέει και ωθεί την ανάπτυξη νέων θεωριών και μεθόδων επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Έτσι, (α) πολλοί νόμοι της Φυσικής διατυπώνονται μέσω ΣΔΕ: τυπικά παραδείγματα είναι η Νευτώνεια Μηχανική (ο 2ος νόμος του Νεύτωνα είναι μια ΣΔΕ που διέπει την κίνηση σωμάτων), ο Ηλεκτρομαγνητισμός (οι εξισώσεις κίνησης για φορτία σε ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία), η Θερμοδυναμική και η Κβαντομηχανική (ΣΔΕ όπως η χρονο-ανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger), (β) η μελέτη των ΣΔΕ οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση φυσικών συστημάτων, π.χ. ευστάθεια και χαοτική συμπεριφορά (συστήματα όπως το εκκρεμές ή η δυναμική της ατμόσφαιρας μοντελοποιούνται με ΣΔΕ, αποκαλύπτοντας φαινόμενα όπως περιοδικές τροχιές, ελκυστές και χάος), κβαντικές καταστάσεις και τροχιές (η επίλυση της εξίσωσης Schrödinger για φράγματα δυναμικού ή αρμονικούς ταλαντωτές βασίζεται σε τεχνικές επίλυσης ΣΔΕ), (γ) υφίσταται αμφίδρομη επίδραση: θεωρία και εφαρμογές (π.χ. η θεωρία των δυναμικών συστημάτων αναπτύχθηκε για να μελετήσει λύσεις ΣΔΕ που προκύπτουν από φυσικά προβλήματα, ενώ πολλές τεχνικές –όπως οι ασυμπτωτικές μέθοδοι– αναπτύχθηκαν για να αντιμετωπίσουν προβλήματα της Φυσικής.

Οι Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και η Φυσική βρίσκονταν ιστορικά και βρίσκονται σε συνεχή διάλογο: η Φυσική παρέχει προβλήματα που ωθούν την ανάπτυξη νέων μαθηματικών μεθόδων, ενώ οι ΣΔΕ προσφέρουν τη γλώσσα και το πλαίσιο για τη διατύπωση και επίλυση φυσικών θεωριών. Αυτή η αλληλεπίδραση κάνει τις ΣΔΕ έναν απαραίτητο άξονα της μαθηματικής μοντελοποίησης στηΦυσική, ενώ η Φυσική ενισχύει τη βαθύτερη κατανόηση και εφαρμογή των διαφορικών εξισώσεων. Για την ιδιαίτερη βαρύτητα που ολοένα αποκτά η διασύνδεση Μαθηματικών και Βιολογίας, με κύριο μοχλό τις Διαφορικές Εξισώσεις (συνήθεις και μερικές), χαρακτηριστικός είναι ο τίτλος "*Τα Μαθηματικά είναι το επόμενο μικροσκόπιο της Βιολογίας, αλλά καλύτερο. Η Βιολογία είναι η επόμενη Φυσική των Μαθηματικών, αλλά καλύτερη"*, ενός άρθρου για το ευρύ κοινό, του J. E. Cohen, [37]. Συγγράμματα Μαθηματικής Βιολογίας στα οποία παραπέμπονται οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες, είναι, ενδεικτικά, τα [23], [58], [88], [90], [116], [117], [141] και [172].

Οι επιτροπές απονομής των βραβείων Νομπέλ[2] Κοινωνικών Επιστημών ή Οικονομίας, έχουν αναγνωρίσει επανειλημμένα τη σημασία –και σε αυτές τις περιοχές– των Διαφορικών Εξισώσεων, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση δυναμικών οικονομικών φαινομένων, ιδιαίτερα στη χρηματοοικονομική, στη μακροοικονομική και στην κλιματική οικονομία. Συγγράμματα εφαρμογών των Μαθηματικών, ειδικότερα των διαφορικών εξισώσεων και των δυναμικών συστημάτων, στην Οικονομία και τη Χρηματοοικονομική στα οποία παραπέμπονται οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες, είναι, ενδεικτικά, τα [10], [31], [144] και [156] .

Οι διαφορικές εξισώσεις εφαρμόζονται και σε πολλές περιοχές εκτός της Φυσικής, της Βιολογίας και των Οικονομικών. Μερικές επιπλέον περιοχές εφαρμογών τους είναι οι Επιστήμες Μηχανικού, η Χημεία, η Πληροφορική, η Γεωλογία & το Περιβάλλον, οι Κοινωνικές Επιστήμες (π.χ. Δημογραφία και Ψυχολογία), η Ιατρική, οι Καλές Τέχνες & η Αρχιτεκτονική.

Οι διαφορικές εξισώσεις άπτονται επίσης και θεμάτων της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών και της Επιστημολογίας. Τέτοια θεματολογία δεν είναι βέβαια αντικείμενο καθεαυτής της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων, στην παραδοσιακή διδασκαλία τους ή σε οποιουδήποτε επιπέδου τυπική ενασχόληση με αυτές. Εντούτοις, ορισμένα σχετικά θέματα έχουν μεγάλο ενδιαφέρον και αποτελούν κίνητρο σκέψης ή και πιο συστηματικής μελέτης. Σε μη τεχνική διατύπωση, περιλαμβάνουν τα ακόλουθα: (i) Οι ΣΔΕ συχνά εκφράζουν νόμους της φύσης. Αν είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες και ο "φυσικός" νόμος (δηλ. η ΣΔΕ), τότε –σύμφωνα με την αιτιοκρατία (ντετερμινισμό)– το μέλλον είναι καθορισμένο. Αυτή ήταν η άποψη του Laplace: ένα τέλειο πνεύμα θα μπορούσε να προβλέψει τα πάντα. Αλλά η κβαντομηχανική (με τις πιθανοκρατικές της ερμηνείες) αμφισβητεί αυτό το πλαίσιο: η εξίσωση του Schrödinger είναι ντετερμινιστική, αλλά οι λύσεις της (κυματοσυναρτήσεις) ερμηνεύονται πιθανοκρατικά. (ii) Οι ΣΔΕ περιγράφουν τη μεταβολή και όχι

2. Η σωστή προφορά στα Σουηδικά τονίζεται στη λήγουσα και έτσι την αποδίδουμε σε αυτό το σύγγραμμα, αντίθετα με τη συνήθη χρήση στα Ελληνικά και σε άλλες γλώσσες.

την ύπαρξη. (iii) Υπάρχουν οι ΣΔΕ στη φύση, ή είναι κατασκευές που εμείς επιβάλλουμε στη φύση; (iv) Οι ΣΔΕπροϋποθέτουν μια αντίληψη του χρόνου ως συνεχούς και απείρως διαιρετού. (v) Η χρήση ΣΔΕ είναι μορφή μοντελοποίησης και όχι άμεσης γνώσης, δηλαδή συμπεραίνουμε από τα μοντέλα, αλλά τα μοντέλα είναι ιδεατά. Υπάρχει χάσμα ανάμεσα στη μαθηματική μορφή και την εμπειρική πραγματικότητα – ανακύπτουν ερωτήματα για την προσέγγιση, το σφάλμα και την επικύρωση. (vi) Οι ΣΔΕ επιτρέπουν πρόβλεψη – αλλά αυτή εξαρτάται από την ακρίβεια των αρχικών συνθηκών (που συχνά είναι αδύνατον να μετρηθούν με ακρίβεια, ειδικά σε χαοτικά συστήματα) και την υπόθεση ότι το μοντέλο παραμένει έγκυρο σε μελλοντικές συνθήκες. (vii) Δεν έχουν όλες οι ΣΔΕ λύσεις σε κλειστή μορφή, γεγονός που εγείρει ερωτήματα σχετικά με τη φύση της μαθηματικής γνώσης. Μπορεί μια αριθμητική ή ασυμπτωτική λύση να θεωρηθεί ως "γνώση" της λύσης, ή είναι απλώς μια πραγματιστική προσέγγιση; (viii) Μπορούν τα πολύπλοκα συστήματα πάντα να αναλυθούν σε απλούστερες ΣΔΕ (αναγωγισμός), ή οι αναδυόμενες ιδιότητες απαιτούν νέα μαθηματικά πλαίσια (ολισμός); (ix) Γιατί οι ΣΔΕ περιγράφουν με τέτοια ακρίβεια τα φυσικά φαινόμενα; Είναι αυτό μια βαθιά αλήθεια για το σύμπαν, ή μια επιλογή με προκατάληψη της ανθρώπινης μοντελοποίησης; (x) Οι ΣΔΕ μοντελοποιούν τα πάντα, από το κλίμα ως τις επιδημίες. Πώς επιβάλλει η προβλεπτική ικανότητα των ΣΔΕ ηθικές υποχρεώσεις σε επιστήμονες και πολιτικούς;

Τελευταίο, αλλά όχι λιγότερο σημαντικό: θερμές ευχαριστίες οφείλουμε στους ακόλουθους (πολύ παλιούς, λιγότερο παλιούς και νέους) αγαπητούς φίλους, συναδέλφους και συνεργάτες, για τις πολλές χρήσιμες και εποικοδομητικές συζητήσεις που είχαμε σε βάθος χρόνου, όπως και για τις παρατηρήσεις, προτάσεις και βοήθεια που μας προσέφεραν, σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής αυτού του συγγράμματος: *Χριστόδουλο Αθανασιάδη* (Ομότιμο Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ), *Νίκο Αλικάκο* (Ομότιμο Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ), *Χάρη Αποστολάτο* (Καθηγητή στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ), *Νίκο Γιαλελή* (Μεταδιδακτορικό Ερευνητή στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ), *Γιάννη Γιαννούλη* (Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων), *Φώτη Διάκονο* (Καθηγητή στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ), *Πέτρο Ιωάννου* (Ομότιμο Καθηγητή στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ), *Γιάννη Ιωάννου-Σουγλερίδη* (Διδάκτορα του Τμήματος Φυσικής του ΕΚΠΑ και του Le Mans Université), *Γρηγόρη Καλογερόπουλο* (Ομότιμο Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ), *Γεωργία Καραλή* (Αναπληρώτρια Καθηγήτρια στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ), *Νίκο Καραχάλιο* (Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας), *Γιώργο Κουτσοκώστα* (Μεταδιδακτορικό Ερευνητή στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ), *Φοίβο Μαυρόπουλο* (Καθηγητή στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ), *Ηλιάνα Μόσλεϋ* (Μεταπτυχιακή φοιτήτρια στο Elite Master Course Θεωρητικής και Μαθηματικής Φυσικής των Ludwig-Maximilians-Universität München και Technische Universität München), *Βάσω Μπιτσούνη* (Επίκουρη Καθηγήτρια στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών), *Νίκο Στεφάνου* (Καθηγητή στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ), *Θόδωρο Χωρίκη* (Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων) και *Έλενα Ψυχογιού* (Υποψήφια Διδάκτορα στο Τμήμα Φυσικής του ΕΚΠΑ), ιδιαίτερα δε στους *Φάνη Γραμμένο* (Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας) και *Γεράσιμο Μπαρμπάτη* (Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ).

Γιάννης Στρατής Δημήτρης Φραντζεσκάκης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων είναι η μελέτη της Φύσης.
Κάθε εξίσωση κρύβει ένα μυστικό του Σύμπαντος.

HENRI POINCARÉ

Στο εισαγωγικό αυτό Κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες, ορισμούς και ιδέες που χρειάζονται για τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων.

1.1 Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί

Ορισμός 1.1. Μια εξίσωση που περιέχει μία εξαρτημένη μεταβλητή, η οποία εξαρτάται από μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, και παραγώγους της εξαρτημένης μεταβλητής ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ονομάζεται *Διαφορική Εξίσωση* (ΔΕ).

Ορισμός 1.2. Αν στη ΔΕ η εξαρτημένη μεταβλητή εξαρτάται μόνο *Διαφορική Εξίσωση* από μία ανεξάρτητη μεταβλητή τότε έχουμε *Συνήθη Διαφορική Εξίσωση* (ΣΔΕ), ενώ αν εξαρτάται από περισσότερες της μίας ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε έχουμε ΔΕ με μερικές παραγώγους, ή *Μερική Διαφορική Εξίσωση* (ΜΔΕ).

Παράδειγμα 1.1.

(α) Η ΔΕ που περιγράφει τη δυναμική ενός κλασικού αρμονικού ταλαντωτή (λ.χ. ενός σωματιδίου μάζας m προσδεδεμένου σε ελατήριο με σταθερά επαναφοράς k που εκτελεί ταλαντώσεις),

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + ky = 0, \quad \text{ή} \quad y'' + \omega_0^2 y = 0, \quad \text{όπου} \quad \omega_0^2 := \frac{k}{m}, \tag{1.1}$$

είναι μια ΣΔΕ, αφού περιλαμβάνει την άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ (που αναπαριστά την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας), η οποία εξαρτάται μόνο από μία ανεξάρτητη μεταβλητή (τον χρόνο t) και την παράγωγό της $y''(t) \equiv \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)$.

(β) Η ΔΕ που περιγράφει τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στον ελεύθερο χώρο κατά τη διεύθυνση x με την ταχύτητα του φωτός c,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{ή} \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \tag{1.2}$$

είναι μια ΜΔΕ, αφού η άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ (ένταση του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου) εξαρτάται από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές – τον χρόνο t και τη συντεταγμένη x. Στην εν λόγω ΜΔΕ εμπλέκονται οι μερικές παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης, $u_{tt} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ και $u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Ένα *σύστημα ΔΕ* αποτελείται από *περισσότερες της μίας* εξαρτημένες μεταβλητές. Αν αυτές οι εξαρτημένες μεταβλητές εξαρτώνται από μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή τότε έχουμε σύστημα ΣΔΕ, ενώ αν εξαρτώνται από περισσότερες της μίας ανεξάρτητες μεταβλητές τότε έχουμε σύστημα ΜΔΕ.

Παράδειγμα 1.2.

(α) Θέτοντας $y = y_1$ και $y' = y_2$, μπορούμε να γράψουμε τη ΣΔΕ (1.1) στη μορφή του ακόλουθου *συστήματος ΣΔΕ*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

(β) Θέτοντας $u_1 = u_t$, $u_2 = u_x$, και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συμβατότητας $u_{xt} = u_{tx}$ των προηγουμένων εξισώσεων που δίνει $u_{2t} = u_{1x}$, μπορούμε να γράψουμε την ΜΔΕ (1.2) στη μορφή του ακόλουθου *συστήματος ΜΔΕ*

$$\mathbf{u}_t = C\mathbf{u}_x, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Ορισμός 1.3. Τάξη μιας ΔΕ, ή ενός συστήματος ΔΕ, ονομάζεται η τάξη της υψηλότερης τάξης παραγώγου της ζητουμένης συνάρτησης που εμφανίζεται σε μια ΔΕ ή σε ένα σύστημα ΔΕ.

Έτσι, η ΣΔΕ (1.1) είναι 2ης τάξης ενώ η ΜΔΕ (1.2) είναι 2ης τάξης και ως προς t και ως προς x. Αντίστοιχα, το σύστημα ΣΔΕ (1.3) είναι 1ης τάξης ενώ το σύστημα ΜΔΕ (1.4) είναι 1ης τάξης και ως προς t και ως προς x.

Στα επόμενα, θα εστιάσουμε στην περίπτωση των ΣΔΕ. Η γενικότερη μορφή που μπορεί να λάβει μια ΣΔΕ n-οστής τάξης είναι

$$F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.5}$$

όπου η F ορίζεται σε κάποιο χωρίο D του $\mathbb{R}^{n+2}$ και $y^{(n)} \equiv \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}$, για $n \in \mathbb{N}$. Σημειώνεται ότι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, οι συναρτήσεις F και $y(t)$ μπορεί να είναι είτε βαθμωτές (μία ΣΔΕ) είτε διανυσματικές (σύστημα ΣΔΕ).

Ένα βασικό πρόβλημα στις ΣΔΕ είναι η εύρεση λύσης, δηλαδή ο προσδιορισμός κάποιας n-φορές διαφορίσιμης συνάρτησης $y = \varphi(t)$ ορισμένης σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, η οποία να ικανοποιεί ταυτοτικά την (1.5), δηλαδή

$$F\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\right) = 0. \tag{1.6}$$

Είναι προφανές ότι δεν έχουν λύση όλες οι ΣΔΕ, π.χ. η $(y')^2 + y^2 + 1 = 0$ δεν μπορεί να έχει λύση αφού το αριστερό μέλος είναι πάντα θετικό.

Λέμε ότι $\varphi(t) \in C^n(I)$ αν και μόνον αν η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(t) : I \to \mathbb{R}$ υπάρχει και είναι συνεχής για κάθε $t \in I$.

Σε πολλές περιπτώσεις, και σε πολλές εφαρμογές, είναι εφικτό να εκφράζεται η ΣΔΕ στη λεγόμενη "λυμένη" μορφή της, στην οποία η υψηλότερης τάξης παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης εκφράζεται ως προς τις παραγώγους χαμηλότερων τάξεων και της μεταβλητής t. Συγκεκριμένα, αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης *, τότε η (1.5) μπορεί να γραφεί ως

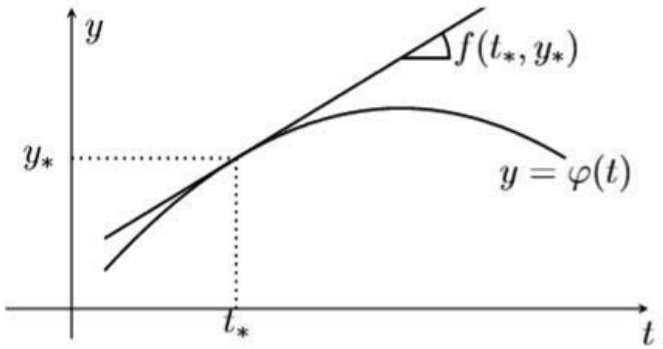
$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{1.7}$$

*Έστω μια εξίσωση της μορφής $Q(x, y, z, \ldots) = 0$, όπου η Q έχει συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους ως προς $x, y, z, \ldots$ Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η εν λόγω εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει οποιαδήποτε από τις μεταβλητές –έστω τη z– ως συνάρτηση των άλλων, δηλαδή $z = q(x, y, \ldots)$, με τη συνάρτηση q να υπάρχει στη γειτονιά κάθε σημείου όπου ισχύει $q = 0$ και $\partial q/\partial z \neq 0$. Η αυστηρή διατύπωση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης όταν η Q είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, δίνεται στο Θεώρημα 3.19.

Έτσι, θεωρώντας την απλούστερη περίπτωση της βαθμωτής ΣΔΕ πρώτης τάξης, η λυμένη της μορφή εκφράζεται ως

$$y' = f(t, y). \tag{1.8}$$

Για την απλή αυτή περίπτωση, είναι χρήσιμο να κάνουμε την εξής παρατήρηση που αφορά τη γεωμετρική ερμηνεία της λύσης. Ας θεωρήσουμε τη λύση της ΣΔΕ (1.8), έστω $y = \varphi(t)$, το γράφημα της οποίας αναπαριστάται ως μια καμπύλη ή οικογένεια καμπυλών, στο επίπεδο ty. Αν η καμπύλη (ή κάποιο μέλος της οικογένειας καμπυλών) διέρχεται από το σημείο (t_*, y_*), όπου $y_* = \varphi(t_*)$, τότε η ΣΔΕ (1.8) δηλώνει ότι η κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημα της λύσης $y = \varphi(t)$ στο (t_*, y_*) είναι $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}|_{t=t_*} = f(t_*, y_*)$. Γενικότερα, σε κάθε σημείο του γραφήματος της λύσης, η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με $f(t, \varphi(t))$ – βλ. Σχ 1.1.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική ερμηνεία της λύσης μιας ΣΔΕ.

Θα ολοκληρώσουμε αυτήν την εισαγωγική ενότητα με την έννοια του Προβλήματος Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) για τη ΣΔΕ 1ης τάξης, που δεν είναι παρά η ΣΔΕ εφοδιασμένη με μια αρχική συνθήκη, δηλαδή

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \tag{1.9}$$

όπου $t_0 \in I$ είναι κάποια δεδομένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής και $y_0 \in \mathbb{R}$ είναι η, επίσης δεδομένη, τιμή της άγνωστης συνάρτησης y για $t = t_0$. Για τη λύση του ΠΑΤ δίνουμε τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 1.4. Ως λύση του ΠΑΤ στο $t_0 \in I$ ορίζεται η $\varphi(t) \in C^1(I)$ που ικανοποιεί στο I και τη ΣΔΕ και την αρχική συνθήκη.

Ορισμός 1.5. Πεδίο ορισμού του ΠΑΤ ονομάζεται το *μέγιστο ανοιχτό διάστημα*, όπου ορίζεται η λύση, και το οποίο περιέχει το t_0.

Παρατήρηση 1.1. Σημαντικά ερωτήματα που αφορούν στην επίλυση ενός ΠΑΤ είναι τα εξής:

(1) Η ύπαρξη λύσης.

(2) Η μοναδικότητα της λύσης.

(3) Η συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα –δηλαδή, το κατά πόσον μικρές μεταβολές στα αρχικά δεδομένα προκαλούν μικρές μεταβολές και στη λύση.

Αν η απάντηση είναι θετική και στα τρία αυτά ερωτήματα, τότε το ΠΑΤ ονομάζεται *καλώς τοποθετημένο*. Η έννοια αυτή εισήχθη από τον Hadamard το 1902. Σημειώνουμε ότι τα αρχικά δεδομένα του ΠΑΤ (1.9) είναι αφενός η συνάρτηση f που καθορίζει τη ΣΔΕ και αφετέρου οι τιμές t_0 και y_0 που καθορίζουν την αρχική συνθήκη.

Παρατήρηση 1.2. (*Γραφική επίλυση - Το πεδίο διευθύνσεων*). Θα περιγράψουμε τώρα μια διαδικασία για τη συστηματική κατασκευή κατά προσέγγιση γραφημάτων λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Υποθέτουμε ότι έχουμε τη ΣΔΕ

$$y' = f(t, y),$$

πιθανώς με κάποια αρχική συνθήκη

$$y(t_0) = y_0,$$

και ότι επιθυμούμε να σχεδιάσουμε μερικές από τις καμπύλες λύσεων για αυτήν τη ΣΔΕ σε κάποια "περιοχή ενδιαφέροντος" στο επίπεδο ty. Προκειμένου να αποφευχθούν ορισμένα, αντιμετωπίσιμα πάντως, περίπλοκα ζητήματα θεωρούμε ότι το ΠΑΤ που καθορίζεται από την πιο πάνω ΣΔΕ και την αρχική συνθήκη έχει μοναδική λύση. Απαιτούμε το $f(t, y)$ να είναι ένας πεπερασμένος αριθμός για κάθε (t, y) στην περιοχή που επιθυμούμε να απεικονίσουμε γραφικά τις λύσεις*.

Σε κάθε σημείο (t, y) του επιπέδου, μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα μικρού μήκους ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου η κλίση δίνεται από την $f(t, y)$. Ονομάζουμε "γραμμή κλίσης", για τη διαφορική εξίσωση στο δεδομένο σημείο, καθένα από αυτά τα μικρού μήκους ευθύγραμμα τμήματα. Τώρα, θεωρούμε οποιαδήποτε καμπύλη που έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε, σε κάθε σημείο (t, y) της, η γραμμή κλίσης εκεί να εφάπτεται στην καμπύλη. Η καμπύλη αυτή είναι η γραφική παράσταση μιας λύσης της διαφορικής μας εξίσωσης και παρατηρούμε ότι τη σχεδιάσαμε χωρίς να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση. Δεν μπορούμε φυσικά να σχεδιάσουμε την γραμμή κλίσης σε κάθε σημείο του επιπέδου. Μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε τις γραμμές κλίσης στα σημεία οποιουδήποτε πεπερασμένου πλέγματος σημείων και στη συνέχεια να σχεδιάσουμε καμπύλες που είναι "παράλληλες" με αυτές τις γραμμές κλίσης – δηλαδή, να σχεδιάσουμε καμπύλες έτσι ώστε, σε κάθε σημείο κάθε καμπύλης, η κλίση της εφαπτομένης να προσεγγίζεται αρκετά καλά από τις κλίσεις των κοντινών γραμμών κλίσης. Κάθε μία από αυτές τις καμπύλες θα προσεγγίζει στη συνέχεια το γράφημα μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης. Αυτές οι καμπύλες μπορεί να μην είναι τέλειες, αλλά, αν είμαστε προσεκτικοί, θα πρέπει να είναι κοντά στα πραγματικά γραφήματα και, κατά συνέπεια, θα μας δώσουν μια καλή εικόνα για το πώς μοιάζουν οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης.

Η γραμμή κλίσης σε κάθε σημείο εφάπτεται στην καμπύλη λύσης που διέρχεται από αυτό το σημείο. Το σύνολο όλων των γραμμών κλίσης σε όλα τα σημεία του πλέγματος ονομάζεται *πεδίο διευθύνσεων* (ή *πεδίο κλίσεων*) της ΣΔΕ.

Το πεδίο διευθύνσεων βρίσκεται συνεπώς ως εξής:

1. Επιλέγουμε ένα πλέγμα σημείων

$$\begin{array}{cccccc} (t_1, y_1), & (t_2, y_1), & (t_3, y_1), & \ldots, & (t_J, y_1), \\ (t_1, y_2), & (t_2, y_2), & (t_3, y_2), & \ldots, & (t_J, y_2), \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (t_1, y_K), & (t_2, y_K), & (t_3, y_K), & \ldots, & (t_J, y_K). \end{array}$$

   Το ποια σημεία επιλέγονται είναι σε μεγάλο βαθμό θέμα κρίσης. Αν το πρόβλημα περιλαμβάνει μια αρχική συνθήκη $y(t_0) = y_0$, τότε το αντίστοιχο σημείο, (t_0, y_0), θα πρέπει να είναι ένα σημείο του πλέγματος. Επιπλέον, το πλέγμα θα πρέπει:

   - να "καλύπτει" την περιοχή στην οποία θέλουμε να σχεδιάσουμε τις λύσεις,
   - να περιέχει αρκετά σημεία έτσι ώστε οι γραμμές κλίσης σε αυτά τα σημεία να δίνουν μια καλή ιδέα για τις καμπύλες που θα σχεδιαστούν.

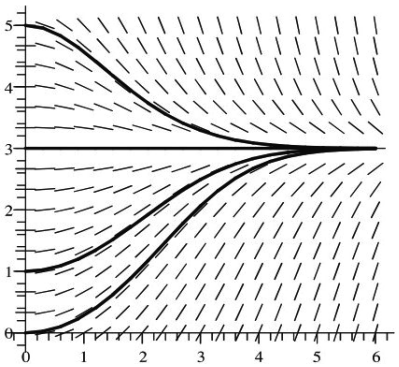
   Αν απαιτηθεί, περισσότερα σημεία μπορούν πάντα να προστεθούν αργότερα.

2. Για κάθε σημείο πλέγματος (t_j, y_k):

*Δεδομένου ότι αποτρέπει σημεία με "άπειρη κλίση", αυτή η απαίτηση διασφαλίζει ότι οι καμπύλες θα είναι "καμπύλες λύσης" με την αυστηρή έννοια του όρου.

- Υπολογίζουμε το $f(t_j, y_k)$.
- Χρησιμοποιώντας την τιμή $f(t_j, y_k)$ που μόλις υπολογίσαμε, σχεδιάζουμε προσεκτικά μια γραμμή κλίσης στο σημείο (t_j, y_k).

Ας δούμε ένα παράδειγμα:



Σχήμα 1.2: Το πεδίο διευθύνσεων (βασισμένο σε ένα πλέγμα 19×16) για τη ΣΔΕ $y' = \frac{1}{16}\, t\left(9 - y^2\right)$ μαζί με τέσσερεις καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί "παράλληλα" με το πεδίο. Παρατηρούμε ότι η $y(t) \equiv 3$ είναι σταθερή λύση της ΣΔΕ.

1.2 Παραδείγματα ΣΔΕ και επίλυσής τους

Για μια πρώτη εξοικείωση με τις ΣΔΕ, στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε παραδείγματα απλών ΣΔΕ 1ης και 2ης τάξης και θα προσδιορίσουμε τις λύσεις τους. Τα παραδείγματα αυτά, πέραν της παρουσίασης κάποιων βασικών μεθόδων επίλυσης, θα μας δώσουν και την ευκαιρία να εισαγάγουμε κάποιες επιπλέον βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στη μελέτη των ΣΔΕ.

Παράδειγμα 1.3. Ανακαλώντας τη λυμένη μορφή (1.8) της ΣΔΕ 1ης τάξης, διαπιστώνει κανείς ότι η πλέον στοιχειώδης ΣΔΕ 1ης τάξης αντιστοιχεί στην περίπτωση

$$y' = f(t), \tag{1.10}$$

που θυμίζει απλά προβλήματα Μηχανικής: αν ένα σωματίδιο μάζας m και στιγμιαίας ταχύτητας $v(t)$ υπόκειται σε μια δύναμη $f(t)$, τότε η κίνησή του περιγράφεται από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή η μεταβολή της ορμής $p = mv$ είναι ίση με τη δύναμη, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = f(t) \Rightarrow mv' = f(t)$. Η λύση της (1.10) είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(t)$,

$$y(t) = \int f(t)\ \mathrm{d}t + C, \tag{1.11}$$

όπου C σταθερά. Αν υποθέσουμε ότι

$$f(t) = t\,\mathrm{e}^t,$$

τότε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε $\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\,\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t - c$, οπότε τελικά η λύση της (1.10) με $f(t) = t\,\mathrm{e}^t$ είναι

$$y(t) = (t-1)\,\mathrm{e}^t + C, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Η πιο πάνω έκφραση είναι η "*γενική λύση*" της εν λόγω εξίσωσης, η οποία περιλαμβάνει μία ελεύθερη παράμετρο, τη σταθερά ολοκλήρωσης C. Αυτό είναι εύλογο: επίλυση μιας ΣΔΕ 1ης τάξης, όπως αυτής του παραδείγματος, προϋποθέτει την ολοκλήρωσή της μία φορά, οπότε η λύση θα περιλαμβάνει μία σταθερά. Όπως θα δούμε πιο κάτω, αν η ΣΔΕ ήταν 2ης τάξης, η λύση της θα βρισκόταν με δύο ολοκληρώσεις, οπότε η γενική λύση της ΣΔΕ 2ης τάξης θα περιλάμβανε δύο ελεύθερες παραμέτρους (τις δύο σταθερές ολοκλήρωσης).

Η *γενική λύση* μιας ΣΔΕ είναι η λύση που περιέχει ένα αριθμό ελευθέρων παραμέτρων (ή αυθαίρετων σταθερών) ίσο με την τάξη της εξίσωσης. Έτσι, η γενική λύση μιας ΣΔΕ n-οστής τάξης θα είναι της μορφής

$$y = y(t, c_1, c_2, \ldots, c_n), \tag{1.12}$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

- Μια *ειδική λύση* προκύπτει από τη γενική λύση όταν πάρουν συγκεκριμένες τιμές όλες οι σταθερές.
- Μια *ιδιάζουσα λύση* είναι μια λύση της ΣΔΕ που δεν προκύπτει από τη γενική λύση για καμία επιλογή σταθερών.

Παράδειγμα 1.4. Θεωρούμε τη ΣΔΕ 1ης τάξης

$$y' = y^a, \quad a \in \mathbb{R},$$

η οποία ανήκει σε μια κατηγορία εξισώσεων, τις ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, που επιλύονται σχετικά εύκολα και τις οποίες θα μελετήσουμε αργότερα. Η επίλυση της συγκεκριμένης αφήνεται για την Άσκηση 2.7 16. Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $a = 1$. Η ΣΔΕ γίνεται $y' = y$, με γενική λύση την $y(t) = c\,\mathrm{e}^t, \quad t \in \mathbb{R}$, όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Δεν υπάρχουν ιδιάζουσες λύσεις.
2. $a \neq 1$.
   - Η γενική λύση είναι $y(t) = ((1-a)(t+c))^{\frac{1}{1-a}}$, όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(-c, \infty)$ αν $a < 1$, ενώ είναι το $(-\infty, -c)$ αν $a > 1$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καμία τιμή της σταθεράς c για την οποία η $y(t)$ μηδενίζεται ταυτοτικά.
   - Η συνάρτηση $y_0(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, είναι προφανώς λύση της ΣΔΕ. Λόγω της πιο πάνω παρατήρησης, η $y_0(t)$ δεν είναι ειδική λύση, αλλά ιδιάζουσα λύση της ΣΔΕ.

Ξεκινώντας και πάλι από την (1.8), μια άλλη απλούστερη μορφή της αντιστοιχεί στην περίπτωση

$$y' = f(y). \tag{1.13}$$

Ορισμός 1.6. Η ΣΔΕ $y' = f(y)$ ονομάζεται *αυτόνομη*. Στην περίπτωση που η συνάρτηση f εξαρτάται και από την ανεξάρτητη μεταβλητή t (δηλ. αν $f = f(t, y)$), η ΣΔΕ $y' = f(t, y)$ ονομάζεται *μη αυτόνομη*.

Παράδειγμα 1.5. (*Το μοντέλο του Malthus*). Στην κατηγορία των αυτόνομων ΣΔΕ εμπίπτει ένα *μοντέλο δυναμικής πληθυσμών*, το λεγόμενο *μοντέλο του Malthus* (1798): αν $N(t)$ είναι ο πληθυσμός ενός είδους στον χρόνο t, τότε ο ρυθμός αύξησης (ή μείωσης) του πληθυσμού είναι ανάλογος του τρέχοντος μεγέθους του, δηλαδή

$$N' = rN, \tag{1.14}$$

όπου η σταθερά αναλογίας r είναι η διαφορά του ρυθμού γεννήσεων από το ρυθμό θανάτων (αν $r > 0$, οι γεννήσεις υπερτερούν των θανάτων και ο πληθυσμός αυξάνεται, ενώ αν $r < 0$, συμβαίνει το αντίθετο). Σημειώνεται ότι ο παγκόσμιος πληθυσμός των ανθρώπων στη γη αυξάνεται περίπου εκθετικά από το 1900 και μετά, σε συμφωνία με το μοντέλο του Malthus, που όπως θα δούμε πιο κάτω, προβλέπει εκθετική αύξηση του N για $r > 0$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η (1.14) έχει την τετριμμένη λύση $N \equiv 0$. Αν $N \neq 0$, τότε εκφράζουμε την (1.14) ως

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r, \tag{1.15}$$

οπότε ολοκληρώνοντας το αριστερό και το δεξιό μέλος ως προς t παίρνουμε

$$\int \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int r\,\mathrm{d}t.$$

Επειδή $N = N(t) \Rightarrow \mathrm{d}N = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$, η πιο πάνω εξίσωση γίνεται

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N} = r\int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|N| = rt + c \Rightarrow |N| = \mathrm{e}^{rt+c} = \mathrm{e}^{c}\,\mathrm{e}^{rt},$$

όπου c είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης και e^c είναι μια θετική σταθερά. Επειδή $N(t) \geq 0$ (αφού η συνάρτηση N αναπαριστά πληθυσμό), καταλήγουμε στην εξής έκφραση για τη λύση της (1.14)

$$N(t) = C\,\mathrm{e}^{rt},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

όπου $C = \mathrm{e}^c$. Σημειώνεται ότι θα κατέληγε κανείς (προφανώς) στο ίδιο αποτέλεσμα, αν παρατηρούσε ότι το αριστερό μέλος της (1.15) γράφεται ως $(\ln N)'$, και εκτελούσε στη συνέχεια τις ολοκληρώσεις, όπως δείχθηκε πιο πάνω.
Η συνάρτηση $N(t)$ στην (1.16), που περιλαμβάνει μια ελεύθερη σταθερά, είναι η *γενική λύση* της (1.14). Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η προαναφερθείσα λύση $N \equiv 0$ (που *δεν* περιλαμβάνει σταθερά ολοκλήρωσης) ενσωματώνεται στη γενική λύση για $C = 0$ και έτσι δεν είναι ιδιάζουσα λύση. Επίσης, σημειώνεται ότι όλες οι λύσεις (1.16) συγκλίνουν στη λύση $N \equiv 0$ για $t \to -\infty$.

Ολοκληρώνοντας το παράδειγμα αυτό, αξίζει να ασχοληθούμε και με την περίπτωση του ΠΑΤ

$$N' = rN, \quad N(t_0) = N_0, \tag{1.17}$$

όπου N_0 είναι η τιμή του πληθυσμού τη χρονική στιγμή $t = t_0$. Η πρόσθετη πληροφορία που δίνεται με την αρχική συνθήκη λειτουργεί ως "κανόνας επιλογής" που θα καθορίσει –από τις άπειρες συναρτήσεις που δίνονται από την (1.16)– τη μία και μοναδική λύση του ΠΑΤ, που βρίσκεται με τον προσδιορισμό της σταθεράς C. Συγκεκριμένα, θέτουμε στην (1.16) $t = t_0$, οπότε $N(t_0) = C\,\mathrm{e}^{t_0}$, και επειδή $N(t_0) = N_0$ (αρχική συνθήκη), παίρνουμε τελικά $C = N_0\,\mathrm{e}^{-rt_0}$. Έτσι, η λύση του ΠΑΤ (1.17) είναι

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{r(t-t_0)},\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.18}$$

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα: με βάση δημογραφικά δεδομένα, το έτος 1961 ο παγκόσμιος ανθρώπινος πληθυσμός ήταν 3.060.000.000 άτομα, ενώ ο μέσος ετήσιος ρυθμός αύξησής του κατά τη δεκαετία του 1960 (δηλ. από το 1961 ως το 1970) ήταν 2%. Έτσι έχουμε

$$N(t) = 306 \cdot 10^7 \cdot \mathrm{e}^{0{,}02\,(t-1961)}. \tag{1.19}$$

Το εκθετικό μοντέλο με $r = 2\%$ δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για ένα μικρό διάστημα γύρω από το 1961, όπως προκύπτει αν συγκρίνουμε το αποτέλεσμα της (1.19), π.χ. για το έτος 1983, με τα τότε πραγματικά δημογραφικά δεδομένα (το μοντέλο δίνει 4,74 δισεκατομμύρια, που είναι πολύ κοντά στην πραγματικότητα). Ωστόσο, το μοντέλο αποτυγχάνει αν απομακρυνθούμε πολύ από αυτή την εποχή. Για παράδειγμα, για το έτος 1750, το μοντέλο προβλέπει μόλις 45 εκατομμύρια κατοίκους, ενώ ο πραγματικός πληθυσμός ήταν περίπου 790 εκατομμύρια. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε χοντρικά, ότι το συγκεκριμένο μοντέλο εκθετικής αύξησης έχει αξιοπιστία ± 30 (το πολύ ± 40) χρόνια περί το $t_0 = 1961$, καθώς ο ρυθμός αύξησης 2% ήταν ιστορικό ρεκόρ και δεν αντιπροσωπεύει άλλες εποχές.

Τι γίνεται όμως εκτός του διαστήματος αξιοπιστίας; Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της Γης είναι περίπου $5{,}1 \cdot 10^{14}$ τετραγωνικά μέτρα, ενώ το ποσοστό κάλυψης από ξηρά είναι περίπου 29%. Αν κάνουμε πρόβλεψη με το μοντέλο εκθετικής αύξησης για το έτος 2222, προκύπτει ότι ο πληθυσμός θα έχει εκτοξευθεί στα 566 δισεκατομμύρια, οπότε θα αντιστοιχούν περίπου 263 τετραγωνικά μέτρα στεριάς ανά άτομο. Ακόμη πιο δραματικά, το έτος 2630 θα αντιστοιχούν μόλις 0,26 τετραγωνικά μέτρα *στεριάς και υδάτων* ανά άτομο!!! Ομοίως, σύμφωνα με το μοντέλο

εκθετικής αύξησης, ο ανθρώπινος πληθυσμός στη Γη το έτος 1300 έπρεπε να ήταν 5550 άτομα, ενώ το 903 (μ.Χ.) έπρεπε να ήταν 2 άτομα – οπότε μάθαμε και πότε εμφανίστηκαν ο Αδάμ και η Εύα! ☺

Δίδαγμα: ακόμα και τα απλοϊκά μοντέλα μπορεί να είναι χρήσιμα, αρκεί να λαμβάνουμε υπόψη μας τα διαστήματα αξιοπιστίας τους!

Παράδειγμα 1.6. (*Σώμα σε ελεύθερη πτώση*). Ας θεωρήσουμε τώρα μια ΣΔΕ 2ης τάξης, πολύ γνωστή από τη Φυσική, που στην πραγματικότητα είναι και η πρώτη διαφορική εξίσωση της Ιστορίας. Η ΣΔΕ αυτή δεν είναι άλλη από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, για ένα σωματίδιο μάζας m που υπόκειται σε μία δύναμη f και, ως εκ τούτου, αποκτά επιτάχυνση $a = v' = y''$ (όπου v και y αναπαριστούν την ταχύτητα και τη θέση του σωματιδίου αντιστοιχα), δηλαδή $ma = f$. Αν τώρα θεωρήσουμε την ελεύθερη πτώση ενός σωματιδίου λόγω βαρύτητας, έχουμε $a \equiv y''$ (όπου $y(t)$ το στιγμιαίο ύψος) και $f = -mg$ (όπου g η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας και το πρόσημο πλην δείχνει την κατεύθυνση της δύναμης προς τον αρνητικό άξονα y), τότε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει $my'' = -mg$, ή

$$y'' = -g. \tag{1.20}$$

Η ΣΔΕ αυτή ολοκληρώνεται σε δύο βήματα: η πρώτη ολοκλήρωση οδηγεί στον προσδιορισμό της ταχύτητας, $y' = -gt + C_1$ (όπου C_1 σταθερά), και η δεύτερη ολοκλήρωση –της ΣΔΕ για την ταχύτητα– προσδιορίζει τη *γενική λύση* της (1.20) για τη στιγμιαία τιμή του ύψους

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.21}$$

όπου C_2 σταθερά. Όπως προαναφέρθηκε, στην παρούσα περίπτωση της ΣΔΕ (1.20) που είναι 2ης τάξης, η γενική λύση περιλαμβάνει δύο αυθαίρετες σταθερές. Οι τελευταίες μπορούν να προσδιοριστούν μονοσήμαντα στην περίπτωση του ΠΑΤ

$$y'' = -g, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0, \tag{1.22}$$

όπου y_0 και v_0 αναπαριστούν το αρχικό ύψος και την αρχική ταχύτητα του σωματιδίου. Πράγματι, προσδιορίζοντας από την (1.21) τα $y(0)$ και $y'(0)$, και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε $C_1 = v_0$ και $C_2 = y_0$. Έτσι, η λύση του ΠΑΤ (1.22) παίρνει τη μορφή

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.23}$$

που είναι γνωστή από την Κλασική Μηχανική.

1.3 Γραμμικές/μη γραμμικές ΣΔΕ – Υπέρθεση

Είναι πολύ σημαντικό για τα επόμενα, να ταξινομήσουμε τις ΣΔΕ (και τα συστήματα ΣΔΕ) σε *γραμμικές* και *μη γραμμικές* σύμφωνα με τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1.7. *Γραμμικές ΣΔΕ* ονομάζονται εκείνες στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) y και όλες οι παράγωγοί της, $y', y'', \ldots$, εμφανίζονται γραμμικά στην εξίσωση (ή στο σύστημα). Αν στην εξίσωση υπάρχει έστω και ένας μη γραμμικός όρος ως προς $y, y', y'', \ldots$ τότε η εξίσωση ονομάζεται *μη γραμμική*.

Για παράδειγμα, από τις πιο κάτω ΣΔΕ,

(α) $\mathrm{e}^t y' + (t^4 + t + 2)\, y = (\cos\frac{\pi}{7})t^{1/4}$,

(β) $t^2 y'' + (\sin^2 t)\, y' + \frac{13}{(t+1)^2} y = 0$,

(γ) $y'' - \frac{3-\mathrm{e}}{5}\, yy' + (\ln t)y = 0$,

(δ) $y''' + 6\,(y')^3 + \mathrm{e}^{-t^2} y^2 = \cot t$,

(ε) $y' + \mathrm{e}^{\sin y} - \frac{\tanh y}{1+y^2} = 0$,

οι (α) και (β) είναι γραμμικές, ενώ οι (γ), (δ) και (ε) είναι μη γραμμικές: η (γ) περιλαμβάνει τον όρο yy', η (δ) τους όρους y^2 και $(y')^3$, ενώ η (ε) τους όρους $\exp(\sin y)$ και $(\tanh y)/(1+y^2)$ που είναι μη γραμμικοί.

Αξίζει στο σημείο αυτό να ασχοληθούμε λίγο περισσότερο με τις γραμμικές ΣΔΕ. Με βάση τα πιο πάνω, η πιο γενική μορφή γραμμικής ΣΔΕ n-οστής τάξης μπορεί να εκφραστεί ως

$$a_0^\star(t) y^{(n)} + a_1^\star(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_n^\star(t) y = b^\star(t), \tag{1.24}$$

όπου οι συντελεστές $a_j^\star(t)$ (με $a_0^\star(t) \neq 0$ και $j = 0, 1, \ldots, n$), όπως και η συνάρτηση $b^\star(t)$, που ορίζονται σε κάποιο διάστημα I, μπορούν να είναι μη γραμμικές συναρτήσεις του t.

Αν $a_j^\star(t) = $ σταθ. για όλα τα $j = 0, 1, \ldots, n$ (αλλά όχι αναγκαστικά και η $b^\star(t)$) τότε λέμε ότι η (1.24) είναι *διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές*.

Αφού $a_0^\star(t) \neq 0$, μπορούμε με την αντικατάσταση $\frac{a_k^\star(t)}{a_0^\star(t)} \mapsto a_k(t), k = 1, 2, \ldots, n$ και $\frac{b^\star(t)}{a_0^\star(t)} \mapsto b(t)$, να γράψουμε την (1.24) στη μορφή

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t) y = b(t). \tag{1.25}$$

Επιπλέον, αν συμβολίσουμε με $L(y)$ τη διαφορική έκφραση του αριστερού μέλους της (1.25), δηλαδή

$$L(y) := y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t) y, \tag{1.26}$$

η ΣΔΕ (1.25) γράφεται συνοπτικά ως

$$L(y) = b(t). \tag{1.27}$$

Ορισμός 1.8. Αν $b(t) = 0$, $\forall t \in I$, τότε η ΣΔΕ $L(y) = 0$ ονομάζεται *ομογενής*. Αν υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $t_* \in I$ τέτοιο ώστε $b_*(t) \neq 0$, τότε η ΣΔΕ $L(y) = b(t)$ ονομάζεται *μη ομογενής*.

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα που έχουν οι *γραμμικές, ομογενείς* ΣΔΕ είναι η *αρχή της υπέρθεσης* (ή *αρχή της επαλληλίας*). Για να εξηγήσουμε την αρχή αυτή, ας θεωρήσουμε το παράδειγμα μιας γραμμικής ομογενούς ΣΔΕ 2ης τάξης, της μορφής

$$L(y) := y'' + a_1(t) y' + a_2(t) y = 0, \tag{1.28}$$

και ας υποθέσουμε ότι οι $y = y_1(t)$ και $y = y_2(t)$ είναι λύσεις της, δηλαδή ότι $L(y_1) = 0$ και $L(y_2) = 0$. Τότε, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, ο *γραμμικός συνδυασμός* των λύσεων $y_1(t)$ και $y_2(t)$,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad c_1, c_2 = \text{σταθ.}, \tag{1.29}$$

είναι επίσης λύση της ΣΔΕ (1.28).
Για την απόδειξη, αντικαθιστούμε την (1.29) στην (1.28) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} L(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_2(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1(y_1'' + a_1(t) y_1' + a_2(t) y_1) + c_2(y_2'' + a_1(t) y_2' + a_2(t) y_2) \\ &= c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν για τις $y_1(t)$ και $y_2(t)$ ισχύει ότι η μία δεν είναι ανάλογη της άλλης*, τότε η έκφραση (1.29) είναι η *γενική λύση* της ΣΔΕ (1.28), αφού περιλαμβάνει δύο ελεύθερες παραμέτρους.

Για την καλύτερη κατανόηση της αρχής της υπέρθεσης, ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

*Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σταθερές $k_1, k_2 \neq 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει $k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$, δηλαδή οι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητες*, όπως θα δούμε με περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 5.

Παράδειγμα 1.7. Να λυθεί η γραμμική ομογενής ΣΔΕ 2ης τάξης

$$y'' - y = 0. \tag{1.30}$$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα λύσεις της (1.30), παρατηρώντας ότι για να λύσουμε τη ΣΔΕ $y'' = y$, αναζητούμε στην πραγματικότητα μια συνάρτηση που να ισούται με τη δεύτερη παράγωγό της. Αν τώρα θυμηθούμε ότι η εκθετική συνάρτηση έχει αυτή την ιδιότητα, μπορούμε να αναζητήσουμε λύση της (1.30) της μορφής

$$y(t) = \mathrm{e}^{rt}, \tag{1.31}$$

όπου r είναι μια άγνωστη σταθερά υπό προσδιορισμό. Εφόσον $y''(t) = r^2\,\mathrm{e}^{rt}$, με αντικατάσταση στην (1.30) βρίσκουμε $(r^2-1)\,\mathrm{e}^{rt} = 0$. Έτσι, αφού $\mathrm{e}^{rt} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, έχουμε $r = \pm 1$, οπότε δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις (αφού δεν είναι η μία ανάλογη της άλλης, όπως σημειώθηκε προηγουμένως) είναι οι

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{t}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, λύση της (1.30) θα είναι και ο γραμμικός συνδυασμός των $y_1(t)$ και $y_2(t)$, δηλαδή

$$y(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t},\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.32}$$

Παρατηρούμε ότι η πιο πάνω λύση περιλαμβάνει δύο ελεύθερες παραμέτρους, τις c_1 και c_2, και δεδομένου ότι η (1.30) είναι 2ης τάξης, η (1.32) είναι η γενική λύση της εξίσωσης.

Στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η αρχή της υπέρθεσης *δεν* ισχύει για μη γραμμικές εξισώσεις. Αυτό φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.8. Έστω η μη γραμμική ΣΔΕ:

$$L(y) = t^3 y'' - y y' = 0, \quad t \neq 0. \tag{1.33}$$

Άμεσα διαπιστώνεται, με αντικατάσταση, ότι οι συναρτήσεις $y_1(t) = t^2$ και $y_2(t) = 1$ είναι μη τετριμμένες λύσεις της (1.33). Ένας γραμμικός συνδυασμός των $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι και το άθροισμά τους, $y_1 + y_2 = t^2 + 1$, για το οποίο έχουμε

$$L(y_1 + y_2) \;\; = \;\; t^3(t^2+1)'' - (t^2+1)(t^2+1)' = -2t \neq L(y_1) + L(y_2) = 0.$$

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι επειδή η αρχή της υπέρθεσης δεν ισχύει για μη γραμμικές ΣΔΕ, ο προσδιορισμός της γενικής λύσης αυτών των ΣΔΕ είναι, γενικά μιλώντας, ιδιαίτερα δύσκολος.

Η αρχή της υπέρθεσης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και στον προσδιορισμό της γενικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης (1.27). Πράγματι, ας θεωρήσουμε τη γραμμική μη ομογενή εξίσωση 2ης τάξης [*]

$$L(y) := y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t), \tag{1.34}$$

όπου η $b(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα I. Αν υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση $y(t) := y_{\mathrm{p}}(t)$ είναι μία *ειδική* (ή *μερική*) λύση της (1.34), τότε, από την αρχή της υπέρθεσης, θα έχουμε

$$L(y - y_{\mathrm{p}}) = L(y) - L(y_{\mathrm{p}}) = b(t) - b(t) = 0, \quad t \in I.$$

Η πιο πάνω σχέση δείχνει ότι η συνάρτηση $y - y_{\mathrm{p}}$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, $L(y) = 0$. Έτσι, αν $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς προβλήματος, τότε θα υπάρχουν δύο σταθερές, c_1 και c_2, τέτοιες ώστε

$$y - y_{\mathrm{p}} = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

[*] Η γενίκευση για ΣΔΕ n-οστής τάξης είναι απλή.

Αυτό σημαίνει ότι η γενική λύση της μη ομογενούς ΣΔΕ (1.34), έχει τη μορφή

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{p}}(t), \tag{1.35}$$

όπου

$$y_{\text{hom}}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \tag{1.36}$$

είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης. Συνεπώς, για να βρούμε τη γενική λύση μιας γραμμικής μη ομογενούς ΣΔΕ, αρκεί να βρούμε τη γενική λύση, $y_{\text{hom}}(t)$, της αντίστοιχης ομογενούς ΣΔΕ και να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση, $y_{\text{p}}(t)$, της μη ομογενούς ΣΔΕ.

Όπως θα δούμε πιο κάτω, υπάρχουν συστηματικοί τρόποι για τον προσδιορισμό της $y_{\text{p}}(t)$. Ως μια πρώτη εικόνα, θεωρούμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.9. Να βρεθεί η γενική λύση της ακόλουθης γραμμικής μη ομογενούς ΣΔΕ

$$y'' - y = -t^2 + t - 1. \tag{1.37}$$

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΣΔΕ (δηλ. της (1.30)) έχει ήδη βρεθεί –βλ. (1.32)– οπότε, για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης, αρκεί να βρούμε μία ειδική λύση της (1.37). Αυτή μπορεί να βρεθεί εύκολα ως εξής: παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος (δηλ. η $b(t)$) είναι ένα τριώνυμο του t, οπότε μοιάζει εύλογο να υποθέσουμε ότι η ζητούμενη ειδική λύση θα είναι ίδιας μορφής, δηλαδή

$$y_{\text{p}}(t) = At^2 + Bt + C,$$

όπου A, B και C είναι άγνωστες σταθερές υπό προσδιορισμό.
Τότε, αντικαθιστώντας στην (1.37), βρίσκουμε ότι $2A - (At^2 + Bt + C) = -t^2 + t - 1$, που πρέπει, βέβαια, να ισχύει για κάθε t. Έτσι, εξισώνοντας τους συντελεστές ιδίων δυνάμεων του t, βρίσκουμε $A = 1$, $B = -1$ και $C = 1$, οπότε η γενική λύση της (1.37) είναι

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{p}}(t) = c_1\, \mathrm{e}^{t} + c_2\, \mathrm{e}^{-t} + t^2 - t + 1,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.38}$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **2**

Βαθμωτές ΣΔΕ Πρώτης Τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε διάφορες ΣΔΕ 1ης τάξης, της μορφής

$$y' = f(t, y), \tag{2.1}$$

που, όπως θα δούμε πιο κάτω, εμφανίζονται πολύ συχνά σε μια ευρύτατη γκάμα μαθηματικών προβλημάτων και εφαρμογών.

2.1 ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών

Θα ξεκινήσουμε με την απλούστερη περίπτωση που η συνάρτηση $f(t, y)$ είναι *διαχωρίσιμη*, δηλαδή έχει τη μορφή

$$f(t, y) = g(t)h(y),$$

όπου οι συναρτήσεις g και h είναι συνεχείς και ορίζονται σε κάποια ανοικτά διαστήματα. Στην περίπτωση αυτή, η (2.1) εκφράζεται ως

$$y' = g(t)h(y), \tag{2.2}$$

και ονομάζεται ΣΔΕ *χωριζομένων μεταβλητών*. Η κατηγορία αυτού του τύπου εξισώσεων είναι σημαντική γιατί, σε πολλές περιπτώσεις, διάφορες ΣΔΕ που ανήκουν σε άλλες κατηγορίες ανάγονται σε χωριζομένων μεταβλητών.

Για την επίλυση της (2.2) εργαζόμαστε ως εξής:
–Αν $h(y) = 0$, τότε $y' = 0$ και συνεπώς η y είναι σταθερή.
–Αν $h(y) \neq 0$, η (2.2) γράφεται ως

$$\frac{1}{h(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t), \tag{2.3}$$

και παρατηρούμε ότι, εφόσον $y = y(t)$ θα είναι και $h(y) = h(y(t))$. Αυτό σημαίνει ότι και τα δύο μέλη της (2.3) είναι συναρτήσεις του t. Συνεπώς, ολοκληρώνοντας ως προς t βρίσκουμε

$$\int \frac{1}{h(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t + c, \tag{2.4}$$

όπου c σταθερά. Δεδομένου ότι $y = y(t) \Rightarrow \mathrm{d}y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$, βρίσκουμε τελικά ότι

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(t)\,\mathrm{d}t + c, \tag{2.5}$$

γεγονός που δηλώνει ότι η (2.3) μπορεί να γραφεί συμβολικά ως $\dfrac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(t)\,\mathrm{d}t$. Συνεπώς, μπορούμε πρακτικά να ολοκληρώσουμε το αριστερό μέλος ως προς y και το δεξιό μέλος ως προς t.

Στην περίπτωση του ΠΑΤ

$$y' = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

η λύση της ΣΔΕ προκύπτει με την ίδια διαδικασία και ο προσδιορισμός της σταθεράς ολοκλήρωσης c γίνεται με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης (βλ. τα παραδείγματα στη συνέχεια).
Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι η λύση του ΠΑΤ μπορεί να βρεθεί απευθείας από τη (2.3) χρησιμοποιώντας ορισμένα ολοκληρώματα με άκρα ολοκλήρωσης που καθορίζονται από την αρχική συνθήκη, δηλαδή

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Παράδειγμα 2.1. Να λυθεί η ΣΔΕ

$$y' + 2ty = 0. \tag{2.7}$$

Καταρχήν παρατηρούμε ότι η $y \equiv 0$ είναι μια λύση της εξίσωσης. Αν $y \neq 0$, με τον χωρισμό των μεταβλητών βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2t\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -2\int t\,\mathrm{d}t + c_1 \Rightarrow \ln|y| = -t^2 + c_1 \Rightarrow y(t) = \pm\,\mathrm{e}^{c_1}\,\mathrm{e}^{-t^2},$$

όπου c_1 σταθερά. Τελικά, η γενική λύση της (2.7) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y(t) = c\,\mathrm{e}^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

όπου $c = \pm\,\mathrm{e}^{c_1} \neq 0$.
Έχοντας προσδιορίσει την εν λόγω γενική λύση, μπορούμε να δούμε (με αντικατάσταση) ότι η (2.8) ικανοποιεί την (2.7) $\forall c \in \mathbb{R}$. Έτσι, εκ των υστέρων βλέπουμε ότι για $c = 0$ η (2.8) ανάγεται στην τετριμμένη λύση $y \equiv 0$. Συνεπώς, η τετριμμένη λύση μπορεί να συμπεριληφθεί στη γενική λύση για $c = 0$, οπότε *δεν* είναι ιδιάζουσα λύση της ΣΔΕ.

Αν θεωρήσουμε το ΠΑΤ

$$y' + 2ty = 0, \quad y(1) = 2,$$

τότε η σταθερά c προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την αρχική συνθήκη: $y(t) = c\,\mathrm{e}^{-t^2} \Rightarrow y(1) = c\,\mathrm{e}^{-1} = 2 \Rightarrow c = 2\,\mathrm{e}$, οπότε η λύση του ΠΑΤ είναι

$$y(t) = 2\,\mathrm{e}^{1-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Σημειώνεται ότι η λύση του ΠΑΤ μπορεί να βρεθεί εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τη (2.6), δηλαδή

$$\int_2^y \frac{\mathrm{d}y}{y} = -2\int_1^t t\,\mathrm{d}t \Rightarrow \ln y - \ln 2 = -2\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) \Rightarrow \ln\frac{y}{2} = 1 - t^2,$$

που καταλήγει και πάλι στη (2.9).

Παράδειγμα 2.2. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = -3y^{4/3}\sin t, \quad y(\pi/2) = 8. \tag{2.10}$$

Καταρχήν βλέπουμε ότι η $y(t) \equiv 0$ ικανοποιεί τη ΣΔΕ (τετριμμένη λύση). Αν $y \neq 0$, παρατηρώντας ότι η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, έχουμε

$$\int \frac{1}{3}y^{-4/3}\,\mathrm{d}y = -\int \sin t\,\mathrm{d}t + c \Rightarrow y^{-1/3} = c - \cos t,$$

όπου c είναι σταθερά. Έτσι, η γενική λύση της ΣΔΕ είναι

$$y(t) = \frac{1}{(c - \cos t)^3},$$

με πεδίο ορισμού

$$\begin{cases} \mathbb{R}, & \text{αν} \quad c < -1, \quad \text{ή} \quad c > 1 \\ \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \pm \arccos c,\, k \in \mathbb{Z}\}, & \text{αν} \quad |c| \leq 1 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι η $y(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$, δεν περιλαμβάνεται στην πιο πάνω γενική λύση για καμία τιμή της σταθεράς c, οπότε είναι *ιδιάζουσα λύση*.

Προχωρούμε στον προσδιορισμό της σταθεράς c από την αρχική συνθήκη,

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{(c - \cos\frac{\pi}{2})^3} = \frac{1}{c^3} \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Έτσι η λύση του ΠΑΤ είναι

$$y(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \cos t\right)^3}. \tag{2.11}$$

Είναι φανερό ότι, για να είναι η λύση πεπερασμένη, πρέπει ο παρονομαστής να μη μηδενίζεται, δηλαδή

$$\cos t \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \cos t \neq \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow t \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Αφού ο παρονομαστής μηδενίζεται στα σημεία $\ldots, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \ldots$, η πραγματική ευθεία χωρίζεται σε άπειρου πλήθους ανοικτά διαστήματα. Το πεδίο ορισμού της λύσης θα είναι εκείνο το ανοιχτό διάστημα που περιέχει το σημείο $t_0 = \pi/2$, στο οποίο δίνεται η αρχική συνθήκη. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το διάστημα $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε το γενικότερο πρόβλημα:

$$y' = -3y^{4/3} \sin t, \quad y(t_0) = y_0.$$

Στην περίπτωση αυτή, η λύση του ΠΑΤ είναι:

(i) Αν $y_0 = 0$, τότε η λύση είναι η $y(t) \equiv 0$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

(ii) Αν $y_0 \neq 0$, τότε η λύση είναι

$$y(t) = \frac{1}{\left(y_0^{-1/3} + \cos t_0 - \cos t\right)^3},$$

με πεδίο ορισμού

$$\begin{cases} \mathbb{R}, \text{ αν } y_0^{-1/3} + \cos t_0 \notin [-1, 1] \\ (a, b), \text{ αν } y_0^{-1/3} + \cos t_0 \in [-1, 1] \end{cases},$$

όπου

$$a = \max\left\{t < t_0 : t = 2k\pi \pm \arccos\left(y_0^{-1/3} + \cos t_0\right),\, k \in \mathbb{Z}\right\} > -\infty$$

και

$$b = \min\left\{t > t_0 : t = 2k\pi \pm \arccos\left(y_0^{-1/3} + \cos t_0\right),\, k \in \mathbb{Z}\right\} < \infty.$$

Παράδειγμα 2.3. Να λυθεί η ΣΔΕ

$$y' = y^2. \tag{2.12}$$

Παρατηρούμε ότι η $y \equiv 0$ είναι μια λύση της εξίσωσης. Αν $y \neq 0$, με χωρισμό των μεταβλητών βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}t \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c,$$

οπότε η γενική λύση της (2.12) είναι

$$y(t) = -\frac{1}{t+c}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-c\}. \tag{2.13}$$

Και στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι η λύση $y \equiv 0$ *δεν* συμπεριλαμβάνεται στη γενική λύση, οπότε η $y \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$ είναι *ιδιάζουσα λύση* της (2.12).

Αν θεωρήσουμε τώρα το ΠΑΤ

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0,$$

βρίσκουμε ότι $y(0) = -1/c = y_0 \Rightarrow c = -1/y_0$, οπότε η λύση του ΠΑΤ είναι

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}.$$

Εδώ είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της λύσης εξαρτάται από την αρχική συνθήκη. Έτσι, για παράδειγμα, αν:

- $y_0 = 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0$ και το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $\mathbb{R}$.
- $y_0 = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$ και το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $(1, \infty)$.
- $y_0 = -1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{1+t}$ και το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $(-\infty, 1)$.

Για αυθαίρετο y_0, έχουμε ότι αν $y_0 > 0$, το πεδίο ορισμού είναι το $\left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right)$, και αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση αυτή η λύση *εκρήγνυται* σε πεπερασμένο χρόνο, δηλαδή όταν $t \to \left[\frac{1}{y_0}\right]^-$, ισχύει ότι $y(t) \to \infty$.
Αν $y_0 < 0$, το πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $\left(\frac{1}{y_0}, \infty\right)$.

Παράδειγμα 2.4. (*Η λογιστική εξίσωση*). Ένα πληθυσμιακό μοντέλο που είδαμε στο Κεφάλαιο 1 ήταν το μοντέλο του Malthus, $N' = rN$, το οποίο, για $r > 0$, προβλέπει απεριόριστη αύξηση του πληθυσμού. Επειδή αυτό προφανώς δεν μπορεί να συμβαίνει στην πράξη, είναι αναγκαίο να εισάγουμε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο, λ.χ., της μορφής:

$$N' = g(N)N,$$

όπου η συνάρτηση $g(N)$ πρέπει να συμπεριφέρεται ως εξής:

$$g(N) \sim \begin{cases} r \geq 0, & \text{για “μικρό” N,} \\ \text{φθίνουσα}, & \text{για “ενδιάμεσο” N,} \\ < 0, & \text{για “μεγάλο” N.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, μία μορφή της $g(N)$ που ακολουθεί αυτές τις “προδιαγραφές” είναι η $g(N) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, όπου $K > 0$ είναι η τελική τιμή του πληθυσμού. Αυτό σημαίνει ότι αν ο αρχικός πληθυσμός ($N(0) = N_0$) είναι $N_0 > K$, τότε ο $N(t)$ θα μειωθεί ως την τιμή K, ενώ αν $N_0 < K$ τότε ο $N(t)$ θα αυξηθεί ως την τιμή K, έτσι ώστε $N' = 0$ για $N = K$.
Η θεώρηση αυτή μας οδηγεί στη λεγόμενη *λογιστική εξίσωση ή μοντέλο του Verhulst* (1838),

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{2.14}$$

που εφοδιάζεται με την αρχική συνθήκη

$$N(0) = N_0. \tag{2.15}$$

Η λογιστική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί –ως ένα απλουστευμένο μοντέλο– και για τη μελέτη της εξάπλωσης του κορωνοϊού Covid-19 που οδηγεί στο οξύ αναπνευστικό σύνδρομο τύπου 2 (SARS-CoV-2) *. Στην περίπτωση αυτή, $N(t)$ είναι ο αριθμός των μολυσμένων/μολυσματικών ατόμων κατά τη χρονική στιγμή t, $r > 0$ είναι ο ρυθμός διασποράς της λοίμωξης στον πληθυσμό, $K > 0$ το τελικό μέγεθος της επιδημίας και $N_0 > 0$ το αρχικό πλήθος των μολυσμένων/μολυσματικών ατόμων.

Είναι φανερό ότι η λογιστική εξίσωση (2.14) είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε μπορούμε να την επιλύσουμε ως εξής

$$\frac{1}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)}\,\mathrm{d}N = r\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{1}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)}\,\mathrm{d}N = \int r\,\mathrm{d}t = rt + c_1, \tag{2.16}$$

όπου c_1 σταθερά. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στο αριστερό μέλος της (2.16), αναλύουμε τη συνάρτηση $1/[N(1-N/K)]$ σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{1-\frac{N}{K}},$$

και βρίσκουμε ότι οι προς προσδιορισμό συντελεστές A και B παίρνουν τις τιμές $A = 1$ και $B = 1/K$. Έτσι, το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (2.16) είναι

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \int \frac{\mathrm{d}N}{N} + \int \frac{\mathrm{d}N}{K-N} = \ln|N| - \ln|K-N| = \ln\left|\frac{N}{K-N}\right|.$$

Αντικαθιστώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα στη (2.16), μετά από απλούς αλγεβρικούς υπολογισμούς καταλήγουμε στη λύση της λογιστικής εξίσωσης

$$N(t) = \frac{K}{1 + c\,\mathrm{e}^{-rt}},$$

όπου η σταθερά $c = \pm\,\mathrm{e}^{c_1}$ μπορεί να υπολογιστεί από την αρχική συνθήκη (2.15). Έτσι, βρίσκουμε $c = \frac{K}{N_0} - 1$, οπότε η λύση του ΠΑΤ (2.14)-(2.15) είναι

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-rt}}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί από τη (2.17), αφορά στην εκτίμηση της αύξησης του αριθμού των κρουσμάτων στην πρώτη φάση της επιδημίας. Η εκτίμηση αυτή προκύπτει για $t \ll 1$, δηλαδή θεωρώντας αρκούντως μικρούς χρόνους από την αρχή της επιδημίας και υποθέτοντας ότι $K \gg N_0$, δηλαδή ότι το αρχικό πλήθος μολυσμένων/μολυσματικών ατόμων είναι πολύ μικρό ως προς το τελικό. Τότε, από τη (2.17) προκύπτει

$$N(t) \approx \frac{K}{1 + \frac{K}{N_0}\mathrm{e}^{-rt}} \approx N_0 \mathrm{e}^{rt},$$

οπότε στην πρώτη φάση της επιδημίας, η αύξηση του αριθμού των κρουσμάτων είναι ουσιαστικά εκθετική.

Μια πιο λεπτομερής ταξινόμηση των φάσεων της πανδημίας, βασισμένη στη λογιστική εξίσωση, θα παρουσιαστεί στο Παράδειγμα 4.3 πιο κάτω.

*Η νόσηση και ο θάνατος από αυτόν τον κορωνοϊό αναγνωρίστηκε για πρώτη φορά στην πόλη Γουχάν της Κίνας, τον Δεκέμβριο του 2019. Οι απόπειρες γεωγραφικού περιορισμού της νόσου απέτυχαν, με αποτέλεσμα ο Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας να ανακοινώσει, τον Μάρτιο του 2020, ότι αποτελεί πανδημία. Η κατάσταση έκτακτης ανάγκης άρθηκε τον Μάιο του 2023. Η πανδημία προκάλεσε διεθνώς περισσότερους από 6 εκατομμύρια θανάτους σε περισσότερες από 570 εκατομμύρια μολύνσεις, γεγονός που την καθιστά μία από τις πιο θανατηφόρες στην ανθρώπινη ιστορία.