

Σχετικότητα

37-1 ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΟ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

- 37.01** Να γνωρίζετε τα δύο αξιώματα της (ειδικής) θεωρίας της σχετικότητας και σε ποιο είδος συστήματος αναφοράς εφαρμόζονται.
- 37.02** Να αντιλαμβάνεστε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι έσχατη ταχύτητα και να γνωρίζετε προσεγγιστικά την τιμή της.
- 37.03** Να εξηγείτε πώς οι συντεταγμένες του χώρου και του χρόνου ενός γεγονότος είναι δυνατόν να μετρηθούν με μια τρισδιάστατη διάταξη ρολογιών και ράβδων μέτρησης του μήκους και γιατί λόγω αυτής της διάταξης δεν είναι απαραίτητος ο χρόνος μετάβασης ενός σήματος σε κάποιον παρατηρητή.
- 37.04** Να αντιλαμβάνεστε ότι η σχετικότητα του χώρου και του χρόνου έχει σχέση με τη μεταφορά μετρήσεων μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων, όταν το ένα κινείται σε σχέση με το άλλο. Ωστόσο, σε καθένα από αυτά συνεχίζουμε να χρησιμοποιούμε την κλασική κινηματική και Νευτώνεια μηχανική.
- 37.05** Να αντιλαμβάνεστε ότι όταν δύο συστήματα αναφο-

ράς βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους και δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα, στο ένα από αυτά, δεν είναι ταυτόχρονα και στο άλλο.

- 37.06** Να εξηγείτε τι σημαίνει ότι το χωρικό και το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων συμπλέκονται μεταξύ τους.
- 37.07** Να αντιλαμβάνεστε τις συνθήκες στις οποίες το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων είναι ιδιόχρονος.
- 37.08** Να αντιλαμβάνεστε ότι αν το μετρήσιμο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων είναι ιδιόχρονος σ' ένα σύστημα αναφοράς, το ίδιο μετρήσιμο διάστημα θα είναι μεγαλύτερο (θα έχει διασταλεί) σ' ένα άλλο σύστημα.
- 37.09** Να εφαρμόζετε τη σχέση μεταξύ του ιδιόχρονου Δt_0 του διασταλμένου χρόνου Δt και τη σχετική ταχύτητα v μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς.
- 37.10** Να εφαρμόζετε τις σχέσεις μεταξύ τη σχετικής ταχύτητας v , της παραμέτρου β της ταχύτητας και του συντελεστή Lorentz γ .

Βασικές Ιδέες

- Η ειδική θεωρία της σχετικότητας του Einstein βασίζεται σε δύο αξιώματα: (1) Για κάθε παρατηρητή ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι. (2) Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c προς κάθε κατεύθυνση ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
- Τρεις χωρικές συντεταγμένες και μια χρονική προσδιορίζουν ένα γεγονός. Ένας στόχος της ειδικής σχετικότητας είναι να συνδέσει μεταξύ τους αυτές τις συντεταγμένες όπως τις προσδιορίζουν δύο παρατηρητές, όταν ο ένας κινείται ομαλά σε σχέση με τον άλλο.
- Αν δύο παρατηρητές βρίσκονται σε σχετική κίνηση, γενικά δεν συμφωνούν ως προς το αν δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα.

- Αν δύο διαδοχικά γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς, ο χρόνος Δt_0 μεταξύ τους, μετρημένος με ένα ρολόι που βρίσκεται στη θέση όπου συμβαίνουν, είναι ο ιδιόχρονος που μεσολαβεί μεταξύ τους. Οι παρατηρητές που κινούνται ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς μετρούν πάντοτε *μεγαλύτερο* χρονικό διάστημα Δt . Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται διαστολή του χρόνου.
- Αν η σχετική ταχύτητα μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς είναι v , τότε:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Delta t_0,$$

όπου $\beta = v/c$ είναι η παράμετρος ταχύτητας και $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ είναι ο συντελεστής Lorentz.

Φυσική Σημασία

Ένα από τα κύρια αντικείμενα της φυσικής είναι η **σχετικότητα**, το πεδίο μελέτης που μετράει γεγονότα (συμβάντα τα οποία πραγματοποιούνται): πού και πότε συμβαίνουν και κατά πόσο δύο γεγονότα απέχουν μεταξύ τους στον χώρο και στον χρόνο. Επιπλέον η σχετικότητα ασχολείται με το πώς μετασχηματίζονται τέτοιες μετρήσεις (καθώς και μετρήσεις ενέργειας και ορμής) ανάμεσα σε συστήματα αναφοράς τα οποία κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο. (Από αυτό προέρχεται και το όνομα *σχετικότητα*.)

Μετασχηματισμοί και κινούμενα συστήματα αναφοράς, όπως αυτά που μελετήσαμε στις Εν. 4-6 και 4-7 ήταν απόλυτα κατανοητά και θέμα ρουτίνας για τους φυσικούς το 1905. Τότε ο Albert Einstein (Σχ. 37-1) δημοσίευσε την **ειδική θεωρία της σχετικότητας**. Το πρόθεμα *ειδική* σημαίνει ότι η θεωρία ασχολείται μόνο με **αδρανειακά συστήματα αναφοράς**, δηλαδή με συστήματα στα οποία ισχύουν οι νόμοι του Newton. (Η γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein ασχολείται με το πολύ πιο απαιτητικό πρόβλημα των βαρυτικών επιταχύνσεων τις οποίες δέχονται συστήματα αναφοράς. Στο παρόν κεφάλαιο ο όρος *σχετικότητα* θα αναφέρεται μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς.)

Ξεκινώντας από δύο φαινομενικά απλά αξιώματα ο Einstein άφησε άναυδη την επιστημονική κοινότητα αποδεικνύοντας ότι οι καθιερωμένες ιδέες για τη σχετικότητα ήταν λανθασμένες, παρά το γεγονός ότι όλοι ήταν τόσο εξοικειωμένοι με αυτές τις ιδέες ώστε είχαν φτάσει να αποτελούν αναμφισβήτητη κοινή λογική. Ωστόσο αυτή η κοινή λογική στηρίζονταν στην εμπειρία με σώματα τα οποία κινούνταν μάλλον αργά. Η σχετικότητα του Einstein η οποία αποδείχθηκε ότι είναι σωστή για όλες τις δυνατές ταχύτητες, προέβλεψε πολλά φαινόμενα τα οποία με πρώτη ματιά ήταν παράξενα, διότι μέχρι τότε ουδείς τα είχε παρατηρήσει.

Αλληλεξάρτηση Συγκεκριμένα, ο Einstein απόδειξε ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι αλληλένδετοι, δηλαδή απόδειξε ότι ο χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων εξαρτάται από το πόσο μακριά συμβαίνει το ένα από το άλλο και αντιστρόφως. Επίσης η σύνδεση ανάμεσα στον χώρο και στον χρόνο είναι διαφορετική για παρατηρητές που κινούνται ο ένας ως προς τον άλλον. Ένα αποτέλεσμα είναι ότι ο χρόνος δεν κυλάει για όλους με τον ίδιο ρυθμό, σαν να χτυπά με μηχανική κανονικότητα ένα κεντρικό απόλυτο ρολόι, το οποίο ελέγχει όλο το Σύμπαν. Στην πραγματικότητα ο ρυθμός με τον οποίο κυλάει ο χρόνος είναι ρυθμιζόμενος: η σχετική κίνηση μπορεί να αλλάξει αυτό τον ρυθμό. Πριν το 1905 μόνο μερικοί ονειροπόλοι θα μπορούσαν να είχαν σκεφτεί κάτι τέτοιο. Σήμερα, μηχανικοί και επιστήμονες το δέχονται ως δεδομένο, διότι η εμπειρία τους με την ειδική σχετικότητα έχει αλλάξει την κοινή αντίληψη. Για παράδειγμα, κάθε μηχανικός που ασχολείται με το διεθνές σύστημα εντοπισμού (GPS) των δορυφόρων NAVSTAR πρέπει καθημερινά να χρησιμοποιεί τη θεωρία της σχετικότητας (τόσο της ειδικής όσο και της γενικής) για να υπολογίζει το ρυθμό με τον οποίον κυλάει ο χρόνος στους δορυφόρους, διότι ο ρυθμός αυτός είναι διαφορετικός από τον ρυθμό στην επιφάνεια της Γης. Αν οι μηχανικοί δεν λάβουν υπόψη τους τη θεωρία της σχετικότητας, σε λιγότερο από μία ημέρα το GPS θα είναι σχεδόν άχρηστο.

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας έχει τη φήμη ότι είναι δύσκολη. Δεν είναι δύσκολη, μαθηματικά τουλάχιστον, όσον αφορά αυτό το βιβλίο. Όμως η δυσκολία της έγκειται στο γεγονός ότι θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί σε σχέση με το *ποιος μετρά τι* σε ένα γεγονός και *πώς* αυτή η μέτρηση πραγματοποιείται. Η μελέτη της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας μπορεί να είναι δύσκολη διότι αντιβαίνει με την καθημερινή μας εμπειρία.



Σχήμα 37-1 Ο Einstein ποζάρει, την εποχή που αρχίζει να γίνεται διάσημος.

Τα Αξιώματα

Τώρα θα εξετάσουμε τα δύο αξιώματα της σχετικότητας πάνω στα οποία στηρίχθηκε η θεωρία του Einstein:



1. Το Αξίωμα της Σχετικότητας: Οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Κανένα σύστημα αναφοράς δεν είναι προτιμητέο σε σχέση με κάποιο άλλο.

Ο Γαλιλαίος υπέθεσε ότι οι νόμοι της *Μηχανικής* είναι οι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ο Einstein διεύρυνε αυτή την ιδέα ώστε να περιληφθούν στο αξίωμα αυτό *όλοι* οι νόμοι της φυσικής, ιδιαίτερα αυτοί του Ηλεκτρομαγνητισμού και της Οπτικής. Αυτό το αξίωμα δεν υποστηρίζει ότι οι μετρήσιμες τιμές όλων των φυσικών μεγεθών είναι οι ίδιες για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές. Για τους περισσότερους είναι διαφορετικές, αλλά οι *νόμοι της Φυσικής*, που συνδέουν αυτές τις μετρήσεις, είναι ίδιοι.



2. Το Αξίωμα της Ταχύτητας του Φωτός: Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c σε όλες τις κατευθύνσεις και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε αυτό το αξίωμα λέγοντας ότι στη φύση υπάρχει μια *απόλυτη ταχύτητα* c , που είναι η ίδια σε όλες τις κατευθύνσεις και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το φως τυχαίνει να ταξιδεύει με αυτή την απόλυτη ταχύτητα. Όμως κανένα αντικείμενο το οποίο μεταφέρει ενέργεια ή πληροφορία δεν μπορεί να ξεπεράσει αυτό το όριο. Επιπλέον κανένα σωματίδιο το οποίο έχει μάζα δεν μπορεί στην πραγματικότητα να φτάσει το όριο αυτό, για όσο χρόνο και αν επιταχυνθεί ή όσο μεγάλη επιτάχυνση και αν έχει. (Δυστυχώς οι γρηγορότερες από το φως διαστρικές μηχανές (warp drive) σε πολλές ιστορίες επιστημονικής φαντασίας φαίνεται ότι είναι ανέφικτες, λόγω της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.)

Και τα δύο αυτά αξιώματα έχουν ελεγχθεί διεξοδικά και καμία παραβίασή τους δεν έχει ποτέ παρατηρηθεί.

Η Μέγιστη Ταχύτητα

Η ύπαρξη ενός ορίου στην ταχύτητα που μπορούν να αποκτήσουν επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια αποδείχτηκε πειραματικά το 1964 από τον W. Bertozzi, ο οποίος αφού επιτάχυνε ηλεκτρόνια, μέτρησε τις ταχύτητές τους και με μια ανεξάρτητη μέθοδο μέτρησε και την κινητική τους ενέργεια. Το αποτέλεσμα του πειράματος έδειξε ότι καθώς η δύναμη που ασκείται σε ένα πολύ γρήγορα κινούμενο ηλεκτρόνιο αυξάνεται, η τιμή της κινητικής του ενέργειας που μετράμε αυξάνεται και παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, αλλά η ταχύτητά του δεν αυξάνεται ανάλογα (Σχ. 37-2). Ηλεκτρόνια έχουν επιταχυνθεί στο εργαστήριο σε ταχύτητα ίση με 0.999 999 999 95 φορές την ταχύτητα του φωτός, αλλά όσο κοντινή και να είναι, αυτή η ταχύτητα είναι ακόμα μικρότερη από τη μέγιστη ταχύτητα c .

Η απόλυτη ταχύτητα έχει οριστεί ότι είναι ακριβώς:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (37-1)$$

Προσοχή: Μέχρι στιγμής σε αυτό το βιβλίο έχουμε χρησιμοποιήσει την προσεγγιστική τιμή του c , $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$, αλλά σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιούμε συχνά την ακριβή τιμή. Ίσως να θέλετε να αποθηκεύσετε αυτή την τιμή στη μνήμη του υπολογιστή τσέπης σας (αν δεν υπάρχει κιάλας) ώστε να τη χρησιμοποιήσετε όταν τη χρειαστείτε.

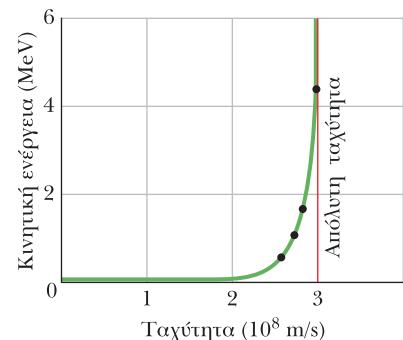
Ελέγχοντας το Αξίωμα της Ταχύτητας του Φωτός

Αν η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, τότε η ταχύτητα του φωτός που εκπέμπεται από μια πηγή η οποία κινείται σε σχέση με το εργαστήριο θα πρέπει να είναι η ίδια με την ταχύτητα του φωτός η οποία εκπέμπεται από μια πηγή που βρίσκεται με ηρεμία ως προς το εργαστήριο. Αυτή η υπόθεση έχει ελεγχθεί απευθείας σε ένα πείραμα πολύ μεγάλης ακρίβειας. Η «πηγή φωτός» ήταν ένα ουδέτερο πιόνιο (που συμβολίζεται με π^0), ένα ασταθές και με μικρό χρόνο ζωής σωματίδιο, το οποίο δημιουργείται από συγκρούσεις σε έναν επιταχυντή σωματιδίων. Το σωματίδιο αυτό διασπάται (μεταμορφώνεται) σε δύο ακτίνες γάμμα μέσα από την αντίδραση



Οι ακτίνες γάμμα είναι το τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος με πολύ μεγάλες συχνότητες και συνεπώς υπακούουν στο αξίωμα της ταχύτητας του φωτός, όπως ακριβώς και το ορατό φως. (Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο φως για οποιαδήποτε είδος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ορατό ή όχι.)

Το 1964, οι φυσικοί στο CERN, στο ευρωπαϊκό εργαστήριο σωματιδιακής φυσικής κοντά στη Γενεύη, δημιούργησαν μια δέσμη πιονίων που



Σχήμα 37-2 Οι τελείες παρουσιάζουν τις μετρημένες τιμές της κινητικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου ως προς τη μετρημένη ταχύτητά του. Όσο μεγάλο ποσό ενέργειας και αν προσφέρεται στο ηλεκτρόνιο (ή σε οποιοδήποτε άλλο σωματίδιο που έχει μάζα), η ταχύτητά του δεν μπορεί ποτέ να γίνει ίση ή να ξεπεράσει το απόλυτο όριο της ταχύτητας του φωτός c . (Η συνεχής καμπύλη διαμέσου των σημείων δείχνει την πρόβλεψη της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein.)

κινούνταν με ταχύτητα $0.99975c$ ως προς το εργαστήριο. Κατόπιν οι πειραματιστές μέτρησαν την ταχύτητα των ακτίνων γάμμα οι οποίες εκπέμφθηκαν από τα ταχύτατα κινούμενα πiónια. Το πείραμα έδειξε ότι η ταχύτητα του φωτός που εκπέμφθηκε από τα πiónια κατά τη διάσπασή τους ήταν η ίδια με αυτή που θα είχε το φως αν τα πiónια ήταν ακίνητα ως προς το εργαστήριο, δηλαδή c .

«Μέτρηση» Ενός Γεγονότος

Ένα **γεγονός** είναι κάτι που συμβαίνει, και σε κάθε γεγονός μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τρεις συντεταγμένες χώρου και μία συντεταγμένη χρόνου. Ανάμεσα στα πολλά πιθανά γεγονότα είναι 1) το άναμμα και το σβήσιμο ενός μικρού λαμπτήρα, 2) η σύγκρουση δύο σωματιδίων, 3) το πέρασμα ενός φωτεινού παλμού από συγκεκριμένο σημείο, 4) μια έκρηξη και 5) το πέρασμα του δείκτη του ρολογιού από ένα σημείο στην περιφέρεια του ρολογιού.

Παρατηρητής που βρίσκεται ακίνητος σε συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορεί, για παράδειγμα, να αντιστοιχίσει σε ένα γεγονός A τις συντεταγμένες που δίνονται στον Πίνακα 37-1. Επειδή στη σχετικότητα ο χώρος και ο χρόνος είναι αλληλένδετοι, μπορούμε να περιγράψουμε αυτές τις συντεταγμένες συνολικά ως **συντεταγμένες του χωρόχρονου**. Το ίδιο το σύστημα των συντεταγμένων είναι τμήμα του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή.

Ένα συγκεκριμένο γεγονός μπορεί να καταγραφεί από οποιοδήποτε αριθμό παρατηρητών, ο καθένας από τους οποίους βρίσκεται και σε διαφορετικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Γενικά, διαφορετικοί παρατηρητές θα αντιστοιχίσουν διαφορετικές χωροχρονικές συντεταγμένες στο ίδιο γεγονός. Σημειώστε ότι ένα γεγονός δεν «ανήκει» σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς: ένα γεγονός είναι απλά κάτι που συμβαίνει, και ο οποιοσδήποτε σ' ένα σύστημα αναφοράς μπορεί να το παρατηρήσει και να αντιστοιχίσει χωροχρονικές συντεταγμένες ως προς αυτό το σύστημα.

Χρόνος Διάδοσης Η διαδικασία ενός τέτοιου προσδιορισμού μπορεί να γίνει αρκετά περίπλοκη εξαιτίας ενός πρακτικού προβλήματος. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα μπαλόνι εκρήγνυται 1 km στα δεξιά σας, ενώ μια φωτοβολίδα ανάβει 2 km στα αριστερά σας. Και τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στις 9.00 π.μ. Παρόλα αυτά εσείς δεν παρατηρείτε κανένα από τα δύο ακριβώς στις 9.00 π.μ. , διότι εκείνη τη στιγμή δεν έχει φτάσει σε σας το φως από κανένα από τα δύο γεγονότα. Επειδή η φωτοβολίδα βρίσκεται πιο μακριά από σας απ' όση το μπαλόνι, το φως από τη φωτοβολίδα φτάνει στα μάτια σας αργότερα απ' όση το φως που εκπέμπει η έκρηξη του μπαλονιού. Επομένως σας δημιουργείται η εντύπωση ότι το γεγονός του ανάμματος της φωτοβολίδας συνέβη μετά την έκρηξη του μπαλονιού. Για να υπολογίσουμε τους ακριβείς χρόνους και για να αντιστοιχίσουμε τις 9.00 π.μ. ως τον χρόνο πραγματοποίησης των δύο γεγονότων, θα πρέπει να υπολογίσουμε τους χρόνους που χρειάστηκε το φως για να ταξιδέψει από τα σημεία στα οποία πραγματοποιήθηκαν τα γεγονότα μέχρι το σημείο παρατήρησης και στη συνέχεια να αφαιρέσουμε αυτούς τους χρόνους από τους χρόνους που παρατηρήθηκαν τα δύο γεγονότα.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει πολύπλοκη σε πιο απαιτητικές καταστάσεις. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια ευκολότερη διαδικασία η οποία αυτόματα θα εκμηδενίζει οποιαδήποτε ανησυχία αναφορικά με τον χρόνο ταξιδιού της πληροφορίας από ένα γεγονός σε έναν παρατηρητή. Για να δημιουργήσουμε μια τέτοια διαδικασία θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα φανταστικό πλέγμα από όργανα μέτρησης χώρου και χρόνου δηλαδή από ράβδους και ρολόγια σε όλο το αδρανειακό σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Το πλέγμα αυτό θα κινείται πάντα συνδεδεμένο με τον παρατηρητή. Αυτή η κατασκευή μπορεί να φαίνεται τεχνητή, αλλά μας γλιτώνει από την πολλή σύγχυση και ταυτόχρονα διευκολύνει τους υπολογισμούς διότι μας επιτρέπει να βρίσκουμε τις συντεταγμένες, ως εξής:

1. **Χωρικές Συντεταγμένες:** Φανταζόμαστε ότι το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή είναι εξοπλισμένο με ένα τρισδιάστατο πλέγμα από ράβδους μέτρησης, ένα σύνολο ράβδων παράλληλες προς τον κάθε ένα από τους τρεις άξονες συντεταγμένων. Αυτοί οι ράβδοι μας προσφέρουν έναν τρόπο για να ορίσουμε συντεταγμένες κατά μήκος των αξόνων. Με αυτό τον τρόπο αν ένα γεγονός είναι π.χ. το άναμμα ενός μικρού λαμπτήρα, ο παρατηρητής για να εντοπίσει τη θέση του γεγονότος χρειάζεται να διαβάσει μόνο τις τρεις χωρικές συντεταγμένες στη θέση που βρίσκεται ο λαμπτήρας.
2. **Χρονική Συντεταγμένη:** Για τη χρονική συντεταγμένη φανταζόμαστε ότι σε κάθε σημείο συνάντησης των ράβδων του πλέγματος υπάρχει ένα πολύ μικρό ρολόι, το οποίο ο παρατηρητής μπορεί να το διαβάσει καθώς

ΠΙΝΑΚΑΣ 37-1

Καταγραφή Γεγονότος A

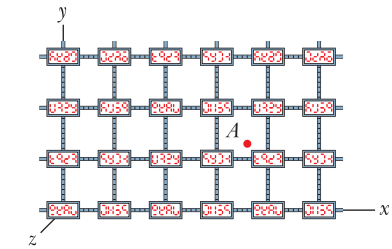
Συντεταγμένη	Τιμή
x	3.58 m
y	1.29 m
z	0 m
t	34.5 s

φωτίζεται από το φως που παράγεται από το γεγονός. Το Σχ. 37-3 παρουσιάζει ένα επίπεδο αυτού του πλέγματος των ρολογιών και των ράβδων μέτρησης που έχουμε περιγράψει.

Τα ρολόγια του πλέγματος πρέπει να είναι κατάλληλα συγχρονισμένα. Δεν είναι αρκετό τα ρολόγια να είναι τα ίδια, να τα προγραμματίσουμε να δείχνουν τον ίδιο χρόνο και μετά να τα μετακινήσουμε στις προκαθορισμένες θέσεις τους. Για παράδειγμα δεν ξέρουμε αν η μετακίνηση των ρολογιών θα αλλάξει τον ρυθμό με τον οποίο μετράνε το χρόνο. (Στην πραγματικότητα θα τον αλλάξει.) Θα πρέπει λοιπόν πρώτα να τοποθετήσουμε τα ρολόγια στις προκαθορισμένες θέσεις τους και μετά να τα συγχρονίσουμε.

Αν είχαμε μια μέθοδο για να μεταδώσουμε πληροφορία με άπειρη ταχύτητα, ο συγχρονισμός των ρολογιών θα ήταν πολύ απλή διαδικασία. Όμως καμία γνωστή μέθοδος μεταφοράς σήματος δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Συνεπώς επιλέγουμε το φως (οποιοδήποτε τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος) για να στείλουμε τα σήματα συγχρονισμού, επειδή στο κενό το φως κινείται με τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα, το απόλυτο όριο της ταχύτητας c .

Ένας από τους πολλούς τρόπους με τους οποίους ένας παρατηρητής μπορεί να συγχρονίσει ένα πλέγμα από ρολόγια χρησιμοποιώντας φωτεινά σήματα είναι ο εξής: Ο παρατηρητής προσλαμβάνει ένα μεγάλο πλήθος προσωρινών βοηθών, έναν για κάθε ρολόι. Κατόπιν ο παρατηρητής στέκεται σε ένα σημείο, το οποίο έχει επιλέξει ως αρχή των αξόνων και από εκεί εκπέμπει έναν φωτεινό παλμό όταν το ρολόι του δείχνει $t = 0$. Όταν ο φωτεινός παλμός φτάνει στη θέση ενός βοηθού, ο βοηθός αυτός ρυθμίζει το ρολόι που βρίσκεται σε αυτή τη θέση ώστε να δείχνει $t = r/c$, όπου r η απόσταση ανάμεσα στον βοηθό και στην αρχή των αξόνων και κατόπιν θέτει το ρολόι σε λειτουργία. Μετά από αυτή τη διαδικασία τα ρολόγια είναι συγχρονισμένα.



Σχήμα 37-3 Ένα τμήμα του τρισδιάστατου πλέγματος από ρολόγια και ράβδους μέτρησης, με το οποίο ένας παρατηρητής μπορεί να αντιστοιχίσει χωροχρονικές συντεταγμένες σε ένα γεγονός, όπως π.χ. τη λάμψη φωτός στο σημείο A . Οι χωρικές συντεταγμένες αυτού του γεγονότος είναι κατά προσέγγιση, $x = 3.6$ μήκη ράβδου, $y = 1.3$ μήκη ράβδου και $z = 0$. Η χρονική συντεταγμένη είναι ο χρόνος που δείχνει το πλησιέστερο ρολόι στο σημείο A τη στιγμή της λάμψης.

- Χωροχρονικές Συντεταγμένες:** Ο παρατηρητής μπορεί τώρα να αντιστοιχίσει χωροχρονικές συντεταγμένες σε κάθε γεγονός, καταγράφοντας απλώς τον χρόνο που δείχνει το ρολόι που βρίσκεται πλησιέστερα στο γεγονός και τη θέση όπως μετριέται πάνω στις ράβδους που βρίσκονται πλησιέστερα στο γεγονός. Αν υπάρχουν δύο γεγονότα, ο παρατηρητής υπολογίζει το χρονικό διάστημα μεταξύ τους από τη διαφορά που δείχνουν τα ρολόγια που είναι πλησιέστερα στο κάθε γεγονός και τη χωρική διαφορά τους από τη διαφορά στις συντεταγμένες των ράβδων μέτρησης που βρίσκονται πλησιέστερα στο κάθε γεγονός. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγουμε το πρακτικό πρόβλημα του υπολογισμού του χρόνου ταξιδιού των σημάτων από τα γεγονότα στον παρατηρητή.

Η Σχετικότητα του Ταυτόχρονου

Ας υποθέσουμε ότι ένας παρατηρητής (ο Sam) παρατηρεί ότι δύο ανεξάρτητα γεγονότα (το Κόκκινο γεγονός και το Μπλε γεγονός) συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή. Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια άλλη παρατηρήτρια (η Sally) που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς τον Sam, επίσης καταγράφει τα δύο γεγονότα. Θα παρατηρήσει η Sally ότι τα δύο γεγονότα συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή;

Η απάντηση είναι ότι γενικά δεν θα παρατηρήσει ότι συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή.



Αν δύο παρατηρητές βρίσκονται σε σχετική κίνηση, γενικά δεν θα συμφωνούν στο αν δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα. Αν ο ένας παρατηρητής μετρήσει δύο γεγονότα ως ταυτόχρονα, γενικά ο άλλος δεν θα συμφωνήσει μαζί του.

Δεν μπορούμε να πούμε ότι ο ένας παρατηρητής είναι σωστός και ο άλλος κάνει λάθος. Οι παρατηρήσεις και των δύο είναι ισοδύναμα έγκυρες και δεν υπάρχει φυσικός λόγος για να προτιμήσουμε τον έναν παρατηρητή από τον άλλο.

Η συνειδητοποίηση ότι δύο αντικρουόμενες δηλώσεις που σχετίζονται με το ίδιο φυσικό γεγονός μπορεί να είναι σωστές είναι ένα φαινομενικά παράξενο αποτέλεσμα της θεωρίας του Einstein. Παρόλα αυτά στο Κεφάλαιο 17 είδαμε έναν άλλο τρόπο με τον οποίο η κίνηση μπορεί να επηρεάσει τις μετρήσεις χωρίς ωστόσο να μας ενοχλούν τα αντικρουόμενα αποτελέσματα. Στο φαινόμενο Doppler, η συχνότητα που μετράει ένας παρατηρητής για ένα ηχητικό κύμα εξαρτάται από τη σχετική κίνηση του παρατηρητή και της πηγής. Συνεπώς δύο παρατηρητές που κινούνται ο ένας ως προς τον άλλο, μετρούν διαφορετικές συχνότητες για το ίδιο κύμα, και όσο παράξενο και αν φαίνεται και οι δύο μετρήσεις τους είναι σωστές.

Τελικά καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:



Το ταυτόχρονο δύο γεγονότων δεν είναι μια απόλυτη αντίληψη αλλά μάλλον μια σχετική καθώς εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή.

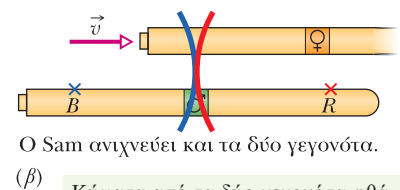
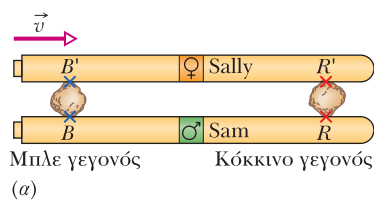
Αν η σχετική ταχύτητα των παρατηρητών είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, τότε οι μετρούμενες αποκλίσεις από το ταυτόχρονο των δύο γεγονότων είναι τόσο μικρές που είναι μη παρατηρήσιμες. Αυτή είναι η περίπτωση όλων των εμπειριών της καθημερινής μας ζωής και αυτός είναι ο λόγος που η σχετικότητα του ταυτόχρονου μας είναι τόσο ασυνήθιστη.

Μια πιο Κοντινή Ματιά στο Ταυτόχρονο

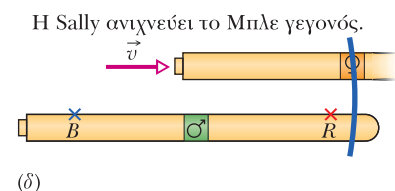
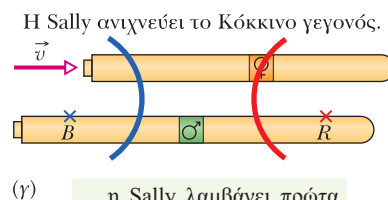
Ας προσπαθήσουμε να ξεκαθαρίσουμε τη σχετικότητα του ταυτόχρονου με ένα παράδειγμα στηριγμένο στα αξιώματα της σχετικότητας, χωρίς να αναφερθούμε ούτε σε ρολόγια ούτε σε ράβδους μέτρησης. Το Σχ. 37-4 δείχνει δύο διαστημόπλοια μεγάλου μήκους (το *SS Sally* και το *SS Sam*) τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως αδρανειακά συστήματα αναφοράς για τους δύο παρατηρητές, τη Sally και τον Sam. Ενώ οι δύο παρατηρητές κάθονται ακίνητοι στο μέσον των διαστημοπλοίων τους, αυτά κινούνται κατά μήκος του κοινού άξονά τους x με τη σχετική ταχύτητα της Sally ως προς το Sam, να είναι $\vec{v}$. Το Σχ. 37-4α δείχνει τα δύο διαστημόπλοια με τους δύο παρατηρητές να βρίσκονται στιγμιαία ο ένας απέναντι από τον άλλον.

Δύο μεγάλοι μετεωρίτες χτυπάνε τα διαστημόπλοια, ο ένας παράγοντας μια κόκκινη λάμψη (Κόκκινο γεγονός) και ο άλλος μια μπλε λάμψη (Μπλε γεγονός), όχι κατά ανάγκη ταυτόχρονα. Το κάθε γεγονός παράγει ένα μόνιμο σημάδι σε κάθε διαστημόπλοιο στις θέσεις R, R' και B, B' .

Ας υποθέσουμε ότι τα μέτωπα των κυμάτων που διαδίδονται από τα δύο γεγονότα φτάνουν στο Sam την ίδια χρονική στιγμή, όπως φαίνεται στο Σχ. 37-4β. Ας υποθέσουμε επίσης ότι μετά το γεγονός ο Sam βρίσκει, μετρώντας την απόσταση από τα σημάδια στο σκάφος του, ότι πράγματι βρισκόταν ακριβώς στο μέσον ανάμεσα στα σημάδια B και R τη στιγμή που συνέβησαν τα γεγονότα. Ο Sam καταλήγει στο συμπέρασμα:



Σχήμα 37-4 Τα διαστημόπλοια της Sally και του Sam και η αλληλουχία των γεγονότων όπως τα παρατηρεί ο Sam. Το σκάφος της Sally κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\vec{v}$. (α) Το Κόκκινο γεγονός συμβαίνει στις θέσεις R και R' και το Μπλε γεγονός στις θέσεις B και B' . Το κάθε γεγονός εκπέμπει μια φωτεινή δέσμη. (β) Ο Sam ανιχνεύει ταυτόχρονα τα φωτεινά κύματα από το Μπλε και Κόκκινο γεγονός. (γ) Η Sally ανιχνεύει το κύμα από το Κόκκινο γεγονός. (δ) Η Sally ανιχνεύει το κύμα από το Μπλε γεγονός.



... η Sally λαμβάνει πρώτα το κύμα που προέρχεται από το Κόκκινο γεγονός.

Sam: Το φως από το Κόκκινο γεγονός και το φως από το Μπλε γεγονός έφτασαν στη θέση μου την ίδια χρονική στιγμή. Από τα σημάδια στο σκάφος μου βρίσκω ότι βρίσκονται ακριβώς στη μέση ανάμεσα στις δύο πηγές. Συνεπώς το Κόκκινο γεγονός και το Μπλε γεγονός ήταν ταυτόχρονα γεγονότα.

Μελετώντας το Σχ. 37-4 βλέπουμε ότι η Sally και το μέτωπο του κύματος που διαδίδεται από το κόκκινο γεγονός κινούνται *αντίρροπα* (η Sally *προς* το μέτωπο του κύματος) σε αντίθεση με το μέτωπο του τρέχοντος κύματος από το Μπλε γεγονός το οποίο κινείται *ομόρροπα* με τη Sally. Συνεπώς το μέτωπο του κύματος από το Κόκκινο γεγονός θα φτάσει στη Sally *πριν* από το μέτωπο του κύματος από το Μπλε γεγονός. Έτσι, η Sally καταλήγει στο συμπέρασμα:

Sally: Το φως από το Κόκκινο γεγονός έφτασε στη θέση μου πριν από το φως από το Μπλε γεγονός. Από τα σημάδια στο σκάφος μου βρίσκω ότι και εγώ βρίσκονται ακριβώς στη μέση ανάμεσα στις δύο πηγές. Συνεπώς το Κόκκινο γεγονός και το Μπλε γεγονός δεν ήταν ταυτόχρονα γεγονότα. Το Κόκκινο γεγονός συνέβη πρώτο και το Μπλε γεγονός συνέβη δεύτερο.

Οι δύο αυτές αναφορές δεν συμφωνούν μεταξύ τους. Παρ' όλα αυτά και οι δύο παρατηρητές είναι σωστοί ως προς τα συμπεράσματά τους.

Προσέξτε ότι υπάρχει μόνο ένα μέτωπο κύματος το οποίο διαδίδεται από το σημείο πρόσκρουσης κάθε μετεωρίτη και ότι αυτό το μέτωπο κύματος ταξιδεύει με την ίδια ταχύτητα c και στα δύο συστήματα αναφοράς, ακριβώς όπως το αξίωμα της ταχύτητας του φωτός απαιτεί.

Θα μπορούσαν οι δύο προσκρούσεις των μετεωριτών στα δύο σκάφη να είχαν συμβεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα δύο γεγονότα να είχαν φανεί ταυτόχρονα στη Sally. Αν αυτό είχε συμβεί τότε ο Sam θα είχε δηλώσει ότι τα δύο γεγονότα δεν ήταν ταυτόχρονα.

Η Σχετικότητα του Χρόνου

Αν παρατηρητές, που κινούνται ο ένας ως προς τον άλλον, μετράνε το χρονικό διάστημα (ή *χρονικό διαχωρισμό*) ανάμεσα σε δύο γεγονότα, γενικά θα βρουν διαφορετικά αποτελέσματα. Γιατί συμβαίνει αυτό; Επειδή η *χωρική απόσταση* ανάμεσα στα δύο γεγονότα μπορεί να επηρεάσει και τα χρονικά διαστήματα όπως μετρώνται από τους παρατηρητές.



Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο γεγονότα εξαρτάται από το πόσο απέχουν στο χώρο και το χρόνο τα γεγονότα αυτά. Δηλαδή η χωρική και η χρονική τους απόσταση είναι αλληλένδετες.

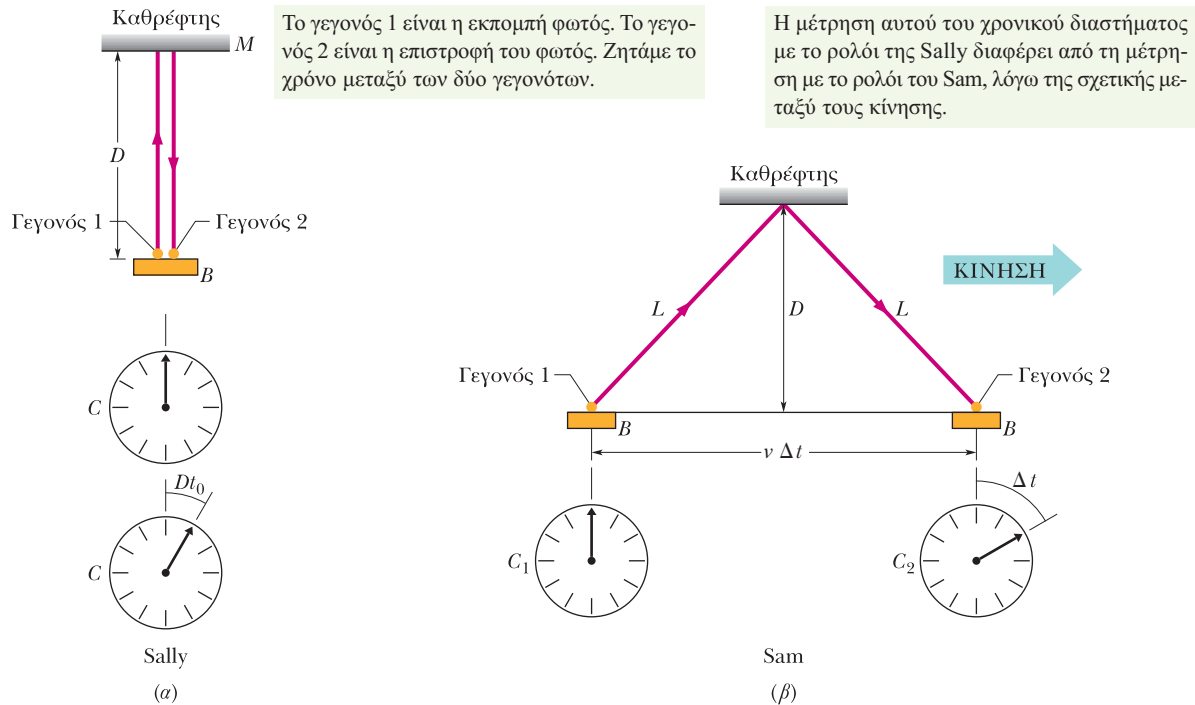
Εδώ θα μελετήσουμε αυτή την αλληλεξάρτηση χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα. Το παράδειγμα αυτό όμως έχει έναν πολύ σοβαρό περιορισμό. Για έναν από τους δύο παρατηρητές τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου. Δεν θα προχωρήσουμε σε πιο γενικά παραδείγματα μέχρι την Εν. 37-3.

Το Σχ. 37-5α δείχνει τη βασική ιδέα ενός πειράματος που δείχνει η Sally καθώς αυτή και ο εξοπλισμός της (μια φωτεινή πηγή, ένας καθρέφτης και ένα ρολόι) ταξιδεύουν με ένα τρένο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς ένα ακίνητο σταθμό. Ένας φωτεινός παλμός εκπέμπεται από τη φωτεινή πηγή B (γεγονός 1), κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, ανακλάται κάθετα προς τα κάτω από τον καθρέφτη και τελικά συλλέγεται από την πηγή (γεγονός 2). Η Sally μετράει χρονικό διάστημα Δt_0 ανάμεσα στα δύο γεγονότα. Αυτό το χρονικό διάστημα συνδέεται με την απόσταση D της πηγής από τον καθρέφτη με τη σχέση:

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad (\text{Sally}). \quad (37-3)$$

Τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση στο σύστημα αναφοράς της Sally, η οποία χρειάζεται μόνο ένα ρολόι C σε αυτή τη θέση για να μετρήσει το χρονικό διάστημα. Στο Σχ. 37-5α το ρολόι C φαίνεται δύο φορές: στην αρχή και στο τέλος του χρονικού διαστήματος.

Θα μελετήσουμε τώρα πώς, καθώς το τρένο περνά, ο Sam, που στέκεται πάνω στον σταθμό, «μετράει» αυτά τα δύο γεγονότα. Επειδή ο εξοπλισμός κινείται μαζί με το τρένο κατά τη διάρκεια που ο φωτεινός παλμός διαδίδεται, ο Sam παρατηρεί ότι η διαδρομή που ακολούθησε το φως είναι, όπως φαίνεται στο Σχ. 37-5β. Για αυτόν τα



Σχήμα 37-5 (α) Η Sally, που ταξιδεύει με το τρένο, για να μετρήσει το χρονικό διάστημα Δt_0 ανάμεσα στα γεγονότα 1 και 2, χρησιμοποιεί το ίδιο ρολόι. Το ρολόι αυτό παριστάνεται δύο φορές: την πρώτη φορά για το γεγονός 1 και τη δεύτερη για το γεγονός 2. (β) Ο Sam, που παρατηρεί το πείραμα από τον σταθμό, για να μετρήσει το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα χρειάζεται δύο συγχρονισμένα ρολόγια: το ρολόι C_1 στο γεγονός 1 και το ρολόι C_2 στο γεγονός 2. Το χρονικό διάστημα που μετράει είναι Δt .

δύο γεγονότα συμβαίνουν σε διαφορετικά σημεία του συστήματος αναφοράς του και λόγω αυτού του γεγονότος για να μπορέσει να μετρήσει το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα θα πρέπει να χρησιμοποιήσει δύο συγχρονισμένα ρολόγια C_1 και C_2 , το καθένα στο σημείο του κάθε γεγονότος. Σύμφωνα με το αξίωμα της ταχύτητας του φωτός του Einstein το φως ταξιδεύει με την ίδια ταχύτητα c και για το Sam και για τη Sally. Όμως τώρα το φως ταξιδεύει απόσταση $2L$ ανάμεσα στα γεγονότα 1 και 2. Το χρονικό διάστημα που μετράει ο Sam ανάμεσα στα δύο γεγονότα είναι

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad (\text{Sam}), \quad (37-4)$$

όπου

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v \Delta t\right)^2 + D^2}. \quad (37-5)$$

Από την Εξ. 37-3 μπορούμε να γράψουμε το L ως

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v \Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c \Delta t_0\right)^2}. \quad (37-6)$$

Απαλείφοντας το L ανάμεσα στις Εξ. 37-4 και 37-6 και λύνοντας ως προς Δt καταλήγουμε στην:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (37-7)$$

Η Εξ. 37-7 δηλώνει τη σχέση του χρονικού διαστήματος Δt που μετράει ο Sam ανάμεσα στα δύο γεγονότα με το χρονικό διάστημα Δt_0 που μετράει η Sally. Επειδή η ταχύτητα v πρέπει να είναι μικρότερη από c , ο παρονομαστής στην Εξ. 37-7 πρέπει να είναι μικρότερος από τη μονάδα. Συνεπώς το Δt πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερο από το Δt_0 . Ο Sam λοιπόν μετράει *μεγαλύτερο* χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα από αυτό που μετράει η Sally. Ο Sam και η Sally μέτρησαν το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο *ίδια* γεγονότα, όμως λόγω της σχετικής κίνησής τους τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους να είναι *διαφορετικά*. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σχετική κί-

νηση μπορεί να αλλάξει τον ρυθμό με τον οποίο κυλάει ο χρόνος ανάμεσα σε δύο γεγονότα· το κλειδί σε αυτό το φαινόμενο είναι το γεγονός ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια και για τους δύο παρατηρητές.

Για να διακρίνουμε μεταξύ των μετρήσεων του Sam και της Sally χρησιμοποιούμε την παρακάτω ορολογία:



Όταν σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση, το χρονικό διάστημα ανάμεσά τους, όπως αυτό μετράται στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς, ονομάζεται **ιδιοχρονικό διάστημα** ή **ιδιόχροнос**. Οι τιμές του ίδιου χρονικού διαστήματος σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα είναι πάντα μεγαλύτερες.

Συνεπώς η Sally μετρά το ιδιοχρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα και ο Sam μετρά μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Το κατά πόσο ένα μετρούμενο χρονικό διάστημα είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ιδιοχρονικό, ονομάζεται **διαστολή του χρόνου**. (Για να διασταλεί κάτι θα πρέπει ή να εκταθεί ή να τεντωθεί: εδώ το χρονικό διάστημα έχει «εκταθεί» ή έχει «τεντωθεί»).

Συχνά ο αδιάστατος λόγος v/c στην Εξ. 37-7 αντικαθίσταται με το β , το οποίο ονομάζεται **παράμετρος της ταχύτητας**. Επίσης η αδιάστατη ποσότητα που ισούται με το αντίστροφο της τετραγωνικής ρίζας στην Εξ. 37-7 συχνά αντικαθίσταται με το γ , το οποίο ονομάζεται **συντελεστής Lorentz**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (37-8)$$

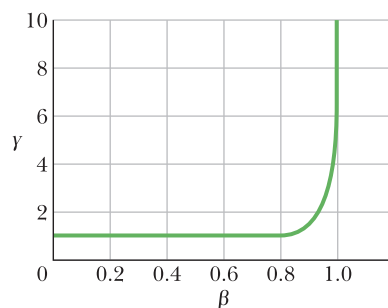
Με αυτές τις δύο αντικαταστάσεις μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξ. 37-7 ως εξής:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (\text{διαστολή του χρόνου}). \quad (37-9)$$

Η παράμετρος ταχύτητας β είναι πάντα μικρότερη από τη μονάδα και δεχόμενοι ότι η ταχύτητα v είναι διαφορετική από το μηδέν, το γ είναι πάντα μεγαλύτερο από τη μονάδα. Όμως η διαφορά ανάμεσα στο γ και στο 1 δεν είναι σημαντική εκτός αν $v > 0.1 c$. Επομένως όταν $v < 0.1 c$, η «παλιά σχετικότητα» λειτουργεί γενικά αρκετά καλά, αλλά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας για μεγαλύτερες ταχύτητες. Όπως φαίνεται και στο Σχ. 37-6, το γ αυξάνεται ταχύτατα καθώς το β πλησιάζει το 1 (δηλαδή καθώς το v πλησιάζει το c). Δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η σχετική ταχύτητα ανάμεσα στον Sam και στη Sally, τόσο μεγαλύτερη είναι χρονική διάρκεια που θα μετρήσει ο Sam, μέχρι η ταχύτητα να γίνει τόσο μεγάλη ώστε η χρονική διάρκεια να τείνει στο άπειρο, δηλαδή ο Sam να μη δει «ποτέ» το δεύτερο γεγονός.

Μπορεί να αναρωτιέστε τι λέει η Sally για το γεγονός ότι ο Sam μετράει μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από ότι αυτή. Η μέτρησή του δεν την εκπλήσσει γιατί σύμφωνα με αυτήν ο Sam απέτυχε να συγχρονίσει τα ρολόγια του C_1 και C_2 , παρά την επιμονή του ότι τα κατάφερε. Θυμηθείτε ότι οι παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλον, γενικά δεν συμφωνούν στο θέμα του ταυτόχρονου δύο γεγονότων. Ο Sam επιμένει ότι τη στιγμή που συμβαίνει το γεγονός 1, ταυτόχρονα τα δύο ρολόγια του δείχνουν τον ίδιο χρόνο. Όμως για τη Sally το ρολόι του Sam C_2 , είναι λανθασμένα ρυθμισμένο σε χρονική στιγμή μπροστά από αυτή που έπρεπε κατά τη διάρκεια της διαδικασίας συγχρονισμού. Επομένως όταν ο Sam διαβάζει τον χρόνο για το γεγονός 2 σ' αυτό το ρολόι, η Sally θεωρεί ότι ο Sam διαβάζει μια τιμή η οποία είναι μεγαλύτερη από την πραγματική, και αυτός είναι ο λόγος που το χρονικό διάστημα το οποίο ο Sam μέτρησε ανάμεσα στα δύο γεγονότα είναι μεγαλύτερο από το χρονικό διάστημα που μέτρησε αυτή.

Καθώς η παράμετρος της ταχύτητας πλησιάζει την τιμή 1.0 (καθώς η ταχύτητα πλησιάζει την τιμή c), ο συντελεστής Lorentz πλησιάζει το άπειρο.



Σχήμα 37-6 Γραφική παράσταση του συντελεστή Lorentz γ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β ($= v/c$).

Δύο Έλεγχοι της Διαστολής του Χρόνου

1. **Μικροσκοπικά Ρολόγια:** Τα υποατομικά σωματίδια που ονομάζονται *μυόνια* είναι ασταθή. Αυτό σημαίνει ότι, όταν ένα μόνιο παράγεται, ζει για

πολύ μικρό χρονικό διάστημα πριν διασπαστεί (δηλαδή πριν μετατραπεί σε σωματίδια άλλων τύπων). Ο χρόνος ζωής ενός μιονίου είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στη δημιουργία του (γεγονός 1) και στη διάσπασή του (γεγονός 2). Όταν τα μίονια είναι ακίνητα και οι χρόνοι ζωής τους μετριοούνται με ακίνητα ρολόγια (δηλαδή σε ένα εργαστήριο), ο μέσος χρόνος ζωής τους είναι $2.200 \mu\text{s}$. Αυτό είναι το ιδιοχρονικό διάστημα, διότι για κάθε μίονιο τα γεγονότα 1 και 2 συμβαίνουν στην ίδια θέση του συστήματος αναφοράς του μιονίου, που δεν είναι άλλο από το ίδιο το μίονιο. Μπορούμε να συμβολίσουμε τον ιδιόχρονο αυτό με Δt_0 . Επιπλέον μπορούμε να ονομάσουμε το σύστημα αναφοράς στο οποίο ο ιδιόχρονος αυτός έχει μετρηθεί *σύστημα ηρεμίας* του μιονίου.

Αντιθέτως, αν τα μίονια κινούνται, λόγω χάρη ως προς το εργαστήριο, τότε οι μετρήσεις των χρόνων ζωής τους που θα πραγματοποιούνται με ρολόγια που βρίσκονται στο εργαστήριο, θα δίνουν μέσες τιμές που θα είναι μεγαλύτερες από τον ιδιόχρονο ζωής τους (δισταλμένος μέσος χρόνος ζωής). Για να ελεγχθεί αυτό το συμπέρασμα πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις των μέσων χρόνων ζωής μιονίων, τα οποία κινούνταν με $v = 0.9994 c$ σε σχέση με ρολόγια του εργαστηρίου. Από την Εξ. 37-8 με $\beta = 0.9994$ ο συντελεστής Lorentz για αυτή την ταχύτητα είναι

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.9994)^2}} = 28.87.$$

Η Εξ. 37-9 δίνει τον δισταλμένο μέσο χρόνο ζωής

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = (28.87)(2.200 \mu\text{s}) = 63.51 \mu\text{s}.$$

Οι μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν συμφώνησαν με αυτό το αποτέλεσμα μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος.

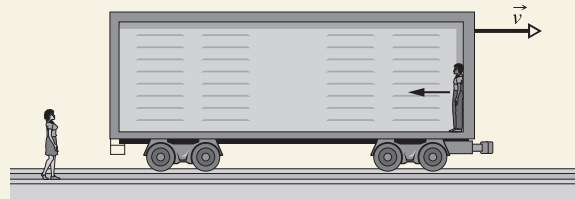
2. **Μακροσκοπικά Ρολόγια:** Τον Οκτώβριο του 1997, οι Joseph Hafele και Richard Keating πραγματοποίησαν ένα όντως εξαντλητικό πείραμα. Πέταξαν με 4 φορητά ατομικά ρολόγια δύο φορές γύρω από τη Γη μέσα σε επιβατηγά αεροπλάνα, κάθε φορά προς αντίθετη κατεύθυνση. Ο σκοπός τους ήταν να «επαληθεύσουν τη θεωρία της σχετικότητας του Einstein με μακροσκοπικά ρολόγια». Όπως αναφέραμε μόλις η πρόβλεψη της διαστολής του χρόνου της θεωρίας του Einstein επιβεβαιώθηκε στη μικροσκοπική κλίμακα, θα ήταν όμως μεγάλη ανακούφιση αν καταφέραμε να την επιβεβαιώσουμε και με πραγματικά ρολόγια. Μακροσκοπικές μετρήσεις τόσο μεγάλης ακρίβειας έγιναν δυνατές μόνο εξαιτίας της πολύ μεγάλης ακρίβειας των σύγχρονων ατομικών ρολογιών. Οι Joseph Hafele και Richard Keating επιβεβαίωσαν τις προβλέψεις της θεωρίας της σχετικότητας με ένα πειραματικό σφάλμα της τάξης του 10%. (Η γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein η οποία προβλέπει ότι ο ρυθμός με τον οποίο κυλάει ο χρόνος σε ένα ρολόι επηρεάζεται από τη βαρυτική δύναμη σε αυτό, επίσης παίζει ρόλο σε αυτό το πείραμα).

Μερικά χρόνια αργότερα, φυσικοί από το πανεπιστήμιο του Maryland πέταξαν με ένα ατομικό ρολόι πολλές φορές γύρω από το Chesapeake Bay σε πτήσεις που διαρκούσαν 15 ώρες. Οι μετρήσεις τους επιβεβαίωσαν την πρόβλεψη της διαστολής του χρόνου της θεωρίας της σχετικότητας με ακρίβεια μεγαλύτερη από 1%. Σήμερα όταν μεταφέρονται ατομικά ρολόγια από τον ένα τόπο σε ένα άλλο για ρύθμιση ή για άλλους σκοπούς, η διαστολή του χρόνου που οφείλεται στην κίνησή τους πάντοτε προσμετράται κατά τη ρύθμισή τους.



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1

Έστω ότι στεκόμαστε δίπλα στις σιδηροδρομικές γραμμές και ξαφνικά βλέπουμε ένα βαγόνι να περνάει από μπροστά μας με σχετικιστική ταχύτητα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μέσα στο βαγόνι βρίσκεται ένας καλά εξοπλισμένος κακοποιός ο οποίος πυροβολεί με όπλο λέιζερ προς το πίσω μέρος του βαγονιού. (α) Η τιμή της ταχύτητας του παλμού που εμείς μετράμε είναι μεγαλύτερη από, μικρότερη από ή ίση με αυτή που μετρά ο κακοποιός; (β) Η τιμή του χρόνου διάδοσης του παλμού που μετρά ο κακοποιός είναι ο ιδιόχρονός του; (γ) Η τιμή του χρόνου διάδοσης του παλμού την οποία μετρά ο κακοποιός και η αντίστοιχη τιμή που εμείς μετράμε συνδέονται μεταξύ τους μέσω της Εξ. 37-9;





Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-01 Διαστολή του χρόνου σε διαστημικό ταξιδιώτη που επιστρέφει στη Γη

Το διαστημόπλοιό μας προσπερνά τη Γη με σχετική ταχύτητα $0.9990c$. Στη συνέχεια αφού ταξιδέψουμε για 10 δικά μας χρόνια, σταματάμε στο φυλάκιο LP13, κάνουμε αναστροφή και επιστρέφουμε στη Γη, ταξιδεύοντας με την ίδια σχετική ταχύτητα. Το ταξίδι της επιστροφής διαρκεί και αυτό 10 δικά μας χρόνια. Πόσο διαρκεί το συνολικό ταξίδι μας για έναν παρατηρητή ο οποίος μετράει τον χρόνο πάνω στη Γη; (Θεωρούμε αμελητέα τα φαινόμενα που εμφανίζονται λόγω των επιταχύνσεων κατά τη διάρκεια της επιβράδυνσης στο LP13, της στροφής και της επιτάχυνσης ξανά στην αρχική ταχύτητα.)

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Θα ξεκινήσουμε αναλύοντας το ταξίδι προς το φυλάκιο LP13:

1. Το πρόβλημα αναφέρεται σε μετρήσεις οι οποίες πραγματοποιούνται σε δύο διαφορετικά (αδρανειακά) συστήματα αναφοράς. Το ένα είναι συνδεδεμένο με τη Γη ενώ το δεύτερο (το δικό μας σύστημα αναφοράς) είναι συνδεδεμένο με το σκάφος μας.
2. Το ταξίδι προς το φυλάκιο καθορίζεται από δύο γεγονότα: την εκκίνηση του ταξιδιού στη Γη και το τέλος του ταξιδιού στο φυλάκιο.
3. Η μέτρησή των 10 ετών για το ταξίδι προς το φυλάκιο είναι ο ιδιόχρονος Δt_0 ανάμεσα στα δύο αυτά γεγονότα, επειδή συμβαίνουν στην ίδια θέση

στο δικό μας σύστημα αναφοράς, δηλαδή στο σκάφος μας.

4. Η μέτρηση του χρονικού διαστήματος Δt ανάμεσα στα δύο αυτά γεγονότα στο σύστημα αναφοράς της Γης θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τον ιδιόχρονο Δt_0 , σύμφωνα με την Εξ. 37-9 ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$) για τη διαστολή του χρόνου.

Υπολογισμοί: Εισάγοντας από την Εξ. 37-8 το γ στην Εξ. 37-9 βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \frac{10.0 \text{ y}}{\sqrt{1 - (0.9990c/c)^2}} = (22.37)(10.0 \text{ y}) = 224 \text{ y}.\end{aligned}$$

Κατά το ταξίδι της επιστροφής έχουμε ακριβώς την ίδια κατάσταση και τα ίδια δεδομένα. Επομένως το συνολικό ταξίδι διαρκεί 20 δικά μας χρόνια αλλά

$$\Delta t_{\text{total}} = (2)(224 \text{ y}) = 448 \text{ y} \quad (\text{Απάντηση})$$

σε γήινο χρόνο. Με άλλα λόγια εμείς έχουμε γεράσει μόνο 20 χρόνια ενώ η Γη έχει γεράσει 448 χρόνια. Αν και δεν μπορούμε να ταξιδέψουμε στο παρελθόν (σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε σήμερα), μπορούμε όμως να ταξιδέψουμε στο μέλλον της Γης χρησιμοποιώντας σχετική κίνηση με μεγάλη ταχύτητα ώστε να αλλάξουμε το ρυθμό με τον οποίο κυλάει ο χρόνος.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-02 Διαστολή του χρόνου και το διάστημα που διανύει ένα σχετικιστικό σωματίδιο

Το στοιχειώδες σωματίδιο γνωστό ως *θετικό καόνιο* (K^+) είναι ασταθές και έχει μέσο χρόνο ζωής $0.1237\mu\text{s}$ όταν είναι ακίνητο (δηλαδή όταν ο χρόνος ζωής του μετριέται στο σύστημα ηρεμίας του καονίου). Αν ένα θετικό καόνιο τη στιγμή που παράγεται κινείται με ταχύτητα $0.990c$ σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, πόσο μακριά μπορεί να ταξιδέψει σε αυτό το σύστημα αναφοράς έως ότου διασπασθεί, σύμφωνα με τη κλασική φυσική (που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση για ταχύτητες πολύ μικρότερες από c) και σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικό-

τητας (που είναι σωστή για όλες τις δυνατές ταχύτητες που μπορούμε να συναντήσουμε στη φύση);

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

1. Έχουμε δύο (αδρανειακά) συστήματα αναφοράς, ένα πάνω στο καόνιο και ένα στο εργαστήριο.
2. Και αυτό το πρόβλημα αναφέρεται σε δύο γεγονότα: το πρώτο είναι η δημιουργία του καονίου και η αρχή του ταξιδιού του ενώ το δεύτερο είναι το τέλος του ταξιδιού με την διάσπαση του καονίου.

3. Η απόσταση την οποία ταξίδεψε το καόνιο ανάμεσα στα δύο αυτά γεγονότα συνδέεται με την ταχύτητα v και το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε με τη σχέση

$$v = \frac{\text{απόσταση}}{\text{χρονικό διάστημα}}. \quad (37-10)$$

Έχοντας αυτά κατά νου, θα βρούμε την απόσταση πρώτα σύμφωνα με τη κλασική φυσική και μετά σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Κλασική Φυσική: Στην κλασική φυσική βρίσκουμε την ίδια απόσταση και το ίδιο χρονικό διάστημα (στην Εξ. 37-10) είτε τα μετρήσουμε στο σύστημα του καονίου είτε στο σύστημα του εργαστηρίου. Επομένως δεν χρειάζεται να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί σε σχέση με το σύστημα στο οποίο πραγματοποιούνται οι μετρήσεις. Για να υπολογίσουμε την απόσταση d_{cp} την οποία ταξίδεψε το καόνιο σύμφωνα με την κλασική φυσική θα πρέπει να γράψουμε την Εξ. 37-10 ως εξής

$$d_{cp} = v \Delta t, \quad (37-11)$$

όπου Δt είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς. Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην Εξ. 37-11 με $0.990c$ για το v και $0.1237 \mu\text{s}$ για το Δt βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} d_{cp} &= (0.990c) \Delta t \\ &= (0.990)(299\,792\,458 \text{ m/s})(0.1237 \times 10^{-6} \text{ s}) \\ &= 36.7 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Απάντηση})$$

Αυτή είναι η απόσταση στην οποία θα ταξίδευε το καόνιο, αν η κλασική φυσική ήταν σωστή ακόμα και σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός c .

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας: Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί ώστε και η απόσταση αλλά και το χρονικό διάστημα στην Εξ. 37-10 να είναι μετρημένα στο *ίδιο* σύστημα αναφοράς –ειδικά όταν η ταχύτητα είναι κοντά στην ταχύτητα φωτός c – όπως στη συγκεκριμένη περίπτωση. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε την πραγματική απόσταση d_{sr} που ταξίδεψε το καόνιο όπως αυτή μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, ξαναγράφουμε σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας την Εξ. 37-10 ως εξής:

$$d_{sr} = v \Delta t, \quad (37-12)$$

όπου Δt είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα όπως αυτό μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

Πριν μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη d_{sr} από την Εξ. 37-12, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το Δt . Το χρονικό διάστημα των $0.1237 \mu\text{s}$ είναι ο ιδιόχρονος επειδή τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στη ίδια θέση στο σύστημα αναφοράς του καονίου, δηλαδή στο ίδιο το καόνιο. Θα συμβολίσουμε με Δt_0 αυτό το ιδιοχρονικό διάστημα. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 37-9 ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$) που δίνει τη διαστολή του χρόνου, για να βρούμε το χρονικό διάστημα Δt όπως αυτό μετριέται στο σύστημα του εργαστηρίου. Αντικαθιστώντας στην Εξ. 37-9 το γ από την Εξ. 37-8 καταλήγουμε στη:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{0.1237 \times 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0.990c/c)^2}} \\ &= 8.769 \times 10^{-7} \text{ s}. \end{aligned}$$

Η τιμή αυτή του χρονικού διαστήματος είναι περίπου 7 φορές μεγαλύτερη από τον ιδιόχρονο της ζωής του καονίου. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής του καονίου είναι περίπου 7 φορές μεγαλύτερος στο σύστημα του εργαστηρίου από όσο στο σύστημα αναφοράς του ίδιου του καονίου, δηλαδή ο χρόνος ζωής του καονίου έχει διασταλεί. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την τιμή της απόστασης που ταξίδεψε το καόνιο d_{sr} στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου από την Εξ. 37-12

$$\begin{aligned} d_{sr} &= v \Delta t = (0.990c) \Delta t \\ &= (0.990)(299\,792\,458 \text{ m/s})(8.769 \times 10^{-7} \text{ s}) \\ &= 260 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Απάντηση})$$

Η τιμή αυτή είναι περίπου 7 φορές μεγαλύτερη από την d_{cp} . Πειράματα που επαληθεύουν την ειδική θεωρία της σχετικότητας, σαν κι αυτό που περιγράψαμε, αποτελούν ρουτίνα στα εργαστήρια φυσικής εδώ και δεκαετίες. Στον σχεδιασμό αλλά και στην κατασκευή οποιουδήποτε επιστημονικού ή ιατρικού εξοπλισμού ο οποίος περιλαμβάνει σωματίδια που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας και τις σχετικιστικές διορθώσεις.



37-2 Η ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

- 37.11** Να αντιλαμβάνεστε ότι επειδή τα χωρικά και τα χρονικά διαστήματα αλληλεξαρτώνται, οι μετρήσεις του μήκους αντικειμένων μπορεί να διαφέρουν σε συστήματα αναφοράς σε σχετική κίνηση μεταξύ τους.
- 37.12** Να γνωρίζετε τη συνθήκη ώστε ένα μετρούμενο μήκος να είναι ιδιομήκος.

37.13 Να γνωρίζετε ότι όταν ένα μήκος είναι ιδιομήκος ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς το μήκος είναι μικρότερο (έχει συσταλεί), ως προς ένα άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται *παράλληλα* με το μήκος.

37.14 Να εφαρμόζετε τη σχέση μεταξύ του συσταλμένου μήκους L , του ιδιομήκους L_0 και της σχετικής ταχύτητας v μεταξύ των δύο συστημάτων.

Βασικές Ιδέες

- Όταν ένα αντικείμενο είναι ακίνητο ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το μήκος του αντικειμένου που μετράει ένας παρατηρητής σε αυτό το σύστημα ονομάζεται **ιδιομήκος**. Παρατηρητές σε συστήματα αναφοράς που κινούνται ως προς το προηγούμενο σύστημα, παράλληλα με το μήκος του αντικειμένου, μετρούν πάντοτε μικρότερο μήκος. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται **συστολή του μήκους**.
- Αν η σχετική ταχύτητα μεταξύ δύο συστημάτων είναι v ,

το συσταλμένο μήκος L και το ιδιομήκος L_0 συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L_0}{\gamma},$$

όπου $\beta = v/c$ είναι η παράμετρος ταχύτητας και $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ είναι ο παράγοντας Lorentz.

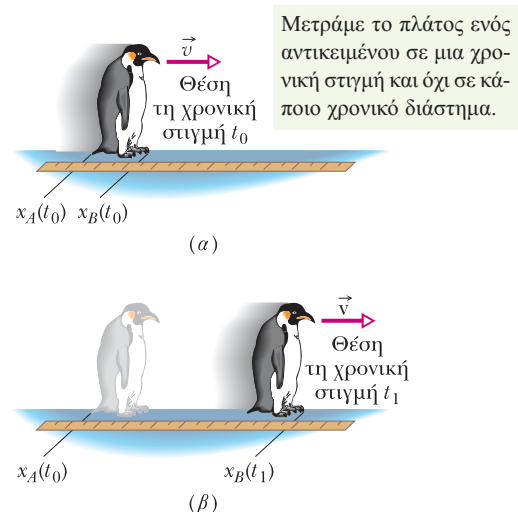
Η Σχετικότητα του Μήκους

Αν θέλεις να μετρήσεις το μήκος μιας ράβδου που είναι σε κατάσταση ηρεμίας, μπορείς να σημειώσεις τις ακραίες θέσεις της ράβδου πάνω σε ένα μακρύ ακίνητο χάρακα και μετά να αφαιρέσεις τη μια μέτρηση από την άλλη. Όμως αν η ράβδος κινείται, τότε πρέπει να σημειώσεις τις θέσεις των δύο άκρων της ράβδου πάνω στον χάρακα *ταυτόχρονα* (στο δικό σου σύστημα αναφοράς). Στην αντίθετη περίπτωση η μέτρησή σου δεν θα μπορεί να ονομασθεί μήκος. Το Σχ. 37-7 μας δείχνει τη δυσκολία της προσπάθειάς μας να μετρήσουμε το μήκος ενός κινούμενου πικουίνου σημειώνοντας τη μπροστινή και την πίσω πλευρά του πικουίνου σε διαφορετικούς χρόνους. Επειδή το ταυτόχρονο είναι σχετικό και συνδέεται με τις μετρήσεις του μήκους, το μήκος θα πρέπει επίσης να είναι σχετική ποσότητα. Και όντως έτσι είναι.

Έστω L_0 το μήκος μιας ράβδου το οποίο μετριέται όταν η ράβδος βρίσκεται σε ακινησία (που σημαίνει ότι εσύ και η ράβδος βρίσκεστε στο ίδιο σύστημα αναφοράς δηλαδή στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου). Ωστόσο όταν *κατά μήκος του άξονα της ράβδου* υπάρχει σχετική ταχύτητα v μεταξύ της ράβδου και εσένα, τότε με ταυτόχρονες μετρήσεις θα καταλήξεις σε ένα μήκος της ράβδου L που θα δίνεται από

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad (\text{συστολή του μήκους}). \quad (37-13)$$

Όταν υπάρχει σχετική κίνηση ανάμεσα στα δύο συστήματα αναφοράς, επειδή ο συντελεστής Lorentz γ είναι πάντα μεγαλύτερος από τη μονάδα, το L θα είναι πάντα μικρότερο από το L_0 . Η σχετική κίνηση προκαλεί *συστολή του μήκους* και το L θα ονομάζεται *συσταλμένο μήκος*. Όταν η ταχύτητα v αυξάνεται το γ επίσης αυξάνεται. Η συστολή του μήκους λοιπόν αυξάνεται με την ταχύτητα v .



Σχήμα 37-7 Αν θέλεις να μετρήσεις το πάχος (από το μπροστινό μέρος μέχρι το πίσω) ενός πικουίνου ενώ αυτός κινείται, θα πρέπει ταυτόχρονα (στο δικό σου σύστημα αναφοράς) να σημειώσεις τις θέσεις της μπροστινής και της πίσω πλευράς του όπως παρουσιάζεται στο (α), και όχι σε διαφορετικούς χρόνους όπως παρουσιάζεται στο (β).



Το μήκος L_0 ενός αντικειμένου το οποίο μετρίεται στο σύστημα ηρεμίας του αντικειμένου είναι το **ιδιο-μήκος** ή το **μήκος ηρεμίας**. Μετρήσεις του μήκους σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς σε σχετική κίνηση *παράλληλη* με αυτό το μήκος θα δίνουν αποτελέσματα πάντα μικρότερα από το μήκος ηρεμίας.

Θα πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί: η συστολή του μήκους εμφανίζεται μόνο κατά μήκος της διεύθυνσης της σχετικής κίνησης. Επίσης, το μήκος που μετράμε δεν χρειάζεται να είναι το μήκος ενός αντικειμένου, όπως μια ράβδος ή ένα δαχτυλίδι. Αντί γι' αυτό μπορεί να είναι το μήκος (ή η απόσταση) ανάμεσα σε δύο αντικείμενα στο ίδιο σύστημα ηρεμίας – για παράδειγμα ο Ήλιος και ένα κοντινό στον Ήλιο άστρο (τα οποία μπορεί να θεωρηθούν κατά προσέγγιση ότι βρίσκονται σε ηρεμία το ένα ως προς το άλλο).

Ένα κινούμενο αντικείμενο συστέλλεται *πραγματικά*; Επειδή η πραγματικότητα στηρίζεται πάνω σε παρατηρήσεις και μετρήσεις, αν τα αποτελέσματα είναι πάντα συνεπή και δεν έχει γίνει κανένα λάθος, τότε αυτό που παρατηρείται και μετρίεται είναι πραγματικό. Με αυτή τη λογική τα αντικείμενα όντως συστέλλονται. Όμως μια περισσότερο ακριβής δήλωση είναι ότι το αντικείμενο στην *πραγματικότητα μετρήθηκε* να συστέλλεται – η κίνηση επηρεάζει αυτή τη μέτρηση και επομένως επηρεάζει και την πραγματικότητα.

Όταν, π.χ., μετράτε το συσταλμένο μήκος μιας ράβδου, τι σχολιάζει ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με τη ράβδο για τη μέτρησή σας; Για αυτόν τον παρατηρητή εσύ δεν εντόπισες τα δύο άκρα της ράβδου ταυτόχρονα. (Θυμήσου ότι παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους δεν συμφωνούν για το ταυτόχρονο των γεγονότων.) Για τον παρατηρητή στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου, εσύ εντόπισες πρώτα το μπροστινό άκρο της ράβδου και μετά, λίγο αργότερα, το πίσω άκρο και αυτός είναι ο λόγος που το μήκος της ράβδου που μέτρησες είναι μικρότερο από το μήκος ηρεμίας της.

Απόδειξη της Εξ. 37-13

Η συστολή του μήκους προκύπτει άμεσα από τη διαστολή του χρόνου. Ας θεωρήσουμε για άλλη μια φορά τους δύο παρατηρητές μας. Αυτή τη φορά και οι δύο, και η Sally που βρίσκεται στο τρένο το οποίο κινείται μέσα από ένα σταθμό, αλλά και ο Sam που βρίσκεται στο σταθμό, θέλουν να μετρήσουν το μήκος της αποβάθρας του σταθμού. Ο Sam χρησιμοποιώντας μια μετροταινία, βρίσκει ότι το μήκος της αποβάθρας είναι L_0 . Αυτό είναι το μήκος ηρεμίας της αποβάθρας καθώς η αποβάθρα και ο Sam είναι ακίνητοι μεταξύ τους. Ο Sam παρατηρεί ότι η Sally που βρίσκεται πάνω στο τρένο, καλύπτει αυτό το μήκος σε ένα χρόνο $\Delta t = L_0/v$, όπου v είναι η ταχύτητα του τρένου, δηλαδή

$$L_0 = v \Delta t \quad (\text{Sam}). \quad (37-14)$$

Το χρονικό διάστημα Δt δεν είναι ιδιοχρονικό διάστημα καθώς τα δύο γεγονότα που το προσδιορίζουν (το πέραςμα της Sally από το πίσω μέρος της αποβάθρας και το πέρασμά της από το μπροστινό μέρος της αποβάθρας) συμβαίνουν σε διαφορετικές θέσεις και κατά συνέπεια ο Sam θα πρέπει να χρησιμοποιήσει δύο συγχρονισμένα ρολόγια για να μετρήσει αυτό το χρονικό διάστημα Δt .

Όμως για τη Sally, αυτός ο οποίος κινείται καθώς την προσπερνά με ταχύτητα v είναι η αποβάθρα. Η Sally παρατηρεί ότι τα δύο γεγονότα που μετρήθηκαν από τον Sam συμβαίνουν *στην ίδια θέση* στο δικό της σύστημα αναφοράς. Μπορεί να μετρήσει το χρονικό διάστημα μεταξύ τους με ένα μοναδικό ακίνητο ρολόι και κατά συνέπεια το διάστημα Δt_0 που μετράει με αυτόν τον τρόπο είναι ιδιοχρονικό διάστημα. Για αυτήν το μήκος L της αποβάθρας δίνεται από

$$L = v \Delta t_0 \quad (\text{Sally}). \quad (37-15)$$

Αν διαιρέσουμε την Εξ. 37-15 με την Εξ. 37-14 και εφαρμόσουμε την Εξ. 37-9 (την εξίσωση της διαστολής του χρόνου), καταλήγουμε στην

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v \Delta t_0}{v \Delta t} = \frac{1}{\gamma},$$

ή

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \quad (37-16)$$

η οποία είναι η Εξ. 37-13, η εξίσωση της συστολής του μήκους.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-03 Διαστολή του χρόνου και συστολή του μήκους όπως φαίνονται από το κάθε σύστημα

Στο Σχ. 37-8 η Sally (που βρίσκεται στο σημείο A) και το διαστημόπλοιο του Sam (με μήκος ηρεμίας $L_0 = 230$ m) προσπερνούν ο ένας τον άλλον με σταθερή σχετική ταχύτητα v . Η Sally μετρά χρονικό διάστημα $3.57 \mu\text{s}$ που χρειάζεται το διαστημόπλοιο για να την προσπεράσει (από τη στιγμή που την προσπερνάει το σημείο B στο Σχ. 37-8α μέχρι τη στιγμή που την προσπερνά το σημείο C στο Σχ. 37-8β). Πόση είναι η σχετική ταχύτητα v μεταξύ του διαστημόπλοιου και της Sally σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός c ;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Ας υποθέσουμε ότι η ταχύτητα v έχει τιμή κοντά στο c . Τότε

1. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σε μετρήσεις οι οποίες πραγματοποιούνται σε δύο διαφορετικά (αδρανειακά) συστήματα αναφοράς. Το ένα είναι συνδεδεμένο με το διαστημόπλοιο του Sam και το δεύτερο είναι συνδεδεμένο με τη Sally.
2. Επίσης, το πρόβλημα αναφέρεται σε δύο γεγονότα: το πρώτο είναι το πέρασμα του σημείου B μπροστά από τη Sally (Σχ. 37-8α) ενώ το δεύτερο είναι το πέρασμα του σημείου C μπροστά από τη Sally (Σχ. 37-8β).
3. Ως προς και τα δύο συστήματα αναφοράς, το άλλο σύστημα αναφοράς περνά με ταχύτητα v και στο χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων μετατοπίζεται κατά μία απόσταση που προκύπτει από τη σχέση

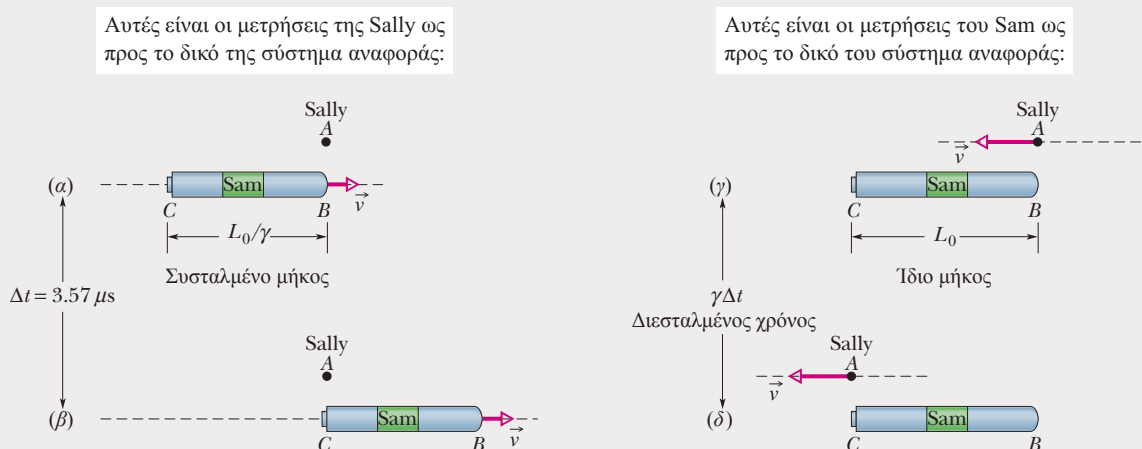
$$v = \frac{\text{απόσταση}}{\text{χρονικό διάστημα}}. \quad (37-17)$$

Επειδή η ταχύτητα v είναι κοντά στην ταχύτητα του φωτός θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε και η απόσταση και το χρονικό διάστημα στην Εξ. 37-17 να έχουν μετρηθεί στο *ίδιο* σύστημα αναφοράς.

Υπολογισμοί: Είμαστε ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε από τα δύο συστήματα αναφοράς για τις μετρήσεις μας. Επειδή ξέρουμε ότι το χρονικό διάστημα Δt ανάμεσα στα δύο γεγονότα που μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς της Sally είναι $3.57 \mu\text{s}$, θα χρησιμοποιήσουμε την απόσταση L ανάμεσα στα δύο γεγονότα όπως μετρήθηκε στο δικό της σύστημα αναφοράς. Η Εξ. 37-17 στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$v = \frac{L}{\Delta t}. \quad (37-18)$$

Αν και δεν γνωρίζουμε το L , μπορούμε να το συσχετίσουμε με το L_0 το οποίο μας δίνεται. Η απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς του Sam είναι το μήκος ηρεμίας του διαστημόπλοιου L_0 . Επομένως η απόσταση L όπως μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς της Sally θα πρέπει να είναι μικρότερη από το L_0 , όπως δίνεται από την Εξ. 37-13 ($L = L_0/\gamma$) για τη συστολή του μήκους. Αντικαθιστώντας στην Εξ. 37-18 το L με το L_0/γ και το γ από την Εξ. 37-8 καταλήγουμε στην



Σχήμα 37-8 (α)-(β) Το γεγονός 1 συμβαίνει όταν το σημείο B περνά από τη Sally (στο σημείο A) και το γεγονός 2 συμβαίνει όταν το σημείο C περνά από αυτή. (γ) - (δ) Το γεγονός 1 συμβαίνει όταν η Sally περνά από το σημείο B και το γεγονός 2 συμβαίνει όταν περνά από το σημείο C .

$$v = \frac{L_0/\gamma}{\Delta t} = \frac{L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{\Delta t}.$$

Λύνοντας την εξίσωση για ταχύτητα v (προσέξτε ότι η ταχύτητα βρίσκεται και στο αριστερό μέλος αλλά και μέσα στον συντελεστή Lorentz στο δεξιό μέλος) καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} v &= \frac{L_0 c}{\sqrt{(c \Delta t)^2 + L_0^2}} \\ &= \frac{(230 \text{ m})c}{\sqrt{(299\,792\,458 \text{ m/s})^2 (3.57 \times 10^{-6} \text{ s})^2 + (230 \text{ m})^2}} \\ &= 0.210c. \end{aligned} \quad (\text{Απάντηση})$$

Σημειώστε ότι εδώ μόνο η σχετική κίνηση των Sally και Sam μεταξύ τους έχει σημασία. Δεν μας ενδιαφέρει αν κάποιος από τους δύο είναι ακίνητος ως προς, π.χ., έναν διαστημικό σταθμό. Στα Σχήματα 37-8α και β, θεωρούμε ότι η Sally είναι ακίνητη, όμως θα μπορούσαμε να είχαμε θεωρήσει ότι το διαστημόπλοιο είναι ακίνητο και ότι η Sally το προσπερνά κινούμενη προς

τα αριστερά. Και πάλι το γεγονός 1 συμβαίνει όταν η Sally βρίσκεται απέναντι από το σημείο B και το γεγονός 2 όταν η Sally βρίσκεται απέναντι από το σημείο C . Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τις μετρήσεις του Sam. Η απόσταση λοιπόν μεταξύ των δύο γεγονότων ως προς το δικό του σύστημα αναφοράς είναι το ιδιομήκος L_0 . Επίσης, το χρονικό διάστημα μεταξύ τους δεν είναι ίσο με Δt που μετρά η Sally, αλλά με το διεσταλμένο χρονικό διάστημα $\gamma \Delta t$.

Αντικαθιστώντας τις μετρήσεις του Sam στην Εξ. 37-17 έχουμε:

$$v = \frac{L_0}{\gamma \Delta t},$$

Δηλαδή, ακριβώς ό,τι βρήκαμε χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις της Sally. Άρα, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα, $v = 0.210c$, χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε σύνολο μετρήσεων, αλλά θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε να μην αναμείζουμε τις μετρήσεις στα δύο συστήματα αναφοράς.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-04 Διαστολή του χρόνου και συστολή του μήκους καθώς προσπαθούμε να ξεφύγουμε από την έκρηξη ενός σουπερνόβα

Έχοντας αιφνιδιαστεί από μια έκρηξη κοντινού σουπερνόβα, αγωνίζεστε να ξεφύγετε με το διαστημόπλοιά σας, ελπίζοντας να ξεπεράσετε το υλικό που εκτοξεύτηκε με μεγάλη ταχύτητα προς εσάς. Ο συντελεστής σας Lorentz γ σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα των τοπικών αστεριών είναι 22.4.

(α) Για να φτάσετε σε μια ασφαλή απόσταση υπολογίσατε ότι πρέπει να διανύσετε $9.00 \times 10^{16} \text{ m}$, όπως έχει μετρηθεί στο αδρανειακό σύστημα των τοπικών αστεριών. Πόσο θα διαρκέσει η πτήση, αν μετρηθεί σε αυτό το σύστημα αναφοράς;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Από το Κεφάλαιο 2 γνωρίζουμε ότι για σταθερή ταχύτητα,

$$\text{ταχύτητα} = \frac{\text{απόσταση}}{\text{χρονικό διάστημα}}. \quad (37-19)$$

Από το Σχ. 37-6 βλέπουμε ότι επειδή ο δικός σας συντελεστής Lorentz ως προς το σύστημα των τοπικών αστεριών είναι 22.4 (μεγάλος), η σχετική σας ταχύτητα v είναι σχεδόν ίση με c – τόσο που μπορούμε με ασφάλεια

να την προσεγγίσουμε με c . Στη συνέχεια για ταχύτητα $v = c$, θα πρέπει να προσέξουμε ότι και η απόσταση αλλά και το χρονικό διάστημα στην Εξ. 37-19 είναι μετρημένες στο ίδιο σύστημα αναφοράς.

Υπολογισμοί: Η συγκεκριμένη απόσταση που αντιστοιχεί στο μήκος της απόστασης που διανύσατε ($9.00 \times 10^{16} \text{ m}$) είναι μετρημένη στο σύστημα αναφοράς των αστεριών, επομένως και το χρονικό διάστημα Δt θα πρέπει να μετρηθεί στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} (\text{χρονικό διάστημα σε σχέση με το σύστημα των αστεριών}) &= \\ &= \frac{\text{απόσταση μετρημένη στο σύστημα των αστεριών}}{c}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την απόσταση που μας δίνεται, βρίσκουμε ότι

$$(\text{χρονικό διάστημα σε σχέση με το σύστημα των αστεριών}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{9.00 \times 10^{16} \text{ m}}{299\,792\,458 \text{ m/s}} \\ &= 3.00 \times 10^8 \text{ s} = 9.51 \text{ y}. \quad (\text{Απάντηση}) \end{aligned}$$

(β) Πόσο θα διαρκέσει αυτή η πτήση σύμφωνα με σας (στο δικό σας σύστημα αναφοράς);

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

1. Τώρα ψάχνουμε το χρονικό διάστημα όπως μετρήθηκε σε ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς και συγκεκριμένα στο δικό σας. Επομένως είναι απαραίτητο να μετατρέψουμε τα δεδομένα που μας δίνονται από το σύστημα αναφοράς των αστεριών στο δικό σας σύστημα.
2. Η συγκεκριμένη απόσταση (9.00×10^{16} m) μετρημένη στο σύστημα αναφοράς των αστεριών, είναι το ίδιο μήκος L_0 που διανύσατε καθώς τα δύο άκρα του δρόμου αυτού βρίσκονται σε ηρεμία σε αυτό το σύστημα αναφοράς. Όπως παρατηρείτε ως προς το δικό σας σύστημα αναφοράς, το σύστημα αναφοράς των αστεριών και τα δύο άκρα της διαδρομής περνάνε από σας με σχετική ταχύτητα $v \approx c$.
3. Θα μετρήσετε το συσταλμένο μήκος L_0/γ για τη διαδρομή που διανύσατε και όχι το ίδιο μήκος L_0 .

Υπολογισμοί: Μπορούμε τώρα να ξαναγράψουμε την Εξ. 37-19 ως εξής:

$$(\text{χρονικό διάστημα σε σχέση με το δικό σας σύστημα}) = \frac{\text{απόσταση μετρούμενη στο δικό σας σύστημα}}{c} = \frac{L_0/\gamma}{c}.$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά δεδομένα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} (\text{χρονικό διάστημα σε σχέση με το δικό σας σύστημα}) &= \frac{(9.00 \times 10^{16} \text{ m})/22.4}{299\,792\,458 \text{ m/s}} \\ &= 1.340 \times 10^7 \text{ s} = 0.425 \text{ y.} \quad (\text{Απάντηση}) \end{aligned}$$

Στην ερώτηση (α) υπολογίσαμε ότι η πτήση διαρκεί 9.51 y στο σύστημα αναφοράς των αστεριών. Όμως στο ερώτημα (β) βρήκαμε ότι στο δικό σας σύστημα αναφοράς θα χρειαστείτε μόνο 0.425 y για την πτήση σας, εξαιτίας της σχετικής κίνησης και της συνακόλουθης συστολής του μήκους το δρόμου που θα διανύσετε.



37-3 ΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΟΥ LORENTZ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

- 37.15** Για συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους να εφαρμόσετε τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου για τον μετασχηματισμό της θέσης ενός γεγονότος από το ένα σύστημα στο άλλο.
- 37.16** Να γνωρίζετε ότι ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου είναι προσεγγιστικά σωστός για μικρές σχετικές ταχύτητες, ενώ οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι σωστοί για κάθε ταχύτητα που είναι δυνατόν να επιτευχθεί στη φύση.
- 37.17** Να εφαρμόζετε τους μετασχηματισμούς Lorentz για χωρικά και χρονικά διαστήματα μεταξύ δύο γεγονό-

των, όπως μετρώνται σε δύο συστήματα αναφοράς που κινούνται με σχετική ταχύτητα v μεταξύ τους.

- 37.18** Να αποδεικνύετε με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz τις εξισώσεις διαστολής του χρόνου και συστολής του μήκους.

- 37.19** Να αποδεικνύετε με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz ότι αν ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα αλλά διαφέρουν χωρικά, δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα ως προς ένα άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται ως προς το πρώτο.

Βασική Ιδέα

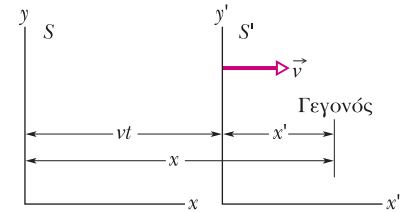
• Οι εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz συνδέουν τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος όπως φαίνεται από παρατηρητές S και S' που βρίσκονται σε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, όταν ο S' κινείται ως προς τον S με ταχύτητα v , προς τη θετική κατεύθυνση των αξόνων x και x' . Οι τέσσερις συντεταγμένες συνδέονται μεταξύ τους ως εξής:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2). \end{aligned}$$

Οι Μετασχηματισμοί του Lorentz

Στο Σχ. 37-9 παριστάνεται ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' το οποίο κινείται με ταχύτητα v , σε σχέση με το σύστημα αναφοράς S , κατά μήκος της κοινής θετικής διεύθυνσης των οριζόντιων αξόνων τους (που συμβολίζονται με x και x'). Ένας παρατηρητής στο S αναφέρει χωροχρονικές συντεταγμένες x, y, z, t για ένα γεγονός, ενώ ένας παρατηρητής στο S' αναφέρει x', y', z', t' για το ίδιο γεγονός. Πώς συνδέονται αυτές οι τετράδες των συντεταγμένων μεταξύ τους;

Από την αρχή θα υποστηρίξουμε (αν και αυτό χρειάζεται απόδειξη), ότι οι κάθετες στην κίνηση συντεταγμένες y και z δεν επηρεάζονται από την κίνηση, κατά συνέπεια $y' = y$ και $z' = z$. Το ενδιαφέρον μας λοιπόν περιορίζεται στις σχέσεις ανάμεσα στις x και x' και ανάμεσα στις t και t' .



Σχήμα 37-9 Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς: Το S' κινείται με σχετική ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το S .

Οι Εξισώσεις Μετασχηματισμού του Γαλιλαίου

Πριν από τη δημοσίευση της ειδικής θεωρίας σχετικότητας από τον Einstein, τα δύο ζευγάρια συντεταγμένων που μας ενδιαφέρουν συνδέονταν με τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & (\text{εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου,} \\ t' &= t & \text{οι οποίες ισχύουν κατά προσέγγιση σε χαμηλές ταχύτητες}) \end{aligned} \quad (37-20)$$

(Αυτές οι εξισώσεις έχουν γραφτεί με την υπόθεση ότι $t = t' = 0$ όταν οι αρχές των αξόνων των δύο συστημάτων S και S' συμπίπτουν.) Μπορείτε να επαληθεύσετε την πρώτη εξίσωση χρησιμοποιώντας το Σχ. 37-9. Η δεύτερη εξίσωση ουσιαστικά υποστηρίζει ότι ο χρόνος κυλάει με τον ίδιο ρυθμό για τους παρατηρητές που βρίσκονται και στα δύο συστήματα αναφοράς. Η αντίληψη αυτή ήταν τόσο προφανέστατα αληθινή για τους επιστήμονες πριν από τον Einstein ώστε δεν αναφερόταν καν. Όταν η ταχύτητα v είναι μικρή σε σύγκριση με το c , οι Εξ. 37-20 γενικά δίνουν καλά αποτελέσματα.

Οι Εξισώσεις Μετασχηματισμού του Lorentz

Όταν η ταχύτητα v είναι μικρή συγκριτικά με τη c , οι Εξισώσεις 37-20 δίνουν καλά αποτελέσματα. Ωστόσο, στην πραγματικότητα δεν είναι σωστές για οποιαδήποτε ταχύτητα και είναι πολύ λανθασμένες όταν η v είναι μεγαλύτερη από περίπου $0.10c$. Οι εξισώσεις που είναι σωστές για κάθε ταχύτητα η οποία είναι δυνατόν να επιτευχθεί στη φύση ονομάζονται **εξισώσεις μετασχηματισμού του Lorentz*** (ή απλώς μετασχηματισμοί Lorentz). Μπορούμε να τις εξάγουμε από τα αξιώματα της σχετικότητας, αλλά εδώ πρώτα θα τις ελέγξουμε και θα δείξουμε ότι είναι σύμφωνες με τα αποτελέσματά μας για το ταυτόχρονο, τη διαστολή του χρόνου και τη συστολή του μήκους. Υποθέτοντας ότι $t = t' = 0$ όταν οι αρχές των αξόνων των S και S' συμπίπτουν, στο Σχ. 37-9 (γεγονός 1) τότε οι χωρικές και η χρονική συντεταγμένες κάθε άλλου γεγονότος θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2). \end{aligned} \quad (\text{εξισώσεις μετασχηματισμού του Lorentz, ισχύουν για όλες τις φυσικά δυνατές ταχύτητες}) \quad (37-21)$$

Προσέξτε ότι οι χωρικές συντεταγμένες x και οι χρονικές συντεταγμένες t είναι συνδεδεμένες μέσα από την πρώτη και την τέταρτη εξίσωση. Αυτή η αλληλεξάρτηση του χώρου και του χρόνου ήταν ένα βασικό μήνυμα στη θεωρία του Einstein, ένα μήνυμα το οποίο για καιρό απέρριπταν πολλοί από τους σύγχρονους συναδέλφους του.

Μια από τις θεμελιώδεις απαιτήσεις των εξισώσεων της ειδικής σχετικότητας είναι ότι θα πρέπει να μετατρέπονται στις γνωστές κλασικές εξισώσεις όταν η τιμή της ταχύτητας του φωτός τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι

* Ίσως να αναρωτηθείτε γιατί δεν ονομάζουμε αυτές τις εξισώσεις, *εξισώσεις μετασχηματισμού του Einstein* (όπως επίσης δεν ονομάζουμε και το γ *συντελεστή Einstein*). Ο H.A. Lorentz στην πραγματικότητα απόδειξε πρώτος αυτές τις εξισώσεις πριν τον Einstein, αλλά όπως ο ίδιος ο μεγάλος αυτός Ολλανδός φυσικός παραδέχτηκε, δεν προχώρησε στο παρακάτω τολμηρό βήμα να θεωρήσει ότι αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν την πραγματική φύση του χώρου και του χρόνου. Πρώτος ο Einstein αντιλήφθηκε αυτό το γεγονός που αποτελεί τη βάση (την ουσία) της θεωρίας της σχετικότητας.

αν η ταχύτητα του φωτός είχε απείρως μεγάλη τιμή τότε όλες οι πεπερασμένες ταχύτητες θα ήταν «μικρές» σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός και οι κλασικές εξισώσεις δεν θα αποτύγχαναν ποτέ. Αν επιτρέψουμε το $c \rightarrow \infty$ στις Εξ. 37-21, τότε $\gamma \rightarrow 1$ και αυτές οι εξισώσεις μετατρέπονται, ακριβώς όπως το περιμέναμε, στις εξισώσεις του Γαλιλαίου (Εξ. 37-20). Θα πρέπει να ελέγξετε αυτό τον ισχυρισμό.

Οι Εξ. 37-21 είναι γραμμένες με τέτοιο τρόπο ώστε όταν μας δίνεται το x και το t να μπορούμε εύκολα να υπολογίζουμε το x' και το t' . Όμως πολλές φορές είναι χρήσιμο να μπορούμε να δουλεύουμε και με τον αντίθετο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση αρκεί απλά να λύσουμε τις Εξ. 37-21 ως προς το x και το t . Τότε καταλήγουμε στις

$$x = \gamma(x' + vt') \quad \text{και} \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \quad (37-22)$$

Η σύγκριση δείχνει ότι ξεκινώντας από το ένα σύνολο των εξισώσεων, είτε τις Εξ. 37-21 είτε τις Εξ. 37-22, μπορούμε να γράψουμε το άλλο σύνολο απλά αντιστρέφοντας τις τονισμένες και τις μη τονισμένες ποσότητες και αλλάζοντας το πρόσημο της σχετικής ταχύτητας v . (Για παράδειγμα, αν η ταχύτητα του συστήματος S' είναι θετική ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα S , όπως φαίνεται στο Σχ. 37-9, τότε η ταχύτητα του συστήματος S είναι αρνητική ως προς έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα S' .)

Οι εξισώσεις 37-21 συσχετίζουν μεταξύ τους τις συντεταγμένες ενός δεύτερου γεγονότος, όταν το πρώτο γεγονός συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$, κατά την οποία οι αρχές των S και S' περνούν η μία δίπλα από την άλλη. Ωστόσο, γενικά δεν θέλουμε να περιοριστούμε σε αυτό το γεγονός. Ας γράψουμε πάλι λοιπόν τους μετασχηματισμούς Lorentz για οποιοδήποτε ζεύγος γεγονότων 1 και 2, με χωρική και χρονική απόσταση:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

όπως τις μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα S , και

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 \quad \text{και} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1,$$

όπως τις μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα S' . Ο Πίνακας 37-2 παρουσιάζει τις εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz σε διαφορετική μορφή, κατάλληλη για να αναλύσουμε ζεύγη γεγονότων. Οι εξισώσεις στον πίνακα προέκυψαν, αντικαθιστώντας απλά τις διαφορές των συντεταγμένων (δηλαδή όπως τις Δx και $\Delta x'$) στη θέση των τεσσάρων συντεταγμένων στις Εξ. 37-21 και 37-22.

Όμως θα πρέπει να είστε προσεκτικοί όταν αντικαθιστάτε τις διαφορές αυτές με αριθμητικές τιμές να είστε συνεπείς και να μην μπλέκετε τις τιμές των συντεταγμένων του πρώτου γεγονότος με τις τιμές των συντεταγμένων του δεύτερου γεγονότος. Επίσης αν για παράδειγμα το Δx είναι αρνητική ποσότητα, θα πρέπει να είστε σίγουροι ότι δεν ξεχάσατε να συμπεριλάβετε το αρνητικό πρόσημο κατά τις αντικαταστάσεις των τιμών στις σχέσεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 37-2

Οι Εξισώσεις Μετασχηματισμού του Lorentz για Ζεύγη Γεγονότων

1. $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t')$	1'. $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t)$
2. $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v \Delta x'/c^2)$	2'. $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v \Delta x/c^2)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Το σύστημα αναφοράς S' κινείται με σχετική ταχύτητα v ως προς το σύστημα S .



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2

Στο Σχ. 37-9, το σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $0.90c$ σε σχέση με το σύστημα αναφοράς S . Ένας παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς S' μετράει δύο γεγονότα τα οποία συμβαίνουν στις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες: το Κίτρινο (Y) γεγονός στις (5.0m, 20ns) και το Πράσινο (G) γεγονός στις (-2.0m, 45ns). Ένας παρατηρητής στο σύστημα S θέλει να βρει τη χρονικό διάστημα $\Delta t_{GY} = t_G - t_Y$ ανάμεσα στα δύο γεγονότα. (α) Ποια εξίσωση από τον Πίνακα 37-2 θα χρησιμοποιηθεί; (β) Θα πρέπει να αντικαταστήσει την ταχύτητα v με την τιμή $+0.90c$ ή την τιμή $-0.90c$ στις παρενθέσεις στα δεξιά μέλη των εξισώσεων και στον συντελεστή Lorentz γ ; (γ) Με ποια τιμή πρέπει να αντικατασταθεί ο πρώτος όρος μέσα στις παρενθέσεις και (δ) με ποια τιμή πρέπει να αντικατασταθεί ο δεύτερος όρος μέσα στις παρενθέσεις;

Μερικές Συνέπειες των Εξισώσεων Lorentz

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Πίνακα 37-2 για να επιβεβαιώσουμε κάποια συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε νωρίτερα χρησιμοποιώντας μόνο τα αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

Ταυτόχρονο

Θεωρούμε την Εξ. 2 του Πίνακα 37-2

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right). \quad (37-23)$$

Αν δύο γεγονότα συμβαίνουν σε διαφορετικές θέσεις στο σύστημα αναφοράς S' του Σχ. 37-9, τότε το $\Delta x'$ σε αυτή την εξίσωση είναι μη μηδενικό. Συνεπώς ακόμα και αν τα δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα στο S' (δηλαδή $\Delta t' = 0$) δεν θα είναι ταυτόχρονα στο σύστημα αναφοράς S . (Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με το προηγούμενο συμπέρασμα μας στην Εν. 37-1). Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων στο S θα είναι

$$\Delta t = \gamma \frac{v \Delta x'}{c^2} \quad (\text{ταυτόχρονα γεγονότα στο } S').$$

Άρα, η χωρική απόσταση $\Delta x'$ εξασφαλίζει χρονική απόσταση Δt .

Διαστολή του Χρόνου

Έστω τώρα ότι δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση στο σύστημα αναφοράς S' (συνεπώς $\Delta x' = 0$) αλλά σε διαφορετικούς χρόνους (συνεπώς $\Delta t' \neq 0$). Η Εξ. 37-23 τότε δίνει

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad (\text{γεγονότα στην ίδια θέση στο } S') \quad (37-24)$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει τη διαστολή του χρόνου ανάμεσα στα συστήματα αναφοράς S και S' . Επίσης επειδή τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση στο S' , το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ ανάμεσά τους μπορεί να μετρηθεί με ένα μόνο ρολόι, τοποθετημένο σε αυτή τη θέση. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το μετρούμενο χρονικό διάστημα είναι ιδιοχρονικό διάστημα, και μπορούμε να το συμβολίσουμε με Δt_0 , όπως έχουμε προηγουμένως συμβολίσει τους ιδιόχρονους. Επομένως με αυτό τον συμβολισμό η Εξ. 37-24 γράφεται σαν

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (\text{διαστολή του χρόνου}),$$

που είναι ακριβώς η Εξ. 37-9, η εξίσωση διαστολής του χρόνου. Άρα η διαστολή του χρόνου είναι ειδική περίπτωση των πιο γενικών εξισώσεων Lorentz.

Συστολή του Μήκους

Θα θεωρήσουμε την Εξ. 1' του Πίνακα 37-2,

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t). \quad (37-25)$$

Αν μια ράβδος κείται παράλληλα στους άξονες x και x' του Σχ. 37-9 και είναι σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς S' , ένας παρατηρητής στο ίδιο σύστημα μπορεί να μετρήσει το μήκος της με την ησυχία του. Ένας τρόπος να το κάνει είναι να αφαιρέσει τις συντεταγμένες των ακραίων σημείων της ράβδου. Η τιμή του $\Delta x'$ που θα βρει θα είναι το ίδιο μήκος L_0 της ράβδου επειδή οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η ράβδος βρίσκεται σε ηρεμία.

Έστω ότι η ράβδος κινείται στο σύστημα αναφοράς S . Αυτό σημαίνει ότι το Δx μπορεί να θεωρηθεί ως το μήκος L της ράβδου στο σύστημα αναφοράς μόνο αν οι συντεταγμένες των ακραίων σημείων της ράβδου μετριοούνται ταυτόχρονα, δηλαδή μόνο αν $\Delta t = 0$. Αν αντικαταστήσουμε τα $\Delta x' = L_0$, $\Delta x = L$ και $\Delta t = 0$ στην Εξ. 37-25 καταλήγουμε στην

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (\text{συστολή του μήκους}) \quad (37-26)$$

που είναι ακριβώς η Εξ. 37-13, η εξίσωση της συστολής του μήκους. Άρα, η συστολή του μήκους είναι ειδική περίπτωση των πιο γενικών εξισώσεων Lorentz.



Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-05 Μετασχηματισμός Lorentz και αντιστροφή της διαδοχής των γεγονότων

Ένα διαστημόπλοιο από τη Γη έχει σταλθεί να ελέγξει ένα γήινο φυλάκιο στον πλανήτη P1407. Στο φεγγάρι αυτού του πλανήτη υπάρχει μια ομάδα μάχης των Ερπετοειδών, που συχνά γίνονται εχθρικοί. Καθώς το διαστημόπλοιο ακολουθεί ευθεία πορεία πρώτα προσπερνώντας τον πλανήτη και στη συνέχεια προσπερνώντας το φεγγάρι, ανιχνεύει μια δέσμη μικροκυμάτων υψηλής ενέργειας, στη βάση των Ερπετοειδών. Κατόπιν μετά από 1.10s ανιχνεύει μια έκρηξη στο γήινο φυλάκιο, που απέχει $4.00 \times 10^8 \text{ m}$ από τη βάση των Ερπετοειδών, όπως αυτό μετρείται στο σύστημα αναφοράς του διαστημόπλοιου. Οι Ερπετοειδείς έχουν προφανώς επιτεθεί στο γήινο φυλάκιο και το διαστημόπλοιο αρχίζει να προετοιμάζεται για σύγκρουση μαζί τους.

(α) Η ταχύτητα του σκάφους σε σχέση με τον πλανήτη και το φεγγάρι του είναι 0.980c. Πόση είναι η απόσταση και το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην εκπομπή της δέσμης και στην έκρηξη όπως αυτή μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού (και άρα σύμφωνα με τους στρατιώτες των φυλακίων);

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

1. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σε μετρήσεις οι οποίες πραγματοποιήθηκαν σε δύο συστήματα αναφοράς, στο σύστημα του πλανήτη-φεγγαριού και στο σύστημα του διαστημοπλοίου.
2. Έχουμε δύο γεγονότα: την εκπομπή της δέσμης μικροκυμάτων και την έκρηξη στο φυλάκιο.
3. Πρέπει να μετατρέψουμε τα δεδομένα για τον χρόνο και την απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα όπως μετρήθηκαν στο σύστημα αναφοράς του διαστημόπλοιου στα αντίστοιχα δεδομένα όπως μετρούνται στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού.

Σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου: Πριν πραγματοποιήσουμε τον μετασχηματισμό θα πρέπει προσεκτικά να διαλέξουμε τους συμβολισμούς μας. Ξεκινάμε με μια σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος όπως αυτή φαίνεται στο Σχ. 37-10. Έχουμε επιλέξει το σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου S να είναι ακίνητο και το σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού S' να κινείται με θετική ταχύτητα v (προς τα δεξιά). (Αυτό είναι αυθαίρετη επιλογή· θα μπορούσαμε αντίθετα να έχουμε επιλέξει το σύστημα

αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού να είναι ακίνητο. Τότε στο Σχ. 37-10 θα συνδέαμε την ταχύτητα $\vec{v}$ με το σύστημα αναφοράς S και η ταχύτητα θα αντιστοιχούσε σε κίνηση προς τα αριστερά. Σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα v θα ήταν αρνητική. Τα αποτελέσματα όμως τελικά θα ήταν τα ίδια.) Έστω ότι οι δείκτες e και b συμβολίζουν την έκρηξη και την εκπομπή της δέσμης αντίστοιχα. Τότε τα δεδομένα ως προς στο σύστημα αναφοράς του σκάφους (μη τονισμένο) θα είναι

$$\Delta x = x_e - x_b = +4.00 \times 10^8 \text{ m}$$

και

$$\Delta t = t_e - t_b = +1.10 \text{ s.}$$

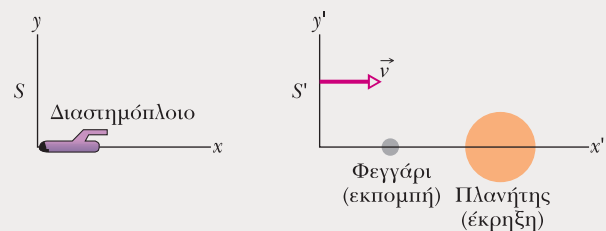
Εδώ το Δx είναι μια θετική ποσότητα, διότι στην Εξ. 37-10 η συντεταγμένη x_e για την έκρηξη είναι μεγαλύτερη από τη συντεταγμένη x_b για την εκπομπή της δέσμης. Η ποσότητα Δt είναι επίσης θετική, διότι ο χρόνος t_e της έκρηξης είναι μεγαλύτερος (η έκρηξη συμβαίνει αργότερα) από τον χρόνο t_b εκπομπής της δέσμης.

Σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού: Ψάχνουμε τα $\Delta x'$ και $\Delta t'$, τα οποία θα πρέπει να υπολογίσουμε από τη μετατροπή των δεδομένων ως προς το σύστημα S στα αντίστοιχα δεδομένα ως προς το σύστημα S' . Επειδή μελετάμε ένα ζεύγος γεγονότων θα επιλέξουμε εξισώσεις μετασχηματισμού από τον Πίνακα 37-2 και συγκεκριμένα τις Εξ. 1' και 2'.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t) \quad (37-27)$$

$$\text{και} \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right). \quad (37-28)$$

Η σχετική κίνηση αλλάζει τη χρονική διάρκεια μεταξύ γεγονότων, ακόμα και τη χρονική τους σειρά.



Σχήμα 37-10 Ένας πλανήτης και το φεγγάρι του στο σύστημα αναφοράς S' κινούνται προς τα δεξιά με ταχύτητα v σε σχέση με το διαστημόπλοιο το οποίο βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S .

Εδώ, $v = +0.980c$ και ο συντελεστής Lorentz γ είναι

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (+0.980c/c)^2}} = 5.0252.$$

Η Εξ. 37-27 μετατρέπεται στην

$$\Delta x' = (5.0252)[4.00 \times 10^8 \text{ m} - (+0.980 c)(1.10 \text{ s})] \\ = 3.86 \times 10^8 \text{ m}, \quad (\text{Απάντηση})$$

και η Εξ. 37-28 μετατρέπεται στην

$$\Delta t' = (5.0252) \left[(1.10 \text{ s}) - \frac{(+0.980c)(4.00 \times 10^8 \text{ m})}{c^2} \right] \\ = -1.04 \text{ s}. \quad (\text{Απάντηση})$$

(β) Ποιο είναι το φυσικό νόημα του αρνητικού πρόσθετου στην τιμή του $\Delta t'$;

Συλλογισμός: Θα πρέπει να είμαστε συνεπείς με τον συμβολισμό που επιλέξαμε στο ερώτημα (α). Θυμηθείτε πώς αρχικά ορίσαμε το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην εκπομπή και στην έκρηξη: $\Delta t = t_e - t_b = +1.10 \text{ s}$. Για να παραμείνουμε συνεπείς με αυτή την επιλογή του συμβολισμού, ο ορισμός του $\Delta t'$ θα πρέπει να είναι $t'_e - t'_b$, επομένως έχουμε καταλήξει στο

$$\Delta t' = t'_e - t'_b = -1.04 \text{ s}.$$

Το αρνητικό πρόσθετο σε αυτή τη σχέση μας δηλώνει ότι $t'_b > t'_e$, που σημαίνει ότι στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού η εκπομπή της δέσμης συνέβη 1.04 s μετά την έκρηξη, και όχι 1.10s πριν την έκρηξη όπως αυτό παρατηρήθηκε στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου.

(γ) Οφείλεται η έκρηξη στην εκπομπή της δέσμης μικροκυμάτων ή το αντίθετο;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Η αλληλουχία των γεγονότων όπως αυτά μετριοούνται στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού είναι αντίθετη από την αλληλουχία των γεγονότων όπως αυτά μετριοούνται στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου. Και στις δύο περιπτώσεις αν υπήρχε μια σχέση αίτιου – αποτελέσματος ανάμεσα στα δύο γεγονότα, η πληροφορία θα πρέπει να ταξιδέψει από τη θέση του ενός γεγονότος στη θέση του άλλου γεγονότος για να το δημιουργήσει.

Ελέγχοντας την ταχύτητα: Ας ελέγξουμε τώρα την απαιτούμενη ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας. Στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου η ταχύτητα αυτή είναι

$$v_{\text{info}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4.00 \times 10^8 \text{ m}}{1.10 \text{ s}} = 3.64 \times 10^8 \text{ m/s},$$

αλλά αυτή η ταχύτητα είναι αδύνατη επειδή ξεπερνά την ταχύτητα c . Στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού, η ταχύτητα υπολογίζεται ότι είναι $3.70 \times 10^8 \text{ m/s}$, που επίσης είναι αδύνατη. Κατά συνέπεια κανένα από τα δύο γεγονότα δεν θα μπορούσε να είναι η αιτία του άλλου, που σημαίνει ότι τα δύο γεγονότα είναι *άσχετα* μεταξύ τους. Επομένως το διαστημόπλοιο δεν πρέπει να συγκρουστεί με Ερπετοειδείς.



37-4 Η ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

37.20 Να εξηγήσετε με τη βοήθεια ενός σχήματος πώς είναι δυνατόν να μετρηθεί η ταχύτητα ενός σωματιδίου ως προς δύο συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους.

37.21 Να εφαρμόζετε τη σχετικιστική σχέση μετασχηματισμού ταχύτητας μεταξύ δύο συστημάτων αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους.

Βασική Ιδέα

• Όταν ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα u' ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' προς τη θετική κατεύθυνση του x' και το σύστημα αναφοράς S' επίσης κινείται με ταχύτητα v παράλληλα με τη διεύθυνση του άξονα x ενός άλ-

λου συστήματος αναφοράς S , η ταχύτητα u σωματιδίου όπως μετράται στο S είναι:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (\text{σχετικιστική ταχύτητα}).$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού Lorentz για να συγκρίνουμε τις ταχύτητες τις οποίες θα μετρήσουν δύο παρατηρητές σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς S και S' για το ίδιο κινούμενο σωματίδιο. Έστω ότι το S' κινείται με ταχύτητα v ως προς το S .

Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα παράλληλη στους άξονες x και x' όπως φαίνεται στο Σχ. 37-11, εκπέμπει δύο σήματα καθώς κινείται. Ο κάθε παρατηρητής μέτρα το χρονικό διάστημα και τη χωρική διαφορά ανάμεσα σε αυτά τα δύο γεγονότα. Αυτές οι τέσσερις μετρήσεις σχετίζονται με τις Εξ. 1 και 2 του Πίνακα 37-2,

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t')$$

και

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2}\right).$$

Αν διαιρέσουμε την πρώτη από αυτές τις εξισώσεις με τη δεύτερη θα καταλήξουμε στην

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\Delta t' + v \Delta x'/c^2}.$$

Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της δεξιάς πλευράς με $\Delta t'$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2}.$$

Όμως, στο διαφορικό όριο, το $\Delta x/\Delta t$ είναι u , δηλαδή η ταχύτητα του σωματιδίου όπως αυτή μετρείται στο σύστημα αναφοράς S , και το $\Delta x'/\Delta t'$ είναι u' , δηλαδή η ταχύτητα του σωματιδίου όπως αυτή μετρείται στο σύστημα αναφοράς S' . Τελικά καταλήγουμε στη σχέση

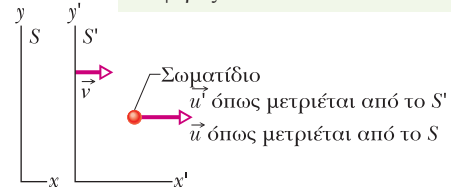
$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (\text{σχετικιστικός μετασχηματισμός ταχυτήτων}) \quad (37-29)$$

που είναι η εξίσωση του σχετικιστικού μετασχηματισμού ταχυτήτων. (Προσοχή: Αντικαταστήστε προσεκτικά τα σωστά πρόσημα των ταχυτήτων.) Όταν εφαρμόσουμε τον καθιερωμένο έλεγχο θέτοντας την ταχύτητα του φωτός $c \rightarrow \infty$ η εξίσωση αυτή στην κλασική, ή αλλιώς Γαλιλαϊκή, εξίσωση μετασχηματισμού ταχυτήτων,

$$u = u' + v \quad (\text{κλασική εξίσωση μετασχηματισμού}) \quad (37-30)$$

Με άλλα λόγια η Εξ. 37-29 ισχύει για όλες τις φυσικά δυνατές ταχύτητες, ενώ η Εξ. 37-30 ισχύει προσεγγιστικά για ταχύτητες που είναι σημαντικά μικρότερες από την c .

Η ταχύτητα του κινούμενου σωματιδίου εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς



Σχήμα 37-11 Το σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το σύστημα αναφοράς S . Ένα σωματίδιο έχει ταχύτητα $\vec{u}'$ ως προς το σύστημα αναφοράς S' και ταχύτητα $\vec{u}$ ως προς το σύστημα αναφοράς S .

37-5 ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER ΓΙΑ ΤΟ ΦΩΣ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

37.22 Να αντιλαμβάνεστε ότι η συχνότητα του φωτός όπως μετρείται σε ένα σύστημα αναφοράς στερεωμένο στην πηγή του φωτός (το σύστημα ηρεμίας) είναι η ιδιοσυχνότητα της πηγής.

37.23 Όταν η απόσταση μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή αυξάνεται ή ελαττώνεται, να γνωρίζετε αν η με-

τρούμενη συχνότητα μετατοπίζεται πάνω από την ιδιοσυχνότητα ή προς τα κάτω, να γνωρίζετε ότι όσο η σχετική ταχύτητα αυξάνεται, η μετατόπιση της συχνότητας επίσης αυξάνεται, και να χρησιμοποιείτε τους όρους κυανή και ερυθρά μετατόπιση.

37.24 Να γνωρίζετε τι είναι η ακτινική ταχύτητα.

37.25 Όταν η απόσταση μεταξύ της πηγής και του δέκτη αυξάνεται ή ελαττώνεται, να εφαρμόσετε τις σχέσεις μεταξύ της ιδιοσυχνότητας f_0 , της συχνότητας f που μετρά ο παρατηρητής, και της ακτινικής ταχύτητας v .

37.26 Να μπορείτε να μεταβείτε στην εξίσωση της μετατόπισης του μήκους κύματος από την εξίσωση της μετατόπισης της συχνότητας και αντίστροφα.

37.27 Όταν η ακτινική ταχύτητα είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, να εφαρμόσετε την προσεγ-

γιστική σχέση που συνδέει μεταξύ τους τη μετατόπιση $\Delta\lambda$, το ιδιομήκος λ_0 και την ακτινική ταχύτητα v .

37.28 Να γνωρίζετε ότι υπάρχει μετατόπιση στη συχνότητα ακόμα και όταν η ταχύτητα της πηγής είναι κάθετη στην ευθεία που ενώνει την πηγή με τον παρατηρητή, λόγω της διαστολής του χρόνου.

37.29 Στο εγκάρσιο φαινόμενο Doppler να εφαρμόσετε τη σχέση που συνδέει τη συχνότητα f που μετρά ο παρατηρητής, την ιδιοσυχνότητα f_0 και τη σχετική ταχύτητα v .

Βασικές Ιδέες

• Όταν μια πηγή φωτός και ένας ανιχνευτής φωτός βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους, το μήκος κύματος του φωτός που μετρείται στο σύστημα ηρεμίας της πηγής είναι το ιδιομήκος κύματος λ_0 . Το μήκος κύματος λ που ανιχνεύεται είναι μεγαλύτερο (ερυθρά μετατόπιση) ή μικρότερο (κυανή μετατόπιση), ανάλογα με το αν η απόσταση μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή αυξάνεται ή ελαττώνεται.

• Όταν η απόσταση αυξάνεται, τα μήκη κύματος συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (\text{η πηγή και ο ανιχνευτής απομακρύνονται μεταξύ τους})$$

όπου $\beta = v/c$ και v είναι η σχετική, ακτινική ταχύτητα (κατά μήκος της ευθείας που συνδέει την πηγή με τον παρατηρητή). Αν η απόσταση ελαττώνεται, το πρόσημο μπροστά από το σύμβολο β είναι αντίθετο.

• Για ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα c , το μέτρο της μετατόπισης του μήκους κύματος $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ συνδέεται προσεγγιστικά με το v μέσω της σχέσης:

$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} c \quad (v \ll c).$$

• Αν η σχετική κίνηση της πηγής του φωτός είναι κάθετη προς την ευθεία που ενώνει την πηγή με τον ανιχνευτή, η παρατηρήσιμη συχνότητα f παρατηρήσιμη συνδέεται με την ιδιοσυχνότητα f_0 μέσω της σχέσης:

$$f = f_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Αυτό το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler οφείλεται στη διαστολή του χρόνου.

Το Φαινόμενο Doppler για το Φως

Στην Ενότητα 17-7 μελετήσαμε το φαινόμενο Doppler (το οποίο σχετίζεται με μια αλλαγή στην παρατηρούμενη συχνότητα) για ηχητικά κύματα και βρήκαμε ότι εξαρτάται από: την ταχύτητα της πηγής και την ταχύτητα του παρατηρητή ως προς τον αέρα.

Η κατάσταση για τα φωτεινά κύματα είναι διαφορετική, καθώς αυτά δεν χρειάζονται μέσο για να διαδοθούν (μπορούν και διαδίδονται ακόμα και στο κενό). Το φαινόμενο Doppler για τα φωτεινά κύματα εξαρτάται μόνο από τη σχετική ταχύτητα $\vec{v}$ ανάμεσα στον παρατηρητή και στην πηγή, όπως αυτή μετρείται στο σύστημα αναφοράς του ενός από τους δύο. Ας συμβολίσουμε με f_0 την **ιδιοσυχνότητα** της πηγής, δηλαδή τη συχνότητα η οποία μετρείται από έναν παρατηρητή στο σύστημα ηρεμίας της πηγής. Έστω f η συχνότητα η οποία παρατηρείται από έναν παρατηρητή, ο οποίος κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ σε σχέση με το σύστημα ηρεμίας. Σε αυτή την περίπτωση αν η $\vec{v}$ αντιστοιχεί σε απομάκρυνση του παρατηρητή από την πηγή, η f θα δίνεται από

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (\text{η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους}) \quad (37-31)$$

όπου $\beta = v/c$.

Επειδή όταν μελετάμε το φως συνήθως μετράμε το μήκος κύματος και όχι τη συχνότητα, ας ξαναγράψουμε την Εξ. 37-31 αντικαθιστώντας την f με το c/λ και την f_0 με το c/λ_0 , όπου λ είναι το μετρούμενο μήκος κύματος και λ_0 είναι το **ιδιομήκος κύματος** (δηλαδή, το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην f_0). Απαλείφοντας τη c και στα δύο μέλη της εξίσωσης προκύπτει:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (\text{η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους}). \quad (37-32)$$

Όταν η $\vec{v}$ αντιστοιχεί σε κίνηση του παρατηρητή προς την πηγή, στις Εξ. 37-31 και 37-32 θα πρέπει να αλλάξουμε τα πρόσημα μπροστά και στα δύο β .

Όταν η απόσταση αυξάνεται, προκύπτει από την Εξ. 37-32 (επειδή στον αριθμητή υπάρχει πρόσθεση και στον παρονομαστή αφαίρεση) ότι το μετρούμενο μήκος κύματος είναι μεγαλύτερο από το ιδιομήκος κύματος. Αυτό το είδος μετατόπισης Doppler ονομάζεται *ερυθρά μετατόπιση*, αν και ο χαρακτηρισμός ερυθρά δεν σημαίνει ότι το μετρούμενο μήκος κύματος αντιστοιχεί σε *κόκκινο* ή ακόμη και σε ορατή ακτινοβολία. Ο όρος χρησιμεύει απλώς ως υπενθύμιση, διότι το κόκκινο βρίσκεται στο άκρο του ορατού φάσματος με το *μεγαλύτερο* μήκος κύματος. Άρα το λ είναι μεγαλύτερο από το λ_0 . Ομοίως, όταν η απόσταση μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή ελαττώνεται, το λ είναι μικρότερο από το λ_0 και αυτή η μετατόπιση Doppler ονομάζεται *κυανή*.

Φαινόμενο Doppler για Χαμηλές Ταχύτητες

Για ταχύτητες χαμηλές σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός ($\beta \ll 1$) η Εξ. 37-31 μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ως προς το β και να προσεγγισθεί ως εξής

$$f = f_0(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2) \quad (\text{η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους, } \beta \ll 1). \quad (37-33)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για το φαινόμενο Doppler των ηχητικών κυμάτων (ή για κάθε είδους κυμάτων εκτός από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα) για χαμηλές ταχύτητες έχει τους ίδιους δύο πρώτους όρους αλλά διαφορετικό συντελεστή στον τρίτο όρο. Επομένως τα σχετικιστικά φαινόμενα για πηγές φωτεινών κυμάτων (αλλά και παρατηρητές) που κινούνται με χαμηλές ταχύτητες εμφανίζονται μόνο στον όρο που περιέχει το β^2 .

Η συσκευή ραντάρ της αστυνομίας χρησιμοποιεί το φαινόμενο Doppler με μικροκύματα για να μετρήσει την ταχύτητα v ενός αυτοκινήτου. Μια πηγή στη συσκευή του ραντάρ εκπέμπει μια δέσμη μικροκυμάτων συγκεκριμένης (ίδιο) συχνότητας f_0 κατά μήκος του δρόμου. Ένα αυτοκίνητο το οποίο κινείται προς το ραντάρ αναχαιτίζει τη δέσμη αλλά η συχνότητά της είναι λίγο μεγαλύτερη από τη f_0 λόγω της σχετικής κίνησης του αυτοκινήτου ως προς την πηγή και του φαινομένου Doppler. Το αυτοκίνητο ανακλά τη δέσμη προς τη μονάδα του ραντάρ. Ένας δέκτης στη συσκευή του ραντάρ δέχεται την ανακλώμενη δέσμη αλλά επειδή το αυτοκίνητο κινείται ως προς το ραντάρ, η συχνότητα της δέσμης είναι ακόμα πιο μεγάλη. Η συσκευή του ραντάρ συγκρίνει την παρατηρούμενη συχνότητα με την ιδιοσυχνότητα f_0 και έτσι υπολογίζει την ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Αστρονομικό Φαινόμενο Doppler

Σε αστρονομικές παρατηρήσεις αστέρων, γαλαξιών και άλλων πηγών φωτός, μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο γρήγορα οι πηγές αυτές κινούνται, κατευθυνόμενες προς εμάς ή απομακρυνόμενες από μας μετρώντας τη *μετατόπιση Doppler* του φωτός. Αν ένα συγκεκριμένο άστρο βρίσκεται σε ηρεμία σε σχέση μ' εμάς, το φως το οποίο θα λάβουμε από αυτό, θα έχει μια συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα f_0 . Όμως αν το άστρο κινείται απομακρυνόμενο από εμάς ή κατευθυνόμενο προς εμάς, τότε το φως που θα ανιχνεύσουμε θα έχει μια συχνότητα f η οποία θα είναι μετατοπισμένη ως προς τη f_0 εξαιτίας του φαινομένου Doppler. Αυτή η μετατόπιση Doppler οφείλεται μόνο στην ακτινική κίνηση του άστρου (δηλαδή στην κίνησή του κατευθείαν προς εμάς ή κατευθείαν μακριά από εμάς). Μετρώντας λοιπόν αυτή τη μετατόπιση Doppler μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο την *ακτινική ταχύτητα* v του άστρου, δηλαδή μόνο την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας του άστρου ως προς εμάς.

Ας υποθέσουμε ότι ένα άστρο (ή οποιαδήποτε άλλη φωτεινή πηγή) απομακρύνεται από εμάς με ακτινική ταχύτητα v η οποία είναι αρκετά μικρή (δηλαδή το β είναι αρκετά μικρό) ώστε στην Εξ. 37-33 να θεωρήσουμε τον όρο β^2 αμελητέο. Τότε θα έχουμε

$$f = f_0(1 - \beta). \quad (37-34)$$

Επειδή οι αστρονομικές μετρήσεις που σχετίζονται με το φως πραγματοποιούνται με μήκη κύματος αντί για συχνότητες, ας ξαναγράψουμε την Εξ. 37-34 ως εξής:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} (1 - \beta),$$

ή
$$\lambda = \lambda_0 (1 - \beta)^{-1}.$$

Επειδή θεωρήσαμε ότι το β είναι μικρό, μπορούμε να αναπτύξουμε την παράσταση $(1 - \beta)^{-1}$ σε δυναμοσειρά, και να κρατήσουμε μόνο τον όρο στον οποίο το β είναι στην πρώτη δύναμη. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta),$$

ή
$$\beta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}. \quad (37-35)$$

Αντικαθιστώντας το β με v/c και το $\lambda - \lambda_0$ με $|\Delta\lambda|$ οδηγούμαστε στην

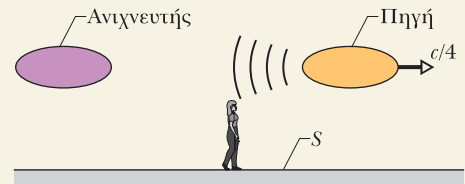
$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} c \quad (\text{ακτινική ταχύτητα μιας φωτεινής πηγής, } v \ll c). \quad (37-36)$$

Η διαφορά $\Delta\lambda$ ονομάζεται *μετατόπιση Doppler του μήκους κύματος* της φωτεινής πηγής. Υπολογίζουμε την απόλυτη τιμή της ώστε να έχουμε πάντα το μέτρο της μετατόπισης. Η Εξ. 37-36 είναι μια προσέγγιση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν $v \ll c$.



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3

Το σχήμα δείχνει μια πηγή φωτός η οποία εκπέμπει φως ιδιοσυχνότητας f_0 ενώ κινείται, προς τα δεξιά, με ταχύτητα $c/4$ όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς. Το σχήμα επίσης δείχνει έναν ανιχνευτή φωτός ο οποίος μετρά τη συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτός f , με $f > f_0$. (α) Ο ανιχνευτής κινείται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά; (β) Η ταχύτητα του ανιχνευτή όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς S είναι μεγαλύτερη από $c/4$, μικρότερη από $c/4$ ή ίση με $c/4$;



Εγκάρσιο Φαινόμενο Doppler

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει το φαινόμενο Doppler και εδώ αλλά και στο κεφάλαιο 17, μόνο για την περίπτωση που η πηγή και ο παρατηρητής, είτε πλησιάζουν είτε απομακρύνονται πάνω στην ευθεία που τους συνδέει. Στο Σχ. 37-12 παρουσιάζεται η περίπτωση ενός διαφορετικού προβλήματος, όπου η πηγή προσπερνάει έναν παρατηρητή D . Όταν η πηγή φτάσει στο σημείο P , η ταχύτητά της είναι κάθετη στην ευθεία που συνδέει τα P και D και εκείνη τη στιγμή η πηγή ούτε απομακρύνεται αλλά ούτε και πλησιάζει τον παρατηρητή. Αν η πηγή εκπέμπει ηχητικά κύματα συχνότητας f_0 τότε ο παρατηρητής D ανιχνεύει αυτή τη συχνότητα (δηλαδή δεν υπάρχει φαινόμενο Doppler) όταν ανιχνεύει τα κύματα που εκπέμφθηκαν στο σημείο P . Όμως αν η πηγή εκπέμπει φωτεινά κύματα, τότε υπάρχει φαινόμενο Doppler, το οποίο ονομάζεται **εγκάρσιο φαινόμενο Doppler**. Σ' αυτή την περίπτωση, η συχνότητα του φωτός που ανιχνεύεται όταν η πηγή ήταν στο P είναι

$$f = f_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{εγκάρσιο φαινόμενο Doppler}) \quad (37-37)$$

Για χαμηλές ταχύτητες ($\beta \ll 1$) η Εξ. 37-37 μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά του β και να προσεγγισθεί ως εξής:

$$f = f_0 (1 - \frac{1}{2}\beta^2) \quad (\text{χαμηλές ταχύτητες}) \quad (37-38)$$

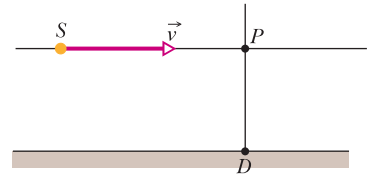
Σε αυτή την εξίσωση ο πρώτος όρος είναι αυτός που θα περιμέναμε για τα ηχητικά κύματα και οι σχετικιστικές διορθώσεις για τη συχνότητα μιας κινούμενης με χαμηλή ταχύτητα φωτεινής πηγής ή ενός παρατηρητή εμφανίζονται στον όρο β^2 .

Θεωρητικά ένα ραντάρ της αστυνομίας μπορεί να υπολογίσει την ταχύτητα ενός αυτοκινήτου ακόμα και στην περίπτωση που η δέσμη του ραντάρ είναι κάθετη στην τροχιά του αυτοκινήτου. Όμως η Εξ. 37-38 μας δηλώνει ότι επειδή το β είναι πολύ μικρό ακόμα και για ένα γρήγορο αυτοκίνητο, ο σχετικιστικός όρος $\beta^2/2$ στο εγκάρσιο φαινόμενο Doppler είναι εξαιρετικά μικρός. Επομένως $f \approx f_0$, και το ραντάρ υπολογίζει μηδενική ταχύτητα.

Το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler είναι στην πραγματικότητα ακόμα ένας έλεγχος της διαστολής του χρόνου. Αν ξαναγράψουμε την Εξ. 37-37 αντικαθιστώντας τη συχνότητα με την περίοδο της ταλάντωσης του εκπεμπόμενου φωτεινού κύματος από τη σχέση $T = 1/f$ θα έχουμε ότι

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma T_0, \quad (37-39)$$

στην οποία $T_0 (= 1/f_0)$ είναι η **ιδιοπερίοδος** της πηγής. Σύγκριση με την Εξ. 37-9 μας δείχνει ότι η Εξ. 37-39 είναι στην πραγματικότητα η εξίσωση της διαστολής του χρόνου.



Σχήμα 37-12 Μια φωτεινή πηγή κινείται με ταχύτητα καθώς προσπερνά έναν ανιχνευτή στο D . Η ειδική θεωρία της σχετικότητας προβλέπει εγκάρσιο φαινόμενο Doppler καθώς η πηγή περνά από το σημείο P , όπου η διεύθυνση της ταχύτητας είναι κάθετη στην ευθεία που ενώνει τα P και D . Αντίθετα η κλασική θεωρία δεν προβλέπει τέτοιο φαινόμενο.

37-6 ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Μαθησιακοί Στόχοι

Μετά από τη μελέτη αυτής της Ενότητας θα πρέπει να μπορείτε:

- 37.30** Να αντιλαμβάνεστε ότι οι κλασικές εκφράσεις για την ορμή και την κινητική ενέργεια είναι προσεγγιστικά σωστές όταν οι ταχύτητες είναι χαμηλές, ενώ οι σχετικιστικές εκφράσεις είναι σωστές για οποιαδήποτε ταχύτητα είναι εφικτό να υπάρξει στη φύση.
- 37.31** Να εφαρμόζετε τη σχέση μεταξύ της ορμής, της μάζας και της σχετικής ταχύτητας.
- 37.32** Να γνωρίζετε ότι ένα σώμα έχει ενέργεια μάζας (ή ενέργεια ηρεμίας) που συνδέεται με τη μάζα του σώματος.
- 37.33** Να εφαρμόζετε τις σχέσεις μεταξύ της ολικής ενέργειας, της ενέργειας ηρεμίας, της κινητικής ενέργειας, της ορμής, της μάζας, της ταχύτητας, της παραμέτρου της ταχύτητας και του συντελεστή Lorentz.
- 37.34** Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα της κινητικής ενέργειας ως προς τον λόγο v/c (δηλαδή, της ταχύτητας ενός σώματος ως προς την ταχύτητα του φωτός), τόσο για την κλασική όσο και για τη σχετικιστική έκφραση της κινητικής ενέργειας.
- 37.35** Να εφαρμόζετε το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για να συνδέσετε το έργο μιας ασκούμενης δύναμης με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας που προκύπτει.
- 37.36** Σε μια αντίδραση να εφαρμόζετε τη σχέση μεταξύ της τιμής Q και της μεταβολής της ενέργειας μάζας.
- 37.37** Σε μια αντίδραση να αντιλαμβάνεστε τη σχέση μεταξύ του αλγεβρικού προσήμου της Q με το αν η ενέργεια απελευθερώνεται ή απορροφάται.

Βασικές Ιδέες

- Οι επόμενοι ορισμοί της γραμμικής ταχύτητας $\vec{p}$, της κινητικής ενέργειας K και της ολικής ενέργειας E ενός σωματιδίου μάζας m ισχύουν για κάθε ταχύτητα που είναι εφικτή στη φύση:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \gamma m \vec{v} && (\text{ορμή}), \\ E &= mc^2 + K = \gamma mc^2 && (\text{ολική ενέργεια}), \\ K &= mc^2(\gamma - 1) && (\text{κινητική ενέργεια}). \end{aligned}$$

Εδώ γ είναι ο συντελεστής Lorentz για την κίνηση του σωματιδίου, και mc^2 είναι η **ενέργεια μάζας** ή **ενέργεια αδράνειας** που συνδέεται με τη μάζα του σωματιδίου.

- Αυτές οι εξισώσεις οδηγούν στις σχέσεις:

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$$

και

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$

- Όταν σε ένα σύστημα σωματιδίων συμβαίνει χημική ή πυρηνική αντίδραση, η Q της αντίδρασης είναι η αρνητική μεταβολή της ολικής ενέργειας μάζας του συστήματος:

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M c^2,$$

όπου M_i είναι η συνολική μάζα του συστήματος πριν από την αντίδραση και M_f είναι η ολική μάζα μετά την αντίδραση.

Μια Νέα Ματιά στην Ορμή

Έστω ότι ένας αριθμός παρατηρητών, που ο καθένας βρίσκεται σε διαφορετικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς, παρατηρεί μια απομονωμένη σύγκρουση ανάμεσα σε δύο σωματίδια. Στην κλασική μηχανική έχουμε δει ότι –αν και οι παρατηρητές μετρούν διαφορετικές ταχύτητες για τα συγκρουόμενα σωματίδια– όλοι συμφωνούν ότι ο νόμος της διατήρησης της ορμής ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι κάθε παρατηρητής μετρώντας την ολική ορμή του συστήματος των σωματιδίων μετά την κρούση βρίσκει ότι είναι η ίδια με την ολική ορμή πριν την κρούση.

Πώς αυτό το αποτέλεσμα επηρεάζεται από τη σχετικότητα; Βρίσκουμε ότι αν συνεχίσουμε να ορίζουμε την ορμή $\vec{p}$ ενός σωματιδίου ως $m\vec{v}$, δηλαδή το γινόμενο της μάζας του επί την ταχύτητά του, η ολική ορμή δεν διατηρείται για τους παρατηρητές σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Επομένως, πρέπει να αλλάξουμε τον ορισμό της ορμής έτσι ώστε να εξακολουθεί να ισχύει ο νόμος της διατήρησής της.

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα x . Στην κλασική μηχανική η ορμή του έχει μέτρο:

$$p = mv = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{κλασική μηχανική}), \quad (37-40)$$

όπου Δx είναι η απόσταση την οποία έχει διανύσει το σωματίδιο σε χρόνο Δt . Για να βρούμε μια σχετικιστική έκφραση για την ορμή θα ξεκινήσουμε από ένα νέο ορισμό

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0}.$$

Εδώ όπως και πριν Δx είναι η απόσταση την οποία έχει διανύσει το σωματίδιο όπως αυτή μετρείται από έναν παρατηρητή που παρακολουθεί το σωματίδιο. Όμως ο χρόνος Δt_0 είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί αυτή η απόσταση, όχι όμως μετρημένος από τον παρατηρητή που βλέπει το σωματίδιο αλλά από έναν άλλο παρατηρητή ο οποίος κινείται μαζί με το σωματίδιο. Το σωματίδιο βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας ως προς τον δεύτερο παρατηρητή, επομένως αυτός ο μετρούμενος χρόνος είναι ο ιδιόχρονος της κίνησης.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για τη διαστολή του χρόνου $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ (Εξ. 37-9) μπορούμε να γράψουμε

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \gamma.$$

Όμως επειδή $\Delta x/\Delta t$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου v , έχουμε ότι

$$p = \gamma mv \quad (\text{σχετικιστική ορμή}) \quad (37-41)$$

Σημειώστε ότι αυτή η εξίσωση διαφέρει από τον κλασικό ορισμό της ορμής (Εξ. 37-40) μόνο κατά τον συντελεστή Lorentz γ . Όμως η διαφορά αυτή είναι σημαντική. Αντίθετα από την κλασική ορμή, η σχετικιστική ορμή τείνει στο άπειρο όταν η ταχύτητα v τείνει στην c .

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό της Εξ. 37-41, γράφοντάς τον σε διανυσματική μορφή

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \quad (\text{σχετικιστική ορμή}) \quad (37-42)$$

Η εξίσωση αυτή δίνει τον σωστό ορισμό της ορμής για όλες τις ταχύτητες που είναι δυνατό να υπάρξουν στη φύση. Για ταχύτητα που είναι πολύ μικρότερη από την c , η Εξ. 37-42 εκφυλίζεται στον κλασικό ορισμό της ορμής ($\vec{p} = m\vec{v}$).

Μια Νέα Ματιά στην Ενέργεια

Ενέργεια Μάζας

Η επιστήμη της χημείας αρχικά αναπτύχθηκε στηριζόμενη στην αντίληψη ότι στις χημικές αντιδράσεις η μάζα και η ενέργεια διατηρούνται χωριστά. Το 1905, ο Einstein έδειξε ότι ως αποτέλεσμα της θεωρίας του για την ειδική σχετικότητα η μάζα μπορεί να θεωρηθεί μορφή ενέργειας. Συνεπώς ο νόμος διατήρησης της ενέργειας είναι στην πραγματικότητα ο νόμος διατήρησης της μάζας-ενέργειας.

Σε μια *χημική αντίδραση* (μια διαδικασία κατά την οποία άτομα ή μόρια αλληλεπιδρούν) το ποσό της μάζας το οποίο μετατρέπεται σε άλλα είδη ενέργειας (ή το αντίθετο) είναι ένα τόσο πολύ μικρό ποσοστό της συνολικής μάζας που λαμβάνει μέρος στην αντίδραση που δεν υπάρχει καμία περίπτωση να το μετρήσουμε ακόμα και με τις καλύτερες εργαστηριακές ζυγαριές. Η μάζα και η ενέργεια πραγματικά *μοιάζουν* να διατηρούνται ξεχωριστά. Όμως σε μια *πυρηνική αντίδραση*, (στην οποία οι πυρήνες των ατόμων ή τα στοιχειώδη σωματίδια αλληλεπιδρούν), η ενέργεια που απελευθερώνεται είναι σε πολλές περιπτώσεις περίπου ένα εκατομμύριο φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια που απελευθερώνεται σε μια χημική αντίδραση, και κατά συνέπεια η αλλαγή στις μάζες μπορεί εύκολα να μετρηθεί.

Η μάζα m ενός αντικειμένου και η ισοδύναμη ενέργειά του E_0 συνδέονται με τη σχέση

$$E_0 = mc^2. \quad (37-43)$$

Η σχέση αυτή χωρίς τον δείκτη 0 στην ενέργεια είναι η πιο γνωστή επιστημονική εξίσωση όλων των εποχών. Αυτή η ενέργεια η οποία συνδέεται με τη μάζα ενός αντικειμένου ονομάζεται **ενέργεια μάζας** ή **ενέργεια ηρεμίας**. Το δεύτερο όνομα υποδηλώνει ότι η E_0 είναι η ενέργεια την οποία έχει το αντικείμενο ακόμα και όταν βρίσκεται σε ηρεμία, εξαιτίας του γεγονότος πως έχει μάζα. (Αν συνεχίσετε τη μελέτη της φυσικής και πέρα από αυτό το βιβλίο, θα συναντήσετε πιο αναλυτικές συζητήσεις για τη σχέση ανάμεσα στη μάζα και στην ενέργεια. Μπορεί ακόμα να συναντήσετε και διαφωνίες για το τι ακριβώς είναι αυτή η σχέση και τι σημαίνει.)

Ο Πίνακας 37-3 μας δίνει (κατά προσέγγιση) τις τιμές της ενέργειας ηρεμίας ή ενέργειας μάζας μερικών αντικειμένων. Η ενέργεια μάζας ενός σεντ του αμερικανικού δολαρίου είναι τεράστια· το ισοδύναμο ποσό σε ηλεκτρική ενέργεια θα μπορούσε να κοστίσει περισσότερο από ένα εκατομμύριο δολάρια. Από την άλλη μεριά η συνολική ηλεκτρική ενέργεια την οποία παράγουν σε ένα χρόνο οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής αντιστοιχεί σε μια μάζα μόνο μερικών εκατοντάδων χιλιογράμμων ύλης (πέτρες, σουβλάκια ή οτιδήποτε άλλο).

Στην πράξη οι μονάδες του διεθνούς συστήματος SI σπάνια χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς της Εξ. 37-43, γιατί είναι τόσο μεγάλες που καταντούν άβολες. Οι μάζες συνήθως μετρώνται σε ατομικές μονάδες μάζας

$$1 \text{ u} = 1.660\,538\,86 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad (37-44)$$

και οι ενέργειες σε ηλεκτρονιοβόλτ ή σε πολλαπλάσιά του

$$1 \text{ eV} = 1.602\,176\,462 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (37-45)$$

Στις μονάδες των Εξ. 37-44 και 37-45, ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας c^2 έχει τις τιμές:

$$\begin{aligned} c^2 &= 9.314\,940\,13 \times 10^8 \text{ eV/u} = 9.314\,940\,13 \times 10^5 \text{ keV/u} \\ &= 931.494\,013 \text{ MeV/u}. \end{aligned} \quad (37-46)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 37-3

Τα Ενεργειακά Ισοδύναμα Μερικών Αντικειμένων

Αντικείμενο	Μάζα (kg)	Ενεργειακό Ισοδύναμο
Ηλεκτρόνιο	$\approx 9.11 \times 10^{-31}$	$\approx 8.19 \times 10^{-14} \text{ J}$ ($\approx 511 \text{ keV}$)
Πρωτόνιο	$\approx 1.67 \times 10^{-27}$	$\approx 1.50 \times 10^{-10} \text{ J}$ ($\approx 938 \text{ MeV}$)
Άτομο ουρανίου	$\approx 3.95 \times 10^{-25}$	$\approx 3.55 \times 10^{-8} \text{ J}$ ($\approx 225 \text{ GeV}$)
Σωματίο σκόνης	$\approx 1 \times 10^{-13}$	$\approx 1 \times 10^4 \text{ J}$ ($\approx 2 \text{ kcal}$)
Σεντ αμερικανικού δολαρίου	$\approx 3.1 \times 10^{-3}$	$\approx 2.8 \times 10^{14} \text{ J}$ ($\approx 78 \text{ GW} \cdot \text{h}$)

Ολική Ενέργεια

Η Εξ. 37-43 υπολογίζει, για κάθε αντικείμενο, την ενέργεια ηρεμίας E_0 η οποία αντιστοιχεί στη μάζα του αντικειμένου m , ανεξάρτητα αν το αντικείμενο αυτό είναι ακίνητο ή κινείται. Αν το αντικείμενο κινείται, τότε έχει επιπλέον ενέργεια με τη μορφή της κινητικής ενέργειας K . Αν υποθέσουμε ότι η δυναμική ενέργεια του αντικειμένου είναι μηδενική τότε η ολική ενέργειά του E θα είναι το άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας του και της κινητικής ενέργειάς του.

$$E = E_0 + K = mc^2 + K. \quad (37-47)$$

Αν και δεν θα το αποδείξουμε, η ολική ενέργεια ενός αντικειμένου σε κίνηση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$E = \gamma mc^2, \quad (37-48)$$

όπου γ είναι ο συντελεστής Lorentz της κίνησης του σώματος.

Από το Κεφ. 7 μέχρι τώρα, έχουμε μελετήσει πολλά παραδείγματα στα οποία παρουσιάζονται αλλαγές στην ολική ενέργεια ενός σωματιδίου ή ενός συστήματος σωμάτων. Όμως στις αναλύσεις αυτές δεν συμπεριλάβαμε την ενέργεια μάζας γιατί σε αυτές τις περιπτώσεις οι μεταβολές της ενέργειας μάζας ήταν είτε μηδενικές, είτε πολύ μικρές ώστε να μετρηθούν και κατά συνέπεια μπορούσαμε να τις αγνοήσουμε. Ο νόμος της διατήρησης της ολικής ενέργειας ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία οι μεταβολές της ενέργειας μάζας είναι σημαντικές. Επομένως ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει στην ενέργεια μάζας, ο παρακάτω νόμος που διατυπώθηκε και στην Εν. 8-5 ισχύει ακόμα:



Η ολική ενέργεια E ενός *μονωμένου συστήματος* δεν μπορεί να αλλάξει.

Για παράδειγμα, αν η ολική ενέργεια μάζας δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων σε μονωμένο σύστημα μειώνεται, κάποιο άλλο είδος ενέργειας στο σύστημα θα πρέπει να αυξάνεται διότι η ολική ενέργεια του συστήματος δεν μπορεί να αλλάξει.

Η Ποσότητα Q Σε ένα σύστημα στο οποίο εξελίσσεται μια χημική ή μια πυρηνική αντίδραση, η αλλαγή στην ολική ενέργεια μάζας του συστήματος εξαιτίας της αντίδρασης συνήθως συμβολίζεται με το Q . Η τιμή του Q στην αντίδραση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left(\begin{array}{c} \text{αρχική ολική ενέργεια} \\ \text{μάζας του συστήματος} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{τελική ολική ενέργεια} \\ \text{μάζας του συστήματος} \end{array} \right) + Q$$

$$\text{ή} \quad E_{0i} = E_{0f} + Q. \quad (37-49)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. 37-43 ($E_0 = mc^2$), μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξ. 37-49 ως προς την αρχική ολική ενέργεια μάζας M_i και την τελική ολική ενέργεια μάζας M_f ως εξής:

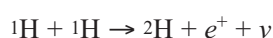
$$M_i c^2 = M_f c^2 + Q$$

$$\text{ή} \quad Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M c^2, \quad (37-50)$$

όπου η μεταβολή της μάζας εξαιτίας της αντίδρασης είναι $\Delta M = M_f - M_i$.

Αν το αποτέλεσμα μιας αντίδρασης είναι η μεταφορά ενέργειας από ενέργεια μάζας των αντιδρώντων σε κινητική ενέργεια των προϊόντων της αντίδρασης, η ολική ενέργεια μάζας του συστήματος E_0 (επομένως και η ολική μάζα του συστήματος) μειώνεται και το Q είναι θετικό. Αν αντίθετα, μια αντίδραση για να πραγματοποιηθεί απαιτεί ότι ενέργεια θα πρέπει να μεταφερθεί σε ενέργεια μάζας, τότε η ολική ενέργεια μάζας του συστήματος E_0 (επομένως και η ολική μάζα του συστήματος) αυξάνεται και το Q είναι αρνητικό.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι δύο πυρήνες υδρογόνου συμμετέχουν σε μια *αντίδραση σύντηξης*, κατά την οποία ενώνονται για να δημιουργήσουν ένα μόνο πυρήνα με ταυτόχρονη απελευθέρωση δύο σωματιδίων:



όπου ο ${}^2\text{H}$ είναι ένας διαφορετικός τύπος πυρήνα υδρογόνου (που εκτός από το πρωτόνιο έχει και ένα νετρόνιο), e^+ είναι ένα ποζιτρόνιο και ν είναι ένα νεutrίνο. Η ολική ενέργεια μάζας (και η ολική μάζα) του παραγόμενου πυρήνα και των δύο απελευθερωμένων σωματιδίων είναι μικρότερη από την ολική ενέργεια μάζας (και την ολική μάζα) των δύο αρχικών πυρήνων υδρογόνου. Επομένως το Q της αντίδρασης σύντηξης είναι θετικό και τότε αναφερόμαστε σε ενέργεια που *απελευθερώνεται* (δηλαδή ενέργεια που μεταφέρεται από ενέργεια μάζας) κατά την αντίδραση. Αυτή η απελευθέρωση ενέργειας είναι σημαντική για μας, διότι η σύντηξη των πυρήνων υδρογόνου στον Ήλιο είναι μέρος της διαδικασίας που έχει τελικό αποτέλεσμα η ηλιακή ακτινοβολία να φτάνει στη Γη καθιστώντας δυνατή την ύπαρξη ζωής.

Κινητική Ενέργεια

Στο Κεφάλαιο 7 ορίσαμε την κινητική ενέργεια K ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα v η οποία είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός c ως εξής:

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (37-51)$$

Όμως αυτή η εξίσωση της κλασικής φυσικής είναι απλώς μια προσέγγιση η οποία δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο όταν η ταχύτητα του σώματος είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε μια σχέση για την κινητική ενέργεια η οποία να είναι σωστή για όλες τις ταχύτητες που είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν στη φύση, ακόμα και για ταχύτητες που είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός c . Λύνοντας την Εξ. 37-47 για την κινητική ενέργεια K και μετά αντικαθιστώντας από την Εξ. 37-48 το E καταλήγουμε στην

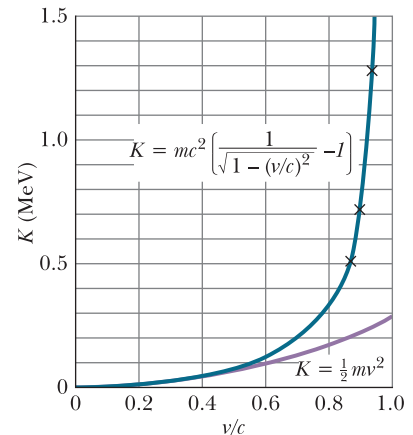
$$K = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) \quad (\text{κινητική ενέργεια}). \quad (37-52)$$

όπου $\gamma (= 1/\sqrt{1 - (v/c)^2})$ είναι ο συντελεστής Lorentz για την κίνηση του σώματος.

Στο Σχ. 37-13 παρουσιάζονται γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου, υπολογισμένη χρησιμοποιώντας τον σωστό ορισμό (Εξ. 37-52) αλλά και με την κλασική προσέγγιση (Εξ. 37-51), ως συνάρτηση του πηλίκου v/c . Παρατηρήστε ότι στην αριστερή πλευρά του γραφήματος –στην περιοχή των χαμηλών ταχυτήτων σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός– οι δύο γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν. Στα προηγούμενα κεφάλαια δουλεύαμε πάντα σε αυτή την περιοχή. Η σύμπτωση των δύο καμπύλων σ' αυτή την περιοχή δικαιολογεί το γεγονός ότι μέχρι τώρα υπολογίζαμε την κινητική ενέργεια χρησιμοποιώντας την κλασική προσέγγιση της Εξ. 37-51. Όμως στη δεξιά περιοχή του γραφήματος, για ταχύτητες κοντά στη c , οι δύο γραφικές παραστάσεις διαφέρουν σημαντικά. Καθώς το πηλίκο v/c πλησιάζει την τιμή 1.0, οι τιμές της κινητικής ενέργειας που υπολογίζονται με τον κλασικό ορισμό αυξάνονται αρκετά αλλά οι τιμές της κινητικής ενέργειας που υπολογίζονται με τον σωστό ορισμό της κινητικής ενέργειας αυξάνονται δραματικά και η κινητική ενέργεια τείνει να απειριστεί όταν το πηλίκο v/c πλησιάζει την τιμή 1.0. Επομένως όταν η ταχύτητα ενός αντικείμενου πλησιάζει την c , *πρέπει απαραίτητα να χρησιμοποιούμε την Εξ. 37-52 κατά τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας του σώματος.*

Έργο Το Σχ. 37-13 επίσης μας δίνει μια πληροφορία που σχετίζεται με το έργο που πρέπει να καταναλώσουμε σε ένα αντικείμενο για να αυξηθεί το μέτρο της ταχύτητάς του έστω κατά 1%. Το απαιτούμενο έργο W είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔK του σώματος. Αν η μεταβολή αυτή συντελεσθεί όταν περιοχή μικρών ταχυτήτων, στην αριστερή πλευρά

Καθώς το v/c πλησιάζει προς το 1.0, η πραγματική κινητική ενέργεια πλησιάζει προς το άπειρο.



Σχήμα 37-13 Απεικονίζεται η σχετικιστική (Εξ. 37-52) και η κλασική (Εξ. 37-51) εξίσωση ορισμού της κινητικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου ως συνάρτηση του πηλίκου v/c , δηλαδή της ταχύτητας του ηλεκτρονίου (v) προς την ταχύτητα του φωτός (c). Προσέξτε ότι οι δύο καμπύλες ταυτίζονται στην περιοχή όπου οι ταχύτητες είναι μικρές, ενώ αποκλίνουν έντονα στην περιοχή όπου η ταχύτητα του σωματιδίου πλησιάζει στην ταχύτητα του φωτός. Τα πειραματικά δεδομένα (που σημειώνονται με το σύμβολο $\times$) δείχνουν ότι σε υψηλές ταχύτητες η σχετικιστική καμπύλη συμφωνεί με το πείραμα αλλά η κλασική καμπύλη δεν συμφωνεί.

του Σχ. 37-13, το έργο που απαιτείται για αυτή τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι σχετικά μικρό. Όμως αν η μεταβολή αυτή συντελεσθεί στην περιοχή μεγάλων ταχυτήτων, στη δεξιά πλευρά του Σχ. 37-13, το απαιτούμενο έργο μπορεί να είναι τεράστιο, διότι όταν η ταχύτητα v του σώματος αυξάνεται, η κινητική ενέργεια K αυξάνεται πολύ γρήγορα σ' αυτή την περιοχή. Για να επιταχύνουμε ένα σώμα μέχρι την ταχύτητα του φωτός c , θα πρέπει να του προσφέρουμε, θεωρητικά, άπειρη ποσότητα ενέργειας, κάτι που είναι αδύνατο.

Η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων, των πρωτονίων αλλά και των άλλων σωματιδίων συχνά μετριοούνται σε ηλεκτρονιοβόλτ (eV) και στα πολλαπλάσιά του. Για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο που έχει κινητική ενέργεια 20 MeV μπορεί να περιγραφεί ως ένα ηλεκτρόνιο 20 MeV.

Ορμή και Κινητική Ενέργεια

Στην κλασική μηχανική η ορμή ενός σώματος p ορίζεται ως mv και η κινητική του ενέργεια K ως $\frac{1}{2}mv^2$. Αν από τις δύο αυτές εξισώσεις απαλείψουμε την ταχύτητα του σωματιδίου v , βρίσκουμε μια απευθείας σχέση ανάμεσα στην ορμή και στην κινητική ενέργεια

$$p^2 = 2Km \quad (\text{κλασική μηχανική}). \quad (37-53)$$

Και στη σχετικότητα μπορούμε να βρούμε μια παρόμοια σχέση, απαλείφοντας την v από την εξίσωση ορισμού της σχετικιστικής ορμής (Εξ. 37-41) και την εξίσωση ορισμού της σχετικιστικής κινητικής ενέργειας (Εξ. 37-52). Μετά την απαλοιφή και κάποιες αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στην

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2. \quad (37-54)$$

Με τη βοήθεια της Εξ. 37-47, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την Εξ. 37-54 σε μια σχέση ανάμεσα στην ορμή p και στην ολική ενεργεια E ενός σωματιδίου:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \quad (37-55)$$

Το ορθογώνιο τρίγωνο στο Σχ. 37-14 μπορεί να σας βοηθήσει να θυμάσται εύκολα αυτές τις χρήσιμες σχέσεις. Μπορείτε επίσης να αποδείξετε ότι σ' αυτό το τρίγωνο ισχύουν τα

$$\sin \theta = \beta \quad \text{και} \quad \cos \theta = 1/\gamma. \quad (37-56)$$

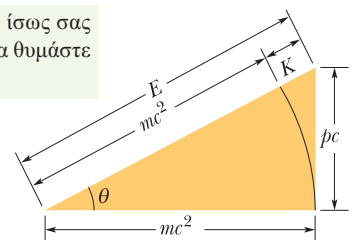
Από την Εξ. 37-55 παρατηρούμε ότι το γινόμενο pc έχει τις ίδιες μονάδες με την ενέργεια E . Επομένως μπορούμε να εκφράζουμε τη μονάδα της ορμής p ως μονάδα ενέργειας διαιρεμένης με την ταχύτητα του φωτός ή, συνήθως στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων ως MeV/ c ή GeV/ c .



ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4

(α) Η κινητική ενέργεια και (β) η ολική ενέργεια ηλεκτρονίου 1 GeV είναι μικρότερη, μεγαλύτερη ή ίση από την αντίστοιχη ενέργεια πρωτονίου 1 GeV;

Αυτή η εικόνα ίσως σας βοηθήσει για να θυμάστε τις σχέσεις.



Σχήμα 37-14 Ένα χρήσιμο μνημονικό διάγραμμα για τις σχετικιστικές εξισώσεις ανάμεσα στην ολική ενέργεια E , την ενέργεια ηρεμίας ή ενέργεια μάζας mc^2 , την κινητική ενέργεια K και το μέτρο της ορμής p .



Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-06 Ενέργεια και ορμή ενός σχετικιστικού ηλεκτρονίου

(α) Πόση είναι η ολική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου 2.53 MeV;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Από την Εξ. 37-47 η ολική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου E είναι το άθροισμα της ενέργειας μάζας του (ή ενέργειας ηρεμίας) mc^2 και της κινητικής του ενέργειας:

$$E = mc^2 + K. \quad (37-57)$$

Υπολογισμοί: Ο χαρακτηρισμός «2.53 MeV» στην εκφώνηση του προβλήματος σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι 2.53 MeV. Για να υπολογίσουμε την ενέργεια μάζας του ηλεκτρονίου mc^2 , αντικαθιστούμε τη μάζα του ηλεκτρονίου m από το Παράρτημα Β,

$$\begin{aligned} mc^2 &= (9.109 \times 10^{-31} \text{ kg})(299\,792\,458 \text{ m/s})^2 \\ &= 8.187 \times 10^{-14} \text{ J}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια διαιρώντας αυτό το αποτέλεσμα με το $1.602 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}$ καταλήγουμε στη γνωστή τιμή των 0.511 MeV για την ενέργεια που αντιστοιχεί στη μάζα των ηλεκτρονίων (σε συμφωνία με τις τιμές του Πίνακα 37-3). Στη συνέχεια η Εξ. 37-57 μας δίνει:

$$E = 0.511 \text{ MeV} + 2.53 \text{ MeV} = 3.04 \text{ MeV}. \quad (\text{Απάντηση})$$

(β) Πόσο είναι το μέτρο της ορμής p των ηλεκτρονίων, μετρημένο σε μονάδες MeV/c; (Προσέξτε ότι το σύμβολο « c » είναι η ταχύτητα του φωτός και όχι κάποια μονάδα μέτρησης.)

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της ορμής p από την ολική ενέργεια E και την ενέργεια μάζας mc^2 από την Εξ. 37-55.

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$

Υπολογισμοί: Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς pc βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} \\ &= \sqrt{(3.04 \text{ MeV})^2 - (0.511 \text{ MeV})^2} = 3.00 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Τελικά, διαιρώντας και τα δύο μέλη με την ταχύτητα του φωτός c καταλήγουμε στην:

$$p = 3.00 \text{ MeV}/c. \quad (\text{Απάντηση})$$



Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-07 Ενέργεια και μια σημαντική διαφορά στη χρονική διάρκεια ενός ταξιδιού

Το πρωτόνιο με τη μεγαλύτερη ενέργεια που έχει ανιχνευθεί ποτέ στις κοσμικές ακτίνες που φθάνουν στη Γη από το διάστημα είχε την εκπληκτικά μεγάλη κινητική ενέργεια $3.0 \times 10^{20} \text{ eV}$ (το ποσό αυτό της ενέργειας είναι αρκετό για να ζεσταθεί ένα κουταλάκι νερού κατά μερικούς βαθμούς).

(α) Πόσος ήταν ο συντελεστής Lorentz γ του πρωτονίου και πόση ήταν η ταχύτητά του v (και τα δύο μετρημένα ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος);

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

1. Ο συντελεστής Lorentz γ του πρωτονίου συσχετίζει την ολική ενέργειά του E με την ενέργεια μάζας του mc^2 μέσω της Εξ. 37-48 ($E = \gamma mc^2$).
2. Η ολική ενέργεια του πρωτονίου είναι το άθροισμα της ενέργειας μάζας του mc^2 και της δοσμένης κινητικής ενέργειάς του K .

Υπολογισμοί: Από τις δύο παραπάνω ιδέες έχουμε ότι:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{mc^2 + K}{mc^2} = 1 + \frac{K}{mc^2}. \quad (37-58)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια μάζας του πρωτονίου mc^2 από τη μάζα του η οποία δίνεται στο Παράρτημα Β. Βρίσκουμε ότι η ενέργεια μάζας του πρωτονίου είναι 938 MeV. Αντικαθιστώντας αυτήν τη τιμή και τη δοσμένη κινητική ενέργεια στην Εξ. 37-58 καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{3.0 \times 10^{20} \text{ eV}}{938 \times 10^6 \text{ eV}} \\ &= 3.198 \times 10^{11} \approx 3.2 \times 10^{11}. \quad (\text{Απάντηση}) \end{aligned}$$

Η τιμή αυτή στην οποία καταλήξαμε για το γ είναι τόσο μεγάλη ώστε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του γ (Εξ. 37-8) για να υπολογίσουμε την ταχύτητα v των σωματιδίων. Δοκιμάστε το αν θέλετε. Ο υπολογιστής τσέπης θα σας πει ότι το β είναι πρακτικά

ίσο με το 1 και συνεπώς η v είναι πρακτικά ίση με c . Στην πραγματικότητα η v είναι σχεδόν ίση με c , αλλά εμείς θέλουμε μια απάντηση μεγαλύτερης ακρίβειας, την οποία μπορούμε να έχουμε αν λύσουμε την Εξ. 37-8 πρώτα ως προς το $1 - \beta$. Για αρχή μπορούμε να γράψουμε

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1 - \beta)}},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το β είναι τόσο κοντά στη μονάδα ώστε το $1 + \beta$ μπορεί πρακτικά να θεωρηθεί ότι είναι ίσο με το 2 (μπορούμε να στρογγυλοποιήσουμε το άθροισμα δύο σχεδόν ίσων αριθμών αλλά όχι τη διαφορά τους). Το μέτρο της ταχύτητας το οποίο ψάχνουμε βρίσκεται στον όρο $1 - \beta$. Λύνοντας ως προς τον όρο αυτό έχουμε

$$1 - \beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{(2)(3.198 \times 10^{11})^2} \\ = 4.9 \times 10^{-24} = 5 \times 10^{-24}.$$

επομένως $\beta = 1 - 5 \times 10^{-24}$

και επειδή $v = \beta c$, το μέτρο της ταχύτητας του πρωτονίου θα είναι

$v = 0.999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c$. (Απάντηση)

β) Ας υποθέσουμε ότι το πρωτόνιο ταξιδεύει κατά μήκος μιας διαμέτρου του Γαλαξία μας (9.8×10^4 έτη φωτός). Πόσο χρόνο κατά προσέγγιση χρειάστηκε το πρωτόνιο για να διανύσει αυτή τη διάμετρο του γαλαξία, όπως αυτός μετρήθηκε στο κοινό σύστημα αναφοράς της Γης και του Γαλαξία;

Λογική: Από το προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι αυτό το υπερσχετικιστικό πρωτόνιο ταξιδεύει με ταχύτητα η οποία είναι ελάχιστα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός c . Από τον ορισμό του έτους φωτός, το φως χρειάζεται ένα χρόνο για να ταξιδέψει απόσταση ίση με ένα έτος φωτός. Επομένως το φως χρειάζεται 9.8×10^4 έτη για να καλύψει 9.8×10^4 έτη φωτός, και αυτό το πρωτόνιο θα χρειαστεί σχεδόν τον ίδιο χρόνο με το φως. Συνεπώς στο σύστημα αναφοράς της Γης και του Γαλαξία ο χρόνος ταξιδιού του πρωτονίου θα είναι

$$\Delta t = 9.8 \times 10^4 \text{ y.} \quad (\text{Απάντηση})$$

(γ) Πόσο χρόνο διαρκεί το ταξίδι του πρωτονίου όπως αυτός μετρείται στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ

1. Το πρόβλημα περιέχει μετρήσεις που πραγματοποιούνται σε δύο (αδρανειακά) συστήματα αναφοράς: το ένα είναι το σύστημα αναφοράς Γης-Γαλαξία, ενώ το άλλο είναι ένα σύστημα αναφοράς συνδεδεμένο με το πρωτόνιο.
2. Το πρόβλημα αναφέρεται και σε δύο γεγονότα: το πρώτο είναι το πέρασμα του πρωτονίου από τη μια άκρη της διαμέτρου του Γαλαξία ενώ το δεύτερο είναι το πέρασμα του πρωτονίου από την αντίθετη άκρη.
3. Το χρονικό διάστημα για τα δύο αυτά γεγονότα μετρημένο στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου είναι το ιδιοχρονικό διάστημα Δt_0 , επειδή τα δύο γεγονότα πραγματοποιούνται στο ίδιο σημείο του συστήματος αναφοράς, που είναι το πρωτόνιο.
4. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ιδιοχρονικό διάστημα Δt_0 αντικαθιστώντας το χρονικό διάστημα Δt που μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς Γης-Γαλαξία στην Εξ. 37-9 ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$) για τη διαστολή του χρόνου. (Προσέξτε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την εξίσωση επειδή μία από τις χρονικές μετρήσεις είναι ο ιδιόχρονος. Ωστόσο, θα πάρουμε την ίδια σχέση αν χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz).

Υπολογισμοί: Λύνοντας την Εξ. 37-9 για Δt_0 και αντικαθιστώντας το γ από το ερώτημα (α) και το Δt από το ερώτημα (β) καταλήγουμε στην

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9.8 \times 10^4 \text{ y}}{3.198 \times 10^{11}} \\ = 3.06 \times 10^{-7} \text{ y} = 9.7 \text{ s.} \quad (\text{Απάντηση})$$

Στο σύστημα αναφοράς μας, το ταξίδι του πρωτονίου διαρκεί 98000 χρόνια. Στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου το ταξίδι του διαρκεί 9.7 s! Όπως δηλώσαμε στην αρχή αυτού Κεφαλαίου, η σχετική κίνηση μπορεί να αλλάξει τον ρυθμό με τον οποίο κυλάει ο χρόνος και το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ένα από τα πιο ακραία παραδείγματα αυτού του φαινομένου.





Ανασκόπηση και Σύνοψη

Τα Αξιώματα Η ειδική θεωρία της σχετικότητας του Einstein βασίζεται στα παρακάτω δύο αξιώματα:

1. Οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι για παρατηρητές σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Κανένα σύστημα αναφοράς δεν είναι προτιμητέο σε σχέση με κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς.
2. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c σε όλες τις διευθύνσεις και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Η ταχύτητα του φωτός c στο κενό είναι ένα ανώτατο όριο ταχύτητας που δεν μπορεί να ξεπεραστεί από κανένα σώμα το οποίο μεταφέρει ενέργεια ή πληροφορία.

Συντεταγμένες ενός Γεγονότος Ένα γεγονός καθορίζεται από τρεις συντεταγμένες χώρου και μια συντεταγμένη χρόνου. Ένας στόχος της θεωρίας της ειδικής σχετικότητας είναι να συσχετίσει αυτές τις συντεταγμένες όπως αυτές ορίζονται από δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση ο ένας ως προς τον άλλο.

Ταυτόχρονα Γεγονότα Αν δύο παρατηρητές βρίσκονται σε σχετική κίνηση ο ένας ως προς τον άλλο, τότε γενικά δεν θα συμφωνούν αν δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα ή όχι.

Διαστολή του Χρόνου Αν δύο διαδοχικά γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το χρονικό διάστημα Δt_0 ανάμεσά τους, το οποίο μετρείται από ένα μόνο ρολόι, που βρίσκεται στη θέση στην οποία συμβαίνουν, είναι ο **ιδιόχρονος** μεταξύ των γεγονότων. Παρατηρητές που βρίσκονται σε συστήματα αναφοράς τα οποία κινούνται σε σχέση με αυτό το σύστημα αναφοράς θα μετρήσουν μεγαλύτερη τιμή για το χρονικό διάστημα ανάμεσα σ' αυτά τα γεγονότα. Για έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται με σχετική ταχύτητα v , το χρονικό διάστημα που μετράει δίνεται από

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Delta t_0 \quad (\text{διαστολή του χρόνου}) \quad (37-7 \text{ έως } 37-9)$$

Εδώ $\beta = v/c$ είναι η **παράμετρος ταχύτητας** και $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ είναι ο **συντελεστής Lorentz**. Σημαντικό αποτέλεσμα της διαστολής του χρόνου είναι ότι τα ρολόγια τα οποία κινούνται σε σχέση με έναν παρατηρητή δείχνουν ότι καθυστερούν.

Συστολή του Μήκους Το μήκος L_0 ενός αντικειμένου όπως αυτό μετρείται από έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο το αντικείμενο ηρεμεί, ονομάζεται το **ιδιομήκος** του αντικειμένου. Παρατηρητές που βρίσκονται σε συστήματα αναφοράς τα οποία κινούνται σε σχέση με αυτό το σύστημα και παράλληλα με αυτό το μήκος θα μετρήσουν μικρότερο μήκος. Για έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται με σχετική ταχύτητα v , το μήκος που μετράει δίνεται από

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad (\text{συστολή του μήκους}) \quad (37-13)$$

Μετασχηματισμοί του Lorentz Οι μετασχηματισμοί του Lorentz συνδέουν τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος, όπως αυτές παρατηρούνται από παρατηρητές σε δύο αδρανειακά συστήματα S και S' , όπου το S' κινείται ως προς το S με ταχύτητα v στη θετική κατεύθυνση των αξόνων x και x' . Οι τέσσερις συντεταγμένες συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad (37-21)$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων Όταν σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα u' κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x' και το S' κινείται με ταχύτητα v παράλληλα με την κατεύθυνση x ενός δεύτερου συστήματος αναφοράς S , τότε η ταχύτητα u του σωματιδίου όπως μετρείται στο σύστημα αναφοράς S είναι

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (\text{σχετικιστική ταχύτητα}) \quad (37-29)$$

Σχετικιστικό Φαινόμενο Doppler Όταν μια πηγή φωτός και ένας ανιχνευτής φωτός βρίσκονται σε σχετική κίνηση, το μήκος κύματος του φωτός όπως μετράται στο σύστημα ηρεμίας της πηγής είναι το **ιδιομήκος κύματος** λ_0 . Το παρατηρήσιμο μήκος κύματος λ είναι είτε μεγαλύτερο (**ερυθρή μετατόπιση**) ή μικρότερο (**κυανή μετατόπιση**), ανάλογα με το αν η απόσταση πηγής-ανιχνευτή μεγαλώνει ή μικραίνει. Όταν η απόσταση μεγαλώνει, τα μήκη κύματος σχετίζονται με τη σχέση

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (\text{πηγή και ανιχνευτής απομακρύνονται}) \quad (37-32)$$

όπου $\beta = v/c$ και v είναι η σχετική ακτινική ταχύτητα (κατά μήκος της ευθείας που ενώνει την πηγή και τον παρατηρητή). Αν η απόσταση μικραίνει, τα πρόσημα μπροστά από το β αντιστρέφονται. Για ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα c του φωτός ισχύει η προσέγγιση

$$v = \frac{|\Delta \lambda|}{\lambda_0} c \quad (v \ll c). \quad (37-36)$$

όπου $\Delta \lambda (= \lambda - \lambda_0)$ είναι η **μετατόπιση Doppler** στο μήκος κύματος εξαιτίας της κίνησης.

Εγκάρσιο Φαινόμενο Doppler Αν η σχετική κίνηση της φωτεινής πηγής είναι κάθετη στην ευθεία που συνδέει την πηγή και τον παρατηρητή, η παρατηρήσιμη συχνότητα σχετίζεται με την ιδιοσυχνότητα με τη σχέση

$$f = f_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (37-37)$$

Ορμή και Ενέργεια Οι παρακάτω ορισμοί της γραμμικής ορμής $\vec{p}$, της κινητικής ενέργειας K , και της ολικής ενέργειας E για ένα σωματίδιο μάζας m ισχύουν για όλες τις ταχύτητες που είναι δυνατό να αποκτήσει ένα σώμα στη Φύση:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (\text{ορμή}), \quad (37-42)$$

$$E = mc^2 + K = \gamma mc^2 \quad (\text{ολική ενέργεια}), \quad (37-47, 37-48)$$

$$K = mc^2(\gamma - 1) \quad (\text{κινητική ενέργεια}) \quad (37-52)$$

Εδώ το γ είναι ο συντελεστής Lorentz για την κίνηση του σωματιδίου και mc^2 είναι η *ενέργεια μάζας* ή *ενέργεια ηρεμίας* που συνδέεται με τη μάζα του σωματιδίου. Αυτές οι εξισώσεις οδηγούν στις σχέσεις

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2, \quad (37-54)$$

και

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \quad (37-55)$$

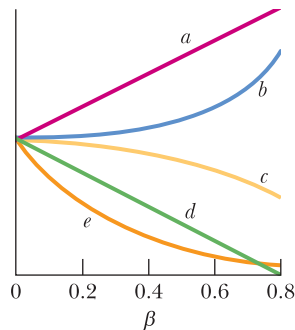
Όταν ένα σύστημα σωματιδίων συμμετέχει σε μια χημική ή σε μια πυρηνική αντίδραση, τότε το Q της αντίδρασης είναι το αντίθετο της μεταβολής της ολικής ενέργειας μάζας του συστήματος:

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M c^2, \quad (37-50)$$

όπου M_i είναι η ολική μάζα του συστήματος πριν από την αντίδραση και M_f είναι η ολική μάζα του συστήματος μετά την αντίδραση.

Ερωτήσεις

1 Μια ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x του συστήματος αναφοράς S . Η ράβδος είναι προσανατολισμένη με τέτοιο τρόπο ώστε το μήκος της να είναι παράλληλο στον άξονα x . Ένας παρατηρητής στο σύστημα S μετράει το μήκος L της ράβδου. Ποια από τις γραφικές παραστάσεις στο Σχ. 37-15 απεικονίζει καλύτερα το μήκος L (κατακόρυφος άξονας της γραφικής παράστασης) σε σχέση με την παράμετρο ταχύτητας β ;



Σχ. 37-15 Ερωτήσεις 1 και 3.

6 Το Σχ. 37-16 παρουσιάζει ένα διαστημόπλοιο (συνδεδεμένο με το σύστημα αναφοράς S') το οποίο μας προσπερνάει (καθώς στεκόμαστε στο σύστημα αναφοράς S). Ένα πρωτόνιο εκτοξεύεται με σχεδόν την ταχύτητα του φωτός κατά μήκος του διαστημόπλοιου, από το μπροστινό στο πίσω μέρος του. (α) Η χωρική διαφορά $\Delta x'$ ανάμεσα στο σημείο από όπου

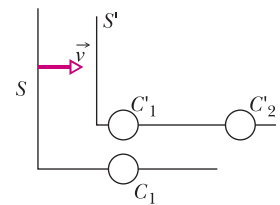


Σχ. 37-16 Ερώτηση 2 και Πρόβλημα 68.

εκτοξεύτηκε το πρωτόνιο έως το σημείο που χτύπησε το πίσω τοίχωμα του σκάφους είναι θετική ή αρνητική; (β) Η χρονική διαφορά $\Delta t'$ ανάμεσα στα δύο αυτά γεγονότα είναι θετική ή αρνητική;

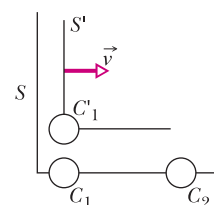
3 Το σύστημα αναφοράς S' προσπερνά το σύστημα αναφοράς S με ταχύτητα v κατά μήκος της κοινής διεύθυνσης των αξόνων τους x' και x , όπως δείχνει το Σχ. 37-9. Ένας παρατηρητής που ταξιδεύει μαζί με το σύστημα αναφοράς S' μετράει στο ρολόι χειρός του 25 s. Ποια από τις καμπύλες που φαίνονται στο Σχ. 37-15 απεικονίζει καλύτερα το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt (κατακόρυφος άξονας της γραφικής παράστασης) η οποία μετρείται από έναν παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς S , ως προς την παράμετρο ταχύτητας β ;

4 Το Σχ. 37-17 παρουσιάζει δύο ρολόγια στο ακίνητο σύστημα αναφοράς S' (τα οποία είναι συγχρονισμένα σε αυτό το σύστημα αναφοράς) και ένα ρολόι στο κινούμενο σύστημα αναφοράς S . Τα ρολόγια C_1 και C'_1 δείχνουν μηδέν τη στιγμή που το ένα προσπερνάει το άλλο. Όταν τα ρολόγια C_1 και C'_2 προσπερνούν το ένα το άλλο (α) ποιο από τα δύο ρολόγια δείχνει τον μικρότερο χρόνο και (β) ποιο από τα δύο ρολόγια μετράει τον ιδιόχρονο;



Σχ. 37-17 Ερώτηση 4.

5 Το Σχ. 37-18 παρουσιάζει δύο ρολόγια στο ακίνητο σύστημα αναφοράς S (τα οποία είναι συγχρονισμένα σε αυτό το σύστημα αναφοράς) και ένα ρολόι στο κινούμενο σύστημα αναφοράς S' . Τα ρολόγια C_1 και C'_1 δείχνουν μηδέν τη στιγμή που το ένα προσπερνάει το άλλο. Όταν τα ρολόγια C'_1 και C_2 προσπερνούν το ένα το άλλο (α) ποιο από τα δύο ρολόγια δείχνει τον μικρότερο χρόνο και (β) ποιο από τα δύο ρολόγια μετράει τον ιδιόχρονο;

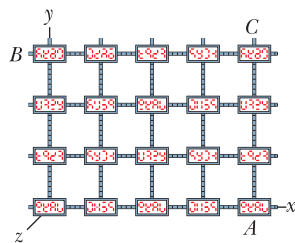


Σχ. 37-18 Ερώτηση 5.

6 Ο Sam φεύγει από την Αφροδίτη με διαστημόπλοιο και καθώς κατευθύνεται προς τον Άρη προσπερνάει τη Sally η οποία βρίσκεται στη Γη με σχετική ταχύτητα $0.5c$. (α) Κάθε παρα-

τηρητής μετρά τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού Αφροδίτης-Άρη. Ποιος από τους δύο μετράει τον ιδιόχρονο του ταξιδιού; Ο Sam, η Sally ή κανείς από τους δύο; (β) Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του ο Sam εκπέμπει ένα φωτεινό παλμό προς τον Άρη. Ο κάθε παρατηρητής μέτρα τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού του φωτεινού παλμού από το διαστημόπλοιο μέχρι τον Άρη. Ποιος από τους δύο μετράει τον ιδιόχρονο του ταξιδιού του παλμού; Ο Sam, η Sally ή κανείς από τους δύο;

7 Το επίπεδο των ρολογιών και των ράβδων μέτρησης που παρουσιάζεται στο Σχ. 37-19 είναι παρόμοιο με αυτό του Σχ. 37-3. Τα ρολόγια κατά μήκος του άξονα x απέχουν μεταξύ τους (κέντρο με κέντρο) ένα δευτερόλεπτο φωτός, όπως και τα ρολόγια κατά μήκος του άξονα y . Όλα τα ρολόγια είναι συγχρονισμένα μέσω της διαδικασίας που περιγράφεται στην Εν. 37-3. Όταν το αρχικό σήμα συγχρονισμού για $t = 0$ που έχει ξεκινήσει από την αρχή των αξόνων φθάνει (α) στο ρολόι A , (β) στο ρολόι B και (γ) στο ρολόι C σε ποια τιμή συγχρονίζονται αυτά τα ρολόγια; Ένα γεγονός συμβαίνει στο ρολόι A όταν αυτό δείχνει 10 s. (δ) Πόσο χρειάστηκε το σήμα απ' αυτό το γεγονός για να ταξιδέψει σε έναν παρατηρητή που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων; (ε) Ποιο χρόνο θα αντιστοιχίσει ο παρατηρητής αυτός σε αυτό το γεγονός;



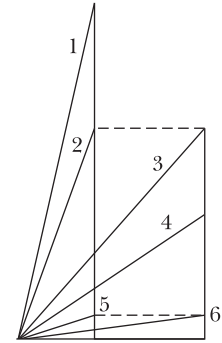
Σχήμα 37-19 Ερώτηση 7.

8 Η ενέργεια ηρεμίας και η ολική ενέργεια, αντίστοιχα, τριών σωματιδίων, που εκφράζονται με τη βοήθεια μιας βασικής ποσότητας A , είναι: (1) A , $2A$, (2) A , $3A$ (3) $3A$, $4A$. Χωρίς να πραγματοποιήσετε κανένα γραπτό υπολογισμό κατατάξτε τα σωματίδια με φθίνουσα σειρά ως προς (α) τη μάζα τους, (β) την κινητική τους ενέργεια, (γ) τον συντελεστή Lorentz, και (δ) το μέτρο της ταχύτητάς τους.

9 Το Σχ. 37-20 παρουσιάζει το τρίγωνο του Σχ. 37-14 για έξι σωματίδια: οι πλάγιες γραμμές 2 και 4 έχουν το ίδιο μήκος. Κατατάξτε τα σωματίδια με φθίνουσα σειρά ως προς (α) τη μάζα τους, (β) το μέτρο της ορμής τους και (γ) τον συντελεστή Lorentz. (δ) Αναγνωρίστε ποια δύο σωματίδια έχουν την ίδια ολική ενέργεια. (ε) Κατατάξτε τα τρία χαμηλότερης ενέρ-

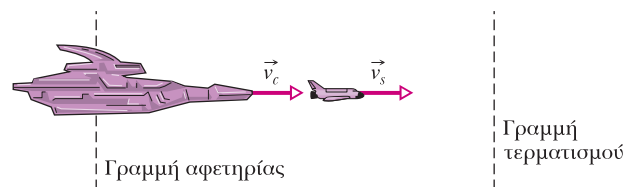
γειας σωματίδια ως προς την κινητική τους ενέργεια με φθίνουσα σειρά.

10 Ενώ ταξιδεύετε με διαστημόπλοιο συλλαμβάνετε τα σήματα από 4 ακάτους που ταξιδεύουν στην ίδια διεύθυνση με το σκάφος σας και είτε κινούνται προς είτε μακριά από σας. Τα σήματα έχουν την ίδια κανονική συχνότητα f_0 . Η ταχύτητα και η κατεύθυνση της κίνησης των ακάτων σε σχέση με σας είναι (α) $0.3c$ προς εσάς, (β) $0.6c$ προς εσάς (γ) $0.3c$ μακριά από σας και (δ) $0.6c$ μακριά από σας. Κατατάξτε τις ακάτους ανάλογα με τη συχνότητα που λαμβάνετε, με φθίνουσα σειρά.



Σχήμα 37-20 Ερώτηση 9.

11 Το Σχ. 37-21 δείχνει ένα από τέσσερα διαστημόπλοια που συμμετέχουν σε αγώνα ταχύτητας. Καθώς το κάθε διαστημόπλοιο περνάει τη γραμμή εκκίνησης, μια διαστημική άκατος ξεκινά από το σκάφος και τρέχει προς τη γραμμή τερματισμού. Εσείς, ένας από τους κριτές του αγώνα, είστε ακίνητος σε σχέση με τη γραμμή εκκίνησης και τη γραμμή τερματισμού. Οι ταχύτητες v_c των διαστημοπλοίων ως προς εσάς και της άκατος v_s ως προς τα αντίστοιχα διαστημόπλοια είναι: (1) $0.70c$, $0.40c$ (2) $0.40c$, $0.70c$ (3) $0.20c$, $0.90c$, (4) $0.50c$, $0.60c$. (α) Κατατάξτε τις ακάτους ανάλογα με τις ταχύτητές τους ως προς εσάς με φθίνουσα σειρά. (β) Κατατάξτε τις ακάτους σύμφωνα με την απόσταση ανάμεσα στη γραμμή εκκίνησης και στη γραμμή τερματισμού, όπως τη μετρούν οι πιλότοι τους, με φθίνουσα σειρά επίσης. (γ) Κάθε διαστημόπλοιο στέλνει ένα σήμα στην άκατό του με συγκεκριμένη συχνότητα f_0 όπως αυτή μετريέται από το διαστημόπλοιο. Κατατάξτε τις ακάτους ως προς τη συχνότητα την οποία ανιχνεύουν, με φθίνουσα σειρά επίσης.



Σχήμα 37-21 Ερώτηση 11.

Προβλήματα

• - ••• Το πλήθος των κουκκίδων δηλώνει το επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος.

Ενότητα 37-1 Ταυτόχρονο και Διαστολή του Χρόνου

•1 Ο μέσος χρόνος ζωής ενός ακίνητου μιονίου έχει μετρηθεί ότι είναι $2.2000 \mu\text{s}$. Ο μέσος χρόνος ζωής ενός υψηλής ενέργειας μιονίου που ανιχνεύεται σε μια δέσμη κοσμικών ακτίνων όπως αυτές παρατηρούνται από τη Γη έχει μετρηθεί

ότι είναι $16.000 \mu\text{s}$. Να υπολογίσετε με πέντε σημαντικά ψηφία, την παράμετρο ταχύτητας β αυτών των μιονίων των κοσμικών ακτίνων σε σχέση με τη Γη.

•2 Να υπολογίσετε με οκτώ σημαντικά ψηφία την παράμετρο

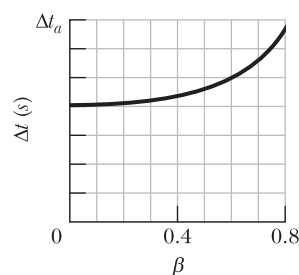
ταχύτητας β αν ο συντελεστής Lorentz γ είναι: (α) 1.010 000 0, (β) 10.000 000, (γ) 100.000 00 και (δ) 1000.000 0.

••3 Θέλετε να πραγματοποιήσετε ένα ταξίδι μετ' επιστροφής στη Γη, ταξιδεύοντας σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα για ακριβώς έξι μήνες (χρονικό διάστημα όπως το μετράτε εσείς) και στη συνέχεια να επιστρέψετε στη Γη με την ίδια σταθερή ταχύτητα. Επίσης κατά την επιστροφή σας θέλετε να βρείτε τη Γη όπως θα είναι ακριβώς 1000 χρόνια μετά την αναχώρησή σας. (α) Να υπολογίσετε με οκτώ σημαντικά ψηφία, πόση θα πρέπει να είναι η παράμετρος ταχύτητας β κατά τη διάρκεια του ταξιδιού σας. (β) Το αποτέλεσμα εξαρτάται από το αν ταξιδεύετε σε ευθεία γραμμή;

••4 *Επιστροφή στο μέλλον*: Υποθέστε ότι ένας πατέρας είναι 20.00 χρόνια μεγαλύτερος από την κόρη του. Θέλει να ταξιδέψει απομακρυνόμενος από τη Γη 2.000 χρόνια και μετά για να επιστρέψει προς τη Γη άλλα 2.000 χρόνια (και οι δύο χρονικές διαφορές όπως μετριοούνται απ' αυτόν) έτσι ώστε όταν γυρίσει στη Γη να είναι 20.00 χρόνια νεότερος από την κόρη του. Με τι παράμετρο ταχύτητας β (ως προς τη Γη) θα πρέπει να ταξιδεύει για να το πετύχει;

••5 Ασταθές υψηλής ενέργειας σωματίδιο, εισέρχεται σε ανιχνευτή και αφήνει ίχνος μήκους 1.05 mm πριν διασπαστεί. Η ταχύτητά του ως προς τον ανιχνευτή ήταν $0.992c$. Πόσος είναι ο ιδιόχρονός του; Δηλαδή για πόσο χρόνο θα υπήρχε το σωματίδιο πριν διασπαστεί μέσα στον ανιχνευτή αν το σωματίδιο ήταν ακίνητο ως προς τον ανιχνευτή;

••6 Το σύστημα αναφοράς S' ετοιμάζεται να προσπεράσει με ταχύτητα v το σύστημα αναφοράς S κατά μήκος της κοινής διεύθυνσης των αξόνων τους x' και x , όπως φαίνεται και στο Σχ. 37-9. Παρατηρητής που κινείται μαζί με το σύστημα αναφοράς S' σκοπεύει να μετρήσει



Σχήμα 37-22 Πρόβλημα 6.

ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα με ρολόι χειρός. Το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt θα μετρηθεί επίσης από παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S . Στο Σχ. 37-22 παρουσιάζεται το Δt ως προς την παράμετρο ταχύτητας β για μεγάλο εύρος τιμών του β . Η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα προσδιορίζεται με την τιμή $\Delta t_a = 14.0$ s. Πόσο είναι το χρονικό διάστημα Δt , αν η ταχύτητα είναι $v = 0.98c$;

••7 Η υπόθεση του βιβλίου και των ταινιών της σειράς *Ο Πλανήτης των Πιθήκων* είναι ότι αστροναύτες ταξιδεύουν στο απώτερο μέλλον της Γης, σε μια εποχή όπου ο ανθρώπινος πολιτισμός έχει αντικατασταθεί με έναν πολιτισμό των πιθήκων. Δεχόμενοι μόνο τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας να υπολογίσετε πόσο μακριά στο μέλλον της Γης ένας αστροναύτης θα μπορούσε να φτάσει αν παρέμενε σε χειμέρια νάρκη 120 χρόνια ενώ ταξίδευε με σχετική ταχύτητα $v = 0.9990c$

ως προς τη Γη, αρχικά απομακρυνόμενος από τη Γη και στη συνέχεια πλησιάζοντας προς αυτή.

Ενότητα 37-2 Η Σχετικότητα του Μήκους

•8 Ηλεκτρόνιο με $\beta = 0.999987$ κινείται κατά μήκος του άξονα ενός κενού σωλήνα μήκους 3.00 m, όπως το μετράει ένας ακίνητος ως προς το εργαστήριο παρατηρητής S που βρίσκεται σε ηρεμία ως προς τον σωλήνα. Αντίθετα ένας παρατηρητής S' που είναι ακίνητος ως προς το ηλεκτρόνιο βλέπει ότι ο σωλήνας κινείται με ταχύτητα $v (= \beta c)$. Πόσο θα είναι το μήκος του σωλήνα που μετρά ο παρατηρητής S' ;

•9 Διαστημόπλοιο μήκους ηρεμίας 130 m προσπερνά ένα σταθμό μέτρησης χρόνου με ταχύτητα $v = 0.740c$. (α) Πόσο είναι το μήκος του διαστημόπλοιου όπως αυτό μετρείται από έναν παρατηρητή στο σταθμό; (β) Πόσο χρονικό διάστημα μετρά το ρολόι του σταθμού ανάμεσα στο πέρασμα του μπροστινού και του πίσω άκρου του σκάφους από το σταθμό;

•10 Ράβδος μήκους ενός μέτρου που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S' σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα x' . Αν αυτό το σύστημα αναφοράς κινείται παράλληλα στον άξονα x του συστήματος αναφοράς S με ταχύτητα $v = 0.90c$ ως προς το σύστημα S , ποιο είναι το μήκος της ράβδου που μετρείται στο S ;

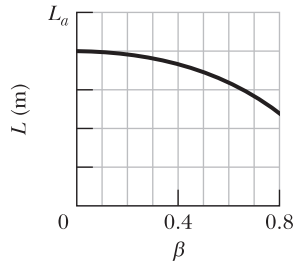
•11 Μια ράβδος κείται παράλληλα προς τον άξονα x του συστήματος αναφοράς S και κινείται κατά μήκος αυτού του άξονα με ταχύτητα $v = 0.630c$. Το μήκος ηρεμίας της ράβδου είναι 1.70 m. Πόσο είναι το μήκος της όπως αυτό μετρείται στο σύστημα αναφοράς S ;

••12 Αφού μετρηθεί το μήκος ενός διαστημόπλοιου, προκύπτει ότι είναι ακριβώς ίσο με το μισό του μήκους ηρεμίας του. (α) Να υπολογίσετε με τρία σημαντικά ψηφία πόση είναι η παράμετρος ταχύτητας β του διαστημόπλοιου σε σχέση με τον παρατηρητή που πραγματοποιεί τη μέτρηση. (β) Κατά ποιον παράγοντα τα ρολόγια του διαστημόπλοιου καθυστερούν σε σχέση με τα ρολόγια του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή;

••13 Διαστημικός ταξιδιώτης απογειώνεται από τη Γη και κινείται με μια σταθερή ταχύτητα $v = 0.990c$ προς το άστρο Βέγα, το οποίο βρίσκεται 26.00 έτη φωτός μακριά. Πόσος χρόνος θα έχει περάσει σύμφωνα με τα ρολόγια της Γης όταν (α) ο ταξιδιώτης φτάσει στον Βέγα και (β) όταν οι παρατηρητές στη Γη λάβουν το μήνυμα του ταξιδιώτη ότι έφτασε στον Βέγα. (γ) Πόσο γερασμένος θα υπολογίσουν οι παρατηρητές στη Γη ότι είναι ο ταξιδιώτης (χρόνος μετρημένος στο σύστημα αναφοράς του) όταν αυτός θα φτάσει στον Βέγα σε σχέση με την ηλικία που είχε όταν ξεκίνησε το ταξίδι του;

••14 Ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x του συστήματος αναφοράς S . Ο άξονας της ράβδου

είναι παράλληλος στον άξονα της κίνησης. Ένας παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς S θέλει να μετρήσει το μήκος L της ράβδου. Το Σχ. 37-23 παρουσιάζει το μήκος L ως προς την παράμετρο ταχύτητας β για μεγάλο εύρος τιμών του β . Η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα προσδιορίζεται από την τιμή $L_a = 1.00$ m. Αν $v = 0.95c$, πόσο είναι το μήκος L ;



Σχήμα 37-23 Πρόβλημα 14.

••15 Το κέντρο του Γαλαξία μας βρίσκεται σε απόσταση περίπου 23000 έτη φωτός. (α) Υπολογίστε με οκτώ σημαντικά ψηφία πόση πρέπει να είναι η παράμετρος ταχύτητας β για ένα σκάφος το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και το οποίο σε ακριβώς 30 χρόνια (μετρημένα στο σύστημα αναφοράς του σκάφους) πρέπει να ταξιδέψει ακριβώς 23000 έτη φωτός (μετρημένα στο σύστημα αναφοράς του Γαλαξία). (β) Πόσο διάστημα (σε έτη φωτός) διανύει το σκάφος κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του, όπως θα το μετρήσει ένας παρατηρητής πάνω στο σκάφος;

Ενότητα 37-3 Οι Μετασχηματισμοί του Lorentz

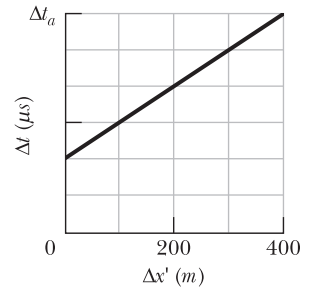
•16 Παρατηρητής S αναφέρει ότι ένα γεγονός συμβαίνει στον άξονα των x στο σύστημα αναφοράς του σε συντεταγμένες $x = 3.00 \times 10^8$ m και $t = 2.50$ s. Δεύτερος παρατηρητής S' βρίσκεται πάνω σε σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x με ταχύτητα $v = 0.400c$. Επίσης όταν $t = t' = 0$, ισχύει $x = x' = 0$. Ποιες είναι (α) χωρική και (β) χρονική συντεταγμένη του γεγονότος ως προς το σύστημα S' . Αν το σύστημα S' κινιόταν προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα των x , πόση θα ήταν τότε η (γ) χωρική και (δ) χρονική συντεταγμένη του γεγονότος στο σύστημα αυτό;

•17 Στο Σχ. 37-9 οι αρχές των συντεταγμένων των δύο συστημάτων αναφοράς συμπίπτουν με $t = t' = 0$ και η σχετική τους ταχύτητα είναι $0.950c$. Δύο μικρομετεωρίτες συγκρούονται στις συντεταγμένες $x = 100$ km και $t = 200$ μ s σύμφωνα με έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα S . Ποιες είναι η (α) χωρική και (β) χρονική συντεταγμένη της σύγκρουσης στο σύστημα S' ;

•18 Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $0.60c$ ως προς το σύστημα αναφοράς S (Σχ. 37-9). Επίσης δεχόμαστε ότι $x = x' = 0$ για $t = t' = 0$. Δύο γεγονότα καταγράφονται. Στο σύστημα αναφοράς S το γεγονός 1 συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην αρχή των αξόνων, ενώ το γεγονός 2 συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 4.0 \mu$ s σε ένα σημείο του άξονα x με συντεταγμένη $x = 3.0$ km. Σύμφωνα με τον παρατηρητή S' , πόσος είναι ο χρόνος στον οποίο συμβαίνουν (α) το γεγονός 1 και (β) το γεγονός 2; (γ) Οι δύο παρατηρητές αντιλαμβάνονται τα δύο γεγονότα με την ίδια ή αντίθετη αλληλουχία;

•19 Ένας πειραματιστής κανονίζει ώστε να ανάψουν δύο φακοί ταυτόχρονα, παράγοντας μια μεγάλη λάμψη στην αρχή των αξόνων του συστήματος αναφοράς και μια μικρή λάμψη στη θέση $x = 30.0$ km. Ένας παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα $0.250c$ κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x παρατηρεί τις λάμψεις. (α) Πόσο είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο λάμψεων όπως το αντιλαμβάνεται ο κινούμενος παρατηρητής; (β) Ποια λάμψη βλέπει πρώτη;

••20 Όπως φαίνεται στο Σχ. 37-9 το σύστημα αναφοράς S' προσπερνά το σύστημα αναφοράς S με σταθερή ταχύτητα. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των γεγονότων 1 και 2 είναι $\Delta t'$, όπως μετρείται από έναν παρατηρητή στο S' , όμως, η απόσταση τους $\Delta x'$ δεν έχει προσδιοριστεί ακόμα. Στο Σχ. 37-24



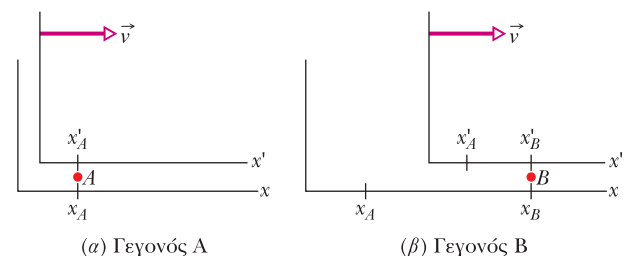
Σχήμα 37-24 Πρόβλημα 20.

φαίνεται το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ των δύο γεγονότων στο σύστημα αναφοράς S ως συνάρτηση της $\Delta x'$ για ένα εύρος τιμών της $\Delta x'$. Η κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα προσδιορίζεται από την τιμή $\Delta t_a = 6.00$ μ s. Ποιο είναι το $\Delta t'$;

••21 Σχετικιστική αντιστροφή των γεγονότων. Στα Σχ. 37-25α και 37-25β παρουσιάζεται η συνήθης κατάσταση κατά την οποία ένα τονισμένο σύστημα αναφοράς προσπερνά ένα μη τονισμένο σύστημα αναφοράς, κατά μήκος της κοινής θετικής διεύθυνσης των αξόνων τους x και x' , με σταθερή σχετική ταχύτητα μέτρου v . Βρισκόμαστε σε ηρεμία στο μη τονισμένο σύστημα αναφοράς ενώ ο Στριφτοκέρατος, που είναι ένας πανέξυπνος σπουδαστής της σχετικότητας, παρά το γεγονός ότι μεγάλωσε με κινούμενα σχέδια, βρίσκεται σε ηρεμία στο τονισμένο σύστημα αναφοράς. Στα σχήματα επίσης παρουσιάζονται τα γεγονότα A και B που συμβαίνουν στις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες όπως αυτές μετριοούνται στο δικό μας μη τονισμένο σύστημα αναφοράς καθώς και στο τονισμένο σύστημα αναφοράς του Στριφτοκέρατου:

Γεγονός	Μη Τονισμένο Σύστημα	Τονισμένο Σύστημα
A	(x_A, t_A)	(x'_A, t'_A)
B	(x_B, t_B)	(x'_B, t'_B)

Στο σύστημα αναφοράς μας το γεγονός A συμβαίνει πριν από το γεγονός B , σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_B - t_A = 1.00$ μ s και σε απόσταση μεταξύ τους $\Delta x = x_B - x_A = 400$ m. Έστω



Σχήμα 37-25 Προβλήματα 21, 22, 60 και 61.

ότι $\Delta t'$ είναι το χρονικό διάστημα των γεγονότων όπως αυτά μετρούνται στο σύστημα του Στριφτοκέρατου.

(α) Να βρείτε μια έκφραση για το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β ($\beta = v/c$) και των δεδομένων στοιχείων. Να σχεδιάσετε το $\Delta t'$ ως συνάρτηση του β για τις παρακάτω δύο περιοχές τιμών του β :

(β) 0 έως 0.01 (η v θεωρείται χαμηλή από 0 έως 0.01 c)

(γ) 0.1 έως 1 (η v θεωρείται υψηλή από 0.1 c έως το όριο ταχυτήτων c)

(δ) Για ποια τιμή του β είναι $\Delta t' = 0$; Για ποιες περιοχές τιμών του β είναι η αλληλουχία των γεγονότων A και B όπως την παρατηρεί ο Στριφτοκέρατος

(ε) ίδια με τη δική μας

(στ) αντίθετη από τη δική μας;

(ζ) Μπορεί το γεγονός A να είναι η αιτία του γεγονότος B ή το αντίθετο; Εξηγήστε την άποψή σας.

••22 Για τα κινούμενα συστήματα αναφοράς στο Σχ. 37-25, τα γεγονότα A και B συμβαίνουν στις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες: για το μη τονισμένο σύστημα αναφοράς στις (x_A, t_A) και (x_B, t_B) ενώ για το τονισμένο σύστημα αναφοράς στις (x'_A, t'_A) και (x'_B, t'_B) . Στο μη τονισμένο σύστημα αναφοράς παρατηρούμε ότι $\Delta t = t_B - t_A = 1.00 \mu\text{s}$ και $\Delta x = x_B - x_A = 400 \text{ m}$. (α) Να βρεθεί μια έκφραση για το $\Delta x'$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β και των δεδομένων στοιχείων. Να σχεδιάσετε το $\Delta x'$ ως συνάρτηση του β για τις παρακάτω δύο περιοχές τιμών του β . (β) 0 έως 0.01 (γ) 0.1 έως 1. (δ) Για ποια τιμή της β η $\Delta x'$ είναι ελάχιστη και (ε) πόση είναι η ελάχιστη αυτή τιμή;

••23 Ένα ρολόι κινείται κατά μήκος του άξονα των x με μια ταχύτητα $v = 0.600c$ και δείχνει $t = 0$ όταν περνά την αρχή των αξόνων. (α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής Lorentz του ρολογιού και (β) η ένδειξή του καθώς το ρολόι περνά από τη συντεταγμένη $x = 180 \text{ m}$.

••24 Ο τάρανδος Στριφτοκέρατος που είναι συνδεδεμένος με το αδρανειακό σύστημα S' σας προσπερνάει (ενώ εσείς είστε συνδεδεμένος με το σύστημα αναφοράς S) κινούμενος κατά μήκος της κοινής διεύθυνσης των αξόνων x και x' όπως φαίνεται στο Σχ. 37-9. Μεταφέρει τρεις ράβδους μήκους ενός μέτρου η καθεμιά. Η πρώτη ράβδος είναι παράλληλη στον άξονα x' , η δεύτερη είναι παράλληλη στον άξονα y' και η τρίτη είναι παράλληλη στον άξονα των z' . Με το ρολόι του μετράει 15.0 s τα οποία αντιστοιχούν σε 30.0 s δικά σας. Κατά τη διάρκεια της προσπέρασης συμβαίνουν δύο γεγονότα. Σύμφωνα με εσάς το πρώτο γεγονός συμβαίνει στις συντεταγμένες $x_1 = 33.0 \text{ m}$ και $t_1 = 22.0 \text{ ns}$, ενώ το δεύτερο γεγονός συμβαίνει στις συντεταγμένες $x_2 = 53.0 \text{ m}$ και $t_2 = 62.0 \text{ ns}$. Σύμφωνα με τις δικές σας μετρήσεις πόσο είναι το μήκος (α) της ράβδου 1, (β) της ράβδου 2 και (γ) της ράβδου 3; Σύμφωνα με τον Στριφτοκέρατο πόση είναι (δ) η χωρική απόσταση και (ε) το χρονικό διάστημα μεταξύ των 1 και 2 γεγονότων και (στ) ποιο γεγονός συμβαίνει πρώτο;

••25 Στο Σχ. 37-9 ένας παρατηρητής στο S ανιχνεύει δύο λάμπες φωτός. Μια μεγάλη λάμψη φωτός συμβαίνει στο

$x_1 = 1200 \text{ m}$ και 5.00 μs αργότερα μια δεύτερη λάμψη εμφανίζεται στο $x_2 = 480 \text{ m}$. Ένας παρατηρητής στο S' βλέπει τις δύο λάμπες να συμβαίνουν στο ίδιο σημείο με συντεταγμένη x' . (α) Πόση είναι η παράμετρος ταχύτητας β του παρατηρητή στο S' ; (β) το S' κινείται προς τη θετική κατεύθυνση ή προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x ; (γ) Για τον παρατηρητή S' ποια από τις δύο λάμπες συμβαίνει πρώτη; (δ) Πόσο είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις λάμπες;

••26 Στο Σχ. 37-9 ένας παρατηρητής στο S ανιχνεύει δύο λάμπες φωτός. Μια μεγάλη λάμψη φωτός συμβαίνει στο $x_1 = 1200 \text{ m}$ και αργότερα μια δεύτερη λάμψη εμφανίζεται στο $x_2 = 480 \text{ m}$. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις δύο λάμπες είναι $\Delta t = t_2 - t_1$. Πόση είναι η μικρότερη τιμή του Δt ώστε για έναν παρατηρητή στο S' οι δύο λάμπες να συμβαίνουν στην ίδια συντεταγμένη x' ;

Ενότητα 37-4 Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

••27 Σωματίδιο κινείται κατά μήκος του άξονα x' στο σύστημα αναφοράς S' με μια ταχύτητα $v = 0.40c$. Το σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα 0.60 c ως προς το σύστημα αναφοράς S . Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς S ;

••28 Στο Σχ. 37-11, το σύστημα αναφοράς S' κινείται ως προς το σύστημα αναφοράς S , με ταχύτητα $v = 0.62c$, ενώ ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος των κοινών αξόνων x και x' . Παρατηρητής ο οποίος βρίσκεται συνδεδεμένος στο σύστημα αναφοράς S' , μετρά ότι η ταχύτητα του σωματιδίου είναι 0.47 c . Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου, μετρημένη σε μονάδες της ταχύτητας του φωτός c , την οποία μετράει ένα παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S σύμφωνα (α) με τον σχετικιστικό και (β) με τον κλασικό μετασχηματισμό ταχυτήτων; Κατόπιν θεωρήστε ότι ο παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς S' μετρά ότι η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $-0.47c$. Σ' αυτή την περίπτωση πόση ταχύτητα μετράει ο παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς S σύμφωνα (γ) με τον σχετικιστικό και (δ) με τον κλασικό μετασχηματισμό ταχυτήτων;

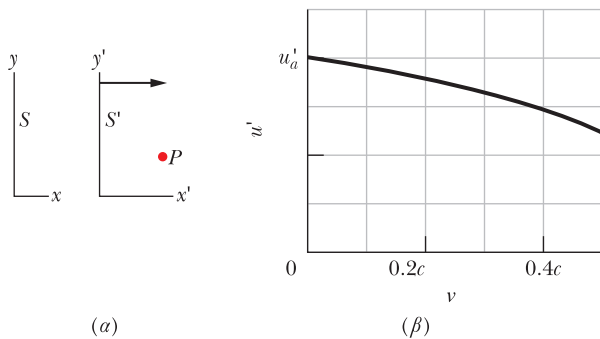
••29 Μετρήθηκε ότι ο γαλαξίας A απομακρύνεται από εμάς με ταχύτητα $v = 0.35c$. Ο γαλαξίας B , που βρίσκεται ακριβώς στην αντίθετη διεύθυνση από τον A , επίσης μετρήθηκε ότι απομακρύνεται από εμάς με την ίδια ταχύτητα. Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε ηρεμία στον γαλαξία A και μετράει την ταχύτητα σε μονάδες της ταχύτητας του φωτός c . Με πόση ταχύτητα μετράει (α) ότι ο δικός μας γαλαξίας απομακρύνεται από αυτόν και (β) ότι ο γαλαξίας B απομακρύνεται από αυτόν;

••30 Το αστρικό σύστημα Q_1 μετρήθηκε να απομακρύνεται από εμάς με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 0.800c$. Το αστρικό σύστημα Q_2 , το οποίο βρίσκεται στην ίδια κατεύθυνση αλλά πλησιέστερα από το Q_1 απομακρύνεται από εμάς με ταχύτητα $v_2 = 0.400c$. Πόση είναι η ταχύτητα του αστρικού συστήματος

Q_2 σε μονάδες της ταχύτητας του φωτός c , όπως μετريέται από έναν παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς του Q_1 ;

••31 Διαστημόπλοιο του οποίου το μήκος ηρεμίας είναι 350 m κινείται με ταχύτητα $v = 0.82c$ ως προς ορισμένο σύστημα αναφοράς. Μικρομετεωρίτης, που έχει επίσης την ίδια ταχύτητα v σε αυτό το σύστημα αναφοράς, προσπερνάει το διαστημόπλοιο κινούμενος με αντίθετη φορά. Πόσο χρόνο χρειάζεται αυτό το αντικείμενο για να προσπεράσει το σκάφος μετρημένο στο σύστημα αναφοράς του σκάφους;

••32 Στο Σχ. 37-26α, το σωματίδιο P κινείται παράλληλα στους άξονες x και x' των συστημάτων αναφοράς S και S' , με μια σταθερή ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς S . Το σύστημα αναφοράς S' κινείται παράλληλα στον άξονα x του συστήματος αναφοράς S με ταχύτητα v . Στο Σχ. 37-26β φαίνεται η ταχύτητα u' του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς S' για μια περιοχή τιμών του v . Η κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα προσδιορίζεται με την τιμή $u'_a = 0.800c$. Ποια τιμή θα έχει η ταχύτητα u' αν (α) $v = 0.90c$ και (β) $v \rightarrow c$;



Σχήμα 37-26 Πρόβλημα 32.

••33 Ένας στόλος από διαστημόπλοια που έχει μήκος 1.00 έτος φωτός (στο σύστημα ηρεμίας του) κινείται με ταχύτητα $0.800c$ σε σχέση με έναν ακίνητο σταθμό στο σύστημα αναφοράς S . Ένας ταχυδρόμος που ταξιδεύει από το πίσω μέρος του στόλου στο μπροστινό πηγαίνει με ταχύτητα $0.950c$ μετρημένη στο σύστημα αναφοράς S . Πόσο διαρκεί το ταξίδι του ταχυδρόμου όπως αυτό μετρίεται (α) στο σύστημα ηρεμίας του ταχυδρόμου, (β) στο σύστημα ηρεμίας του στόλου και (γ) στο σύστημα του σταθμού S ;

Ενότητα 37-5 Το Φαινόμενο Doppler για το Φως

•34 Φωτεινή πηγή νατρίου κινείται σε οριζόντιο κύκλο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 0.100c$, ενώ ταυτόχρονα εκπέμπει φως με ιδιομήκος κύματος $\lambda_0 = 589.00$ nm. Μήκος κύματος λ ανιχνεύεται γι' αυτή την ακτινογραφία από έναν δέκτη ο οποίος είναι ακίνητος στο κέντρο του κύκλου. Πόση είναι η μετατόπιση του μήκους κύματος $\lambda - \lambda_0$;

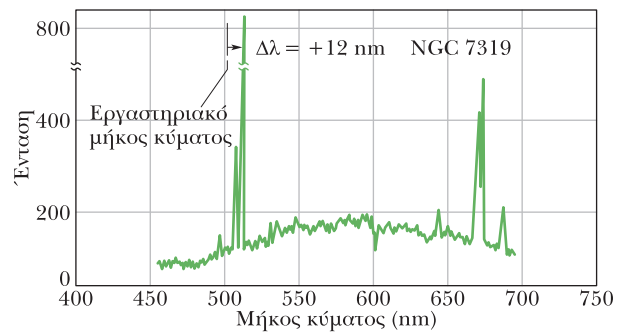
•35 Ένα διαστημόπλοιο καθώς απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα $v = 0.900c$, επικοινωνεί με τον πύργο ελέγχου εκπέμποντας σήματα με σταθερή συχνότητα (μετρημένη στο σύ-

στημα αναφοράς του σκάφους) $f_0 = 100$ MHz. Σε ποια συχνότητα θα πρέπει να συντονιστούν οι γήινοι δέκτες ώστε να λάβουν τα σήματα του σκάφους;

•36 Συγκεκριμένα μήκη κύματος στο φάσμα του φωτός που φτάνει σε εμάς από έναν γαλαξία που βρίσκεται στον αστερισμό της Παρθένου μετριοούνται κατά 0.4% μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα μήκη κύματος που παράγονται από γήινες πηγές. (α) Πόση είναι η ακτινική ταχύτητα αυτού του γαλαξία σε σχέση με τη Γη; (β) Ο γαλαξίας πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη Γη;

•37 Δεχόμενοι ότι η Εξ. 37-36 ισχύει, να υπολογίσετε πόσο γρήγορα πρέπει να περάσετε με κόκκινο ένα φωτεινό σηματοδότη για να φαίνεται πράσινος. Δεχτείτε ότι το μήκος κύματος του κόκκινου φωτός είναι 620 nm ενώ ότι το μήκος κύματος του πράσινου φωτός είναι 540 nm.

•38 Στο Σχ. 37-27 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της έντασης ως προς το μήκος κύματος για την ακτινοβολία που φτάνει στη Γη από τον γαλαξία NGC7319 που βρίσκεται σε απόσταση περίπου 3×10^8 έτη φωτός μακριά. Η ακτινοβολία με τη μεγαλύτερη ένταση εκπέμπεται από το οξυγόνο που βρίσκεται στον γαλαξία αυτό. Στο εργαστήριο η εκπομπή αυτή πραγματοποιείται σε μήκος κύματος $\lambda = 513$ nm, αλλά στην ακτινοβολία που από τον γαλαξία NGC7319, έχει μετατοπιστεί σε μήκος κύματος $\lambda = 525$ nm λόγω του φαινομένου Doppler (όλες οι εκπομπές από τον γαλαξία NGC7319 έχουν μετατοπιστεί). (α) Πόση είναι η ακτινική ταχύτητα του γαλαξία NGC7319 ως προς τη Γη; (β) Πλησιάζει ή απομακρύνεται ο γαλαξίας αυτός από τη Γη;



Σχήμα 37-27 Πρόβλημα 38.

••39 Διαστημόπλοιο απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα $0.20c$. Φωτεινή πηγή στο πίσω μέρος του σκάφους εκπέμπει φως μήκους κύματος $\lambda = 450$ nm, όπως το μετράει παρατηρητής επάνω στο σκάφος. (α) Ποιο μήκος κύματος και (β) χρώμα (μπλε, πράσινο, κίτρινο ή κόκκινο) ανιχνεύει ένας παρατηρητής που παρακολουθεί το σκάφος από τη Γη;

Ενότητα 37-6 Ορμή και Ενέργεια

•40 Πόσο έργο απαιτείται για να αυξηθεί η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου από την ηρεμία σε (α) $0.500c$, (β) $0.990c$, και (γ) $0.9990c$;

••41 Η μάζα ενός ηλεκτρονίου είναι $9.109\,381\,88 \times 10^{-31}$ kg. Να υπολογίσετε με έξι σημαντικά ψηφία (α) το γ και (β) το β για ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια $K = 100.000$ MeV.

••42 Ποια είναι η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να διασπαστεί ο πυρήνας του ^{12}C (μάζας 11.99671 u) σε τρεις πυρήνες ^4He (μάζας 4.00151 u ο καθένας);

••43 Πόσο έργο απαιτείται να εκτελεσθεί για να αυξηθεί η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου (α) από $0.18c$ σε $0.19c$ και (β) από $0.98c$ σε $0.99c$; Προσέξτε ότι και στις δύο περιπτώσεις η ταχύτητα αυξήθηκε κατά $0.01c$.

••44 Στην αντίδραση $p + {}^{19}\text{F} \rightarrow \alpha + {}^{16}\text{O}$, οι μάζες είναι:

$$m(p) = 1.007825 \text{ u}, \quad m(\alpha) = 4.002603 \text{ u}, \\ m(\text{F}) = 18.998405 \text{ u}, \quad m(\text{O}) = 15.994915 \text{ u}.$$

Υπολογίστε την τιμή του Q για την αντίδραση αυτή με αυτά τα δεδομένα.

••45 Από τη σύγκρουση υψηλής ενέργειας ανάμεσα σε ένα σωματίδιο κοσμικών ακτίνων και σε ένα άλλο σωματίδιο από τα ανώτερα ατμοσφαιρικά στρώματα της Γης 120 km από την επιφάνεια της θάλασσας, παράγεται ένα πιόνιο. Το πιόνιο έχει ολική ενέργεια $E = 1.35 \times 10^5$ MeV και ταξιδεύει κατακόρυφα προς την επιφάνεια της Γης. Στο σύστημα ηρεμίας του πιονίου, το πιόνιο διασπάται 35.0 ns μετά τη δημιουργία του. Σε ποιο υψόμετρο πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, όπως μετريέται στο σύστημα αναφοράς της Γης συμβαίνει η διάσπαση του πιονίου; Η ενέργεια ηρεμίας του πιονίου είναι 139.6 MeV.

••46 (α) Αν m είναι η μάζα ενός σωματιδίου, p το μέτρο της ορμής του, και K η κινητική του ενέργεια να αποδείξετε ότι

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}.$$

(β) Για χαμηλές ταχύτητες να αποδείξετε ότι το δεξιό μέρος της εξίσωσης εκφυλίζεται σε m . (γ) Αν ένα σωματίδιο έχει $K = 55.0$ MeV και $p = 121$ MeV/c, πόσος είναι ο λόγος m/m_e , δηλαδή της μάζας του σωματιδίου προς τη μάζα ενός ηλεκτρονίου;

••47 Ένα δισκίο ασπιρίνης 5.00 κόκκων έχει μάζα 320 mg. Για πόσα χιλιόμετρα μπορεί η ενέργεια η οποία αντιστοιχεί σε αυτή τη μάζα να κινεί ένα αυτοκίνητο; Δεχτείτε ότι το αυτοκίνητο καταναλώνει ένα λίτρο (L) βενζίνης για κάθε 12.75 km, και ότι η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την καύση της βενζίνης που κινεί το αυτοκίνητο είναι 3.65×10^7 J/L.

••48 Η μάζα ενός μιονίου είναι 207 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου. Ο μέσος χρόνος ζωής ενός μιονίου σε ηρεμία είναι 2.20 μs . Σε ένα πείραμα μίονια τα οποία κινούνται στο εσωτερικό ενός εργαστηρίου μετρήθηκαν να έχουν μέσο χρόνο ζωής 6.90 μs . Για τα κινούμενα μίονια να υπολογιστούν (α) το β , (β) η K και (γ) η p (σε MeV/c).

••49 Καθώς διαβάζετε αυτή τη σελίδα (σε χαρτί ή στην οθόνη ενός υπολογιστή) ένα πρωτόνιο κοσμικής ακτινοβολίας διαπερνά τη σελίδα από τα αριστερά προς τα δεξιά με σχετική ταχύτητα v και μια ολική ενέργεια $E = 14.24$ nJ. Σύμφωνα με τις μετρήσεις σας το πλάτος της σελίδας από τα αριστερά στα δεξιά είναι 21.0 cm. (α) Πόσο είναι το πλάτος της σελίδας στο σύστημα του πρωτονίου; Πόσο χρόνο χρειάστηκε το πρωτόνιο για να περάσει τη σελίδα στο (β) δικό σας σύστημα αναφοράς και (γ) στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου;

••50 Όταν η κινητική ενέργεια είναι $K = 10.00$ MeV, υπολογίστε με τέσσερα σημαντικά ψηφία (α) τον γ και (β) το β για ένα ηλεκτρόνιο ($E_0 = 0.510998$ MeV), (γ) το γ και (δ) το β για ένα πρωτόνιο ($E_0 = 938.272$ MeV), (ϵ) το γ και (σ) το β για ένα σωματίδιο α ($E_0 = 3727.40$ MeV).

••51 Πόση πρέπει να είναι η ορμή ενός σωματιδίου με μάζα m ώστε η ολική ενέργειά του να είναι ακριβώς 3.00 φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του;

••52 Να εφαρμόσετε το διωνυμικό θεώρημα (Παράρτημα E) στο τελευταίο μέρος της Εξ. 37-52 για την κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου. (α) Κρατήστε τους πρώτους δύο όρους της ανάπτυξης για να αποδείξετε ότι η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$K = (\text{πρώτος όρος}) + (\text{δεύτερος όρος}).$$

Ο πρώτος όρος είναι η κλασική έκφραση για την κινητική ενέργεια. Ο δεύτερος όρος είναι η πρώτης τάξης διόρθωση στην κλασική εξίσωση. Υποθέστε ότι το σωματίδιο είναι ένα ηλεκτρόνιο. Αν η ταχύτητά του v είναι $c/20$ πόση είναι η τιμή της (β) κλασική εξίσωσης και (γ) της διόρθωσης πρώτης τάξης. Αν η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι $0.80c$, πόση είναι (δ) της κλασικής εξίσωσης και (ϵ) της διόρθωσης πρώτης τάξης; (σ) Σε ποια τιμή της παραμέτρου ταχύτητας β η διόρθωση πρώτης τάξης της κινητικής ενέργειας φθάνει το 10% ή περισσότερο της κλασικής τιμής;

••53 Στην Εν. 28-4, δείξαμε ότι ένα σωματίδιο με φορτίο q και μάζα m κινείται σε ένα κύκλο ακτίνας $r = mv/|q|B$, όταν η ταχύτητά του $\vec{v}$ είναι κάθετη σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Αποδείξαμε επίσης ότι η περίοδος T της κίνησης είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας v . Αυτά τα δύο αποτελέσματα είναι κατά προσέγγιση σωστά, όταν $v \ll c$. Για σχετικιστικές ταχύτητες θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη σωστή εξίσωση για την ακτίνα που είναι:

$$r = \frac{p}{|q|B} = \frac{\gamma mv}{|q|B}.$$

(α) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση και τον ορισμό της περιόδου ($T = 2\pi r/v$), να βρείτε τη σωστή σχέση για την περίοδο. (β) Είναι σε αυτή την περίπτωση η περίοδος T ανεξάρτητη του μέτρου της ταχύτητας v ; Αν ένα ηλεκτρόνιο 10 MeV κινείται σε κυκλική τροχιά μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης 2.20 T, πόση είναι (γ) η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς σύμφωνα με το Κεφ. 28, (δ) η σωστή ακτί-

να, (ε) η περίοδος της κυκλικής τροχιάς σύμφωνα με το Κεφ. 28 και $(\sigma\tau)$ η σωστή τιμή της περιόδου;

••54 Πόσο είναι το β για ένα σωματίδιο με (α) $K = 2.00E_0$, και για (β) $E = 2.00E_0$;

••55 Σωματίδιο μάζας m έχει ορμή μέτρου mc . Πόσο είναι τα (α) β , (β) γ και (γ) ο λόγος K/E_0 ;

••56 (α) Η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη ενός 1.00 mol TNT είναι 3.40 MJ. Η γραμμομοριακή μάζα της TNT είναι 0.227 kg/mol. Πόση μάζα από TNT απαιτείται για να απελευθερωθεί με έκρηξη ενέργεια 1.80×10^{14} J; (β) Μπορείτε να μεταφέρετε αυτή την ποσότητα σε ένα σακίδιο ή είναι απαραίτητο φορητό ή τρένο; (γ) Υποθέστε ότι κατά την έκρηξη μιας ατομικής βόμβας σχάσης, το 0.080% της σχάσιμης μάζας μετατρέπεται σε ενέργεια που απελευθερώνεται. Πόση μάζα από σχάσιμο υλικό απαιτείται για να απελευθερωθεί με έκρηξη ενέργεια 1.80×10^{14} J (δ) Μπορείτε να μεταφέρετε αυτή την ποσότητα σε ένα σακίδιο ή είναι απαραίτητο φορητό ή τρένο;

••57 Τα κβάρκς θεωρούνται ότι είναι πυρήνες ενεργών γαλαξιών κατά τα πρώτα στάδια του σχηματισμού τους. Ένα συνηθισμένο κβάρκ ακτινοβολεί ενέργεια με ρυθμό 10^{41} W. Με ποιο ρυθμό μειώνεται η μάζα του ώστε να διατηρείται σταθερή η παραγωγή της ακτινοβολίας; Η απάντησή σας να δοθεί σε ηλιακές μάζες ανά έτος, όπου μια ηλιακή μάζα ($1 \text{ smu} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$) είναι η μάζα του ήλιου μας.

••58 Η μάζα ενός ηλεκτρονίου είναι $9.109\,381\,88 \times 10^{-31} \text{ kg}$. Με ακρίβεια οκτώ σημαντικών ψηφίων, να βρείτε για τις ακόλουθες κινητικές ενέργειες του ηλεκτρονίου: (α) Το γ και (β) το β για $K = 1.000 \text{ keV}$, (γ) το γ και (δ) το β για $K = 1.000 \text{ MeV}$ και τέλος (ε) το γ και $(\sigma\tau)$ β για $K = 1.000 \text{ GeV}$.

••59 Σωματίδιο α με κινητική ενέργεια 7.70 MeV συγκρούεται με έναν πυρήνα ^{14}N που ηρεμεί. Από τη σύγκρουση παράγονται ένας πυρήνας ^{17}O και ένα πρωτόνιο. Το πρωτόνιο εκπέμπεται υπό γωνία 90° ως προς την κατεύθυνση του προσπίπτοντος σωματιδίου α και έχει κινητική ενέργεια 4.44 MeV. Οι μάζες των σωματιδίων είναι $m(p) = 1.007825 \text{ u}$, $m(^{14}\text{N}) = 14.00307 \text{ u}$, $m(\alpha) = 4.00260 \text{ u}$, $m(^{17}\text{O}) = 16.99914 \text{ u}$. Να υπολογισθούν σε MeV (α) η κινητική ενέργεια του πυρήνα του οξυγόνου και (β) η τιμή του Q της αντίδρασης. (Υπόδειξη: τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερα από την ταχύτητα του φωτός c).

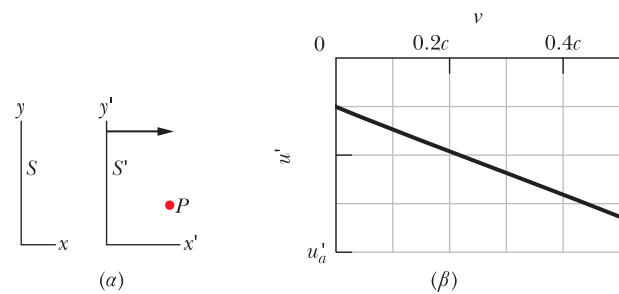
Συμπληρωματικά Προβλήματα

60 Χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων. Τα γεγονότα A και B συμβαίνουν στις ακόλουθες χωροχρονικές συντεταγμένες στα συστήματα αναφοράς του Σχ. 37-25: ως προς το μη τονισμένο σύστημα αναφοράς έχουν συντεταγμένες (x_A, t_A) και (x_B, t_B) , ενώ ως προς το τονισμένο σύστημα αναφοράς έχουν συντεταγμένες (x'_A, t'_A) και (x'_B, t'_B) . Στο μη τονισμένο σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $\Delta t = t_B - t_A = 1.00 \mu\text{s}$ και $\Delta x = x_B - x_A = 240 \text{ m}$. (α) Να βρεθεί μια έκφραση για το χρονικό

διάστημα $\Delta t'$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β και των δεδομένων στοιχείων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του $\Delta t'$ ως προς το β για τις παρακάτω δύο περιοχές τιμών του β . (β) 0 έως 0.01 (γ) 0.1 έως 1. (δ) Για ποια τιμή του β το $\Delta t'$ είναι ελάχιστο και (ε) ποια είναι η ελάχιστη αυτή τιμή; $(\sigma\tau)$ Μπορεί ένα από αυτά τα γεγονότα να είναι η αιτία του δεύτερου; Εξηγήστε την απάντησή σας.

61 Χωρική διαφορά δύο γεγονότων. Τα γεγονότα A και B έχουν τις ακόλουθες χωροχρονικές συντεταγμένες στα συστήματα αναφοράς του Σχ. 37-25: ως προς το μη τονισμένο σύστημα αναφοράς έχουν συντεταγμένες (x_A, t_A) και (x_B, t_B) , ενώ ως προς το τονισμένο σύστημα αναφοράς τις (x'_A, t'_A) και (x'_B, t'_B) . Στο μη τονισμένο σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $\Delta t = t_B - t_A = 1.00 \mu\text{s}$ και $\Delta x = x_B - x_A = 240 \text{ m}$. (α) Να βρεθεί μια έκφραση για το $\Delta x'$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β και των δεδομένων στοιχείων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του $\Delta x'$ ως συνάρτηση του β για τις δύο περιοχές τιμών του β . (β) 0 έως 0.01 (γ) 0.1 έως 1. (δ) Για ποια τιμή του β είναι η $\Delta x' = 0$;

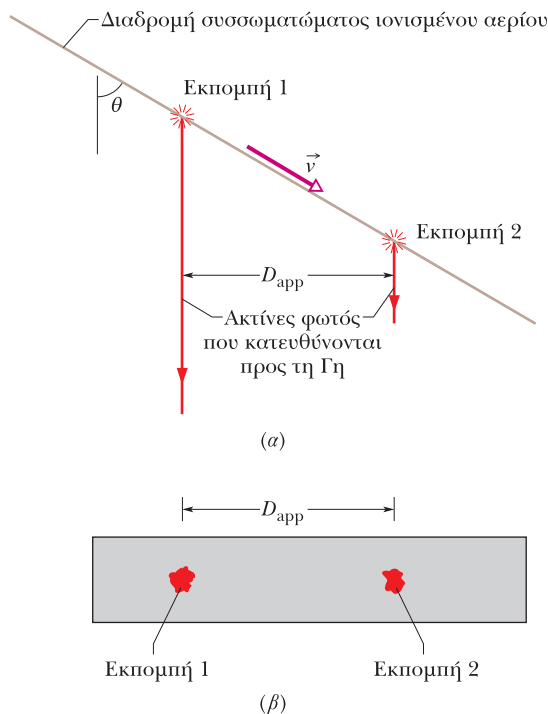
62 Στο Σχ. 37-28α το σωματίδιο P κινείται παράλληλα στους άξονες x και x' των συστημάτων αναφοράς S και S' με σταθερή ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς S . Το σύστημα αναφοράς S' κινείται παράλληλα προς τον άξονα x του συστήματος αναφοράς S με ταχύτητα v . Στο Σχ. 37-28β φαίνεται η ταχύτητα u' του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς S' μια περιοχή τιμών της v . Η κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα προσδιορίζεται από την τιμή $u'_a = -0.800c$. Ποια τιμή θα έχει η u' αν (α) $v = 0.80c$ και (β) $v \rightarrow c$;



Σχήμα 37-28 Πρόβλημα 62.

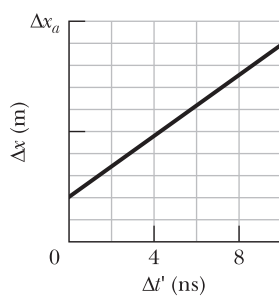
63 Υπερφωτονικοί πίδακες. Στο Σχ. 37-29α παρουσιάζεται η τροχιά την οποία ακολουθεί ένα συσσωμάτωμα σε πίδακα ιονισμένου αερίου το οποίο έχει εκτοξευθεί από ένα γαλαξία. Το συσσωμάτωμα ταξιδεύει με ταχύτητα $\vec{v}$ υπό γωνία θ ως προς την κατεύθυνση της Γης. Το συσσωμάτωμα κατά περιόδους εκπέμπει μια δέσμη φωτός η οποία τελικά ανιχνεύεται από έναν παρατηρητή στη Γη. Δύο από αυτές τις δέσμες παρουσιάζονται στο Σχ. 37-29α. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις δύο δέσμες είναι t όπως αυτό μετρίεται από ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς κοντά στις εκπομπές αυτές. Το Σχ. 37-29β δείχνει τις εκπομπές αυτές όπως θα ήταν αν είχαν φωτογραφηθεί στο ίδιο κομμάτι φιλμ, πρώτα όταν το φως από τη δέσμη 1 έφθασε στη Γη και μετά, αργότερα, όταν το φως από τη δέσμη 2 έφθασε στη Γη. Η φαινόμενη απόσταση D_{app}

την οποία διανύει το συσσωμάτωμα μεταξύ δύο εκπομπών είναι η απόσταση κατά μήκος της διαδρομής του συσσωμάτωματος από την άποψη ενός γήινου παρατηρητή. Ο φαινόμενος χρόνος T_{app} ανάμεσα στις εκπομπές των δύο δεσμών είναι η διαφορά μεταξύ των χρονικών στιγμών που φθάνουν στη Γη οι δύο δέσμες. Η φαινόμενη ταχύτητα του συσσωμάτωματος είναι τότε $V_{\text{app}} = D_{\text{app}}/T_{\text{app}}$. Να υπολογιστούν σε συνάρτηση με τα v , t και θ (α) η D_{app} (β) ο T_{app} . (γ) Να υπολογισθεί η V_{app} για $v = 0.980c$ και $\theta = 30.0^\circ$. Όταν υπερφωτονικοί (που φαινομενικά κινούνται με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός) πίδακες παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά, φάνηκε ότι παραβιάζουν τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας, τουλάχιστον μέχρι που η γεωμετρία (Σχ. 37-29α) του προβλήματος κατανοήθηκε πλήρως.



Σχήμα 37-29 Πρόβλημα 63.

64 Το σύστημα αναφοράς S' προσπερνά το σύστημα αναφοράς S με σταθερή ταχύτητα όπως φαίνεται στο Σχ. 37-9. Τα γεγονότα 1 και 2 απέχουν μεταξύ τους κατά $\Delta x'$, όπως μετριέται από έναν παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς S' . Όμως το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ μεταξύ τους σύμφωνα με αυτόν τον παρατηρητή δεν έχει οριστεί ακόμα. Στο Σχ. 37-30 φαίνεται η χωρική του απόσταση Δx σύμφωνα με παρατηρητή στο σύστημα S , ως συνάρτηση της $\Delta t'$ για συγκεκριμένη περιοχή τιμών του $\Delta t'$. Η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα προσδιορίζεται από την τιμή $\Delta x_a = 10.0$ m. Πόση είναι η $\Delta x'$;



Σχήμα 37-30 Πρόβλημα 64.

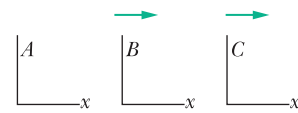
65 Μια άλλη προσέγγιση στους μετασχηματισμούς ταχυτήτων. Στο Σχ. 37-31 συστήματα αναφοράς B και C προσπερνούν το σύστημα αναφοράς A κατά μήκος της διεύθυνσης του κοινού τους άξονα x . Θα χαρακτηρίσουμε τη συνιστώσα x της ταχύτητας του ενός συστήματος αναφοράς σε σχέση με το άλλο χρησιμοποιώντας δείκτη δύο γράμμάτων. Λόγου χάρι v_{AB} είναι η συνιστώσα x της ταχύτητας του συστήματος αναφοράς A ως προς το B . Ομοίως θα χαρακτηρίσουμε τις παραμέτρους ταχύτητας με δείκτες δύο γραμμάτων. Λόγου χάρι β_{AB} ($= v_{AB}/c$) είναι η παράμετρος ταχύτητας που αντιστοιχεί στην v_{AB} . (α) Να δείξετε ότι

$$\beta_{AC} = \frac{\beta_{AB} + \beta_{BC}}{1 + \beta_{AB}\beta_{BC}}.$$

Έστω ότι με M_{AB} συμβολίζουμε τον λόγο $(1 - \beta_{AB})/(1 + \beta_{AB})$ και έστω οι ποσότητες M_{BC} και M_{AC} αντιστοιχούν με παρόμοιους λόγους. (β) Από τη σχέση

$$M_{AC} = M_{AB}M_{BC}$$

αποδείξτε τη σχέση του ερωτήματος (α) και με αυτό τον τρόπο επιβεβαιώσετε ότι η σχέση αυτή είναι αληθής.



Σχήμα 37-31 Προβλήματα 65, 66 και 67.

66 Συνέχεια του Προβλήματος 65. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της ερώτησης (β) του Προβλήματος 65 για την κίνηση κατά μήκος ενός κοινού άξονα στην παρακάτω περίπτωση. Το σύστημα αναφοράς A στο Σχ. 37-31 είναι συνδεδεμένο με ένα σωματίδιο το οποίο, καθώς προσπερνά το σύστημα αναφοράς B , κινείται με ταχύτητα $+0.500c$. Επίσης το σύστημα αναφοράς B κινείται με ταχύτητα $+0.500c$ ως προς το σύστημα αναφοράς C . Πόσο είναι (α) το M_{AC} (β) το β_{AC} και (γ) η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς C ;

67 Συνέχεια του Προβλήματος 65. Έστω ότι το σύστημα αναφοράς C του Σχ. 37-31 προσπερνά ένα τέταρτο σύστημα αναφοράς D (το οποίο δεν φαίνεται στο σχήμα). (α) Να αποδειχθεί η σχέση

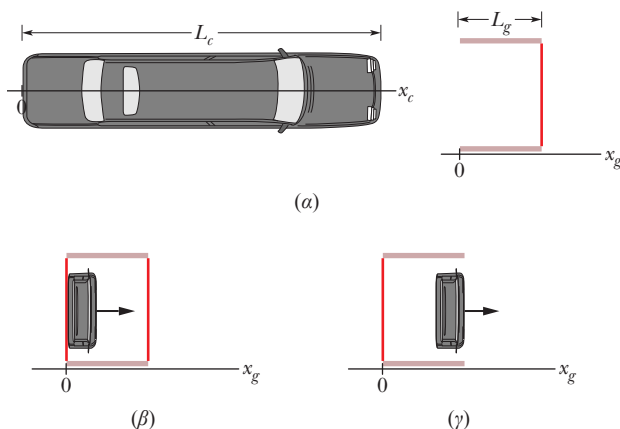
$$M_{AD} = M_{AB}M_{BC}M_{CD}.$$

(β) Εφαρμόστε αυτή τη γενική σχέση στην εξής περίπτωση: τρία σωματίδια κινούνται παράλληλα με έναν άξονα ως προς τον οποίο είναι ακίνητος ένας παρατηρητής. Έστω ότι το θετικό και το αρνητικό πρόσημο ορίζουν τις κατευθύνσεις της κίνησης κατά μήκος αυτού του άξονα. Το σωματίδιο A προσπερνά το σωματίδιο B με $\beta_{AB} = +0.20$. Το σωματίδιο B προσπερνά το σωματίδιο C με $\beta_{BC} = -0.40$. Το σωματίδιο C προσπερνά τον παρατηρητή D με $\beta_{CD} = +0.60$. Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου A ως προς τον παρατηρητή D ; (Η λύση με αυτή την τεχνική είναι πολύ γρηγορότερη από όσο αν χρησιμοποιούσατε την Εξ. 37-29.)

68 Στο Σχ. 37-16 φαίνεται ένα διαστημόπλοιο (το οποίο είναι συνδεδεμένο στο σύστημα αναφοράς S') που μας προσπερνά (καθώς στεκόμαστε ακίνητοι σε σχέση με το σύστημα αναφοράς S) με ταχύτητα $\vec{v} = 0.950c\hat{i}$. Ένα πρωτόνιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $0.980c$ ως προς το διαστημόπλοιο, από το μπροστινό μέρος του σκάφους προς το πίσω μέρος. Το μήκος ηρεμίας του σκάφους είναι 760 m . Πόσο είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα σύμφωνα με (α) έναν επιβάτη μέσα στο σκάφος και (β) με εμάς. Στη συνέχεια θεωρήστε ότι ένα δεύτερο πρωτόνιο εκτοξεύεται με την ίδια ταχύτητα από πίσω μέρος του σκάφους προς το μπροστινό. Πόσο θα είναι τότε το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα της εκτόξευσης του πρωτονίου από την πρύμνη και της άφιξης του πρωτονίου στην πλώρη σύμφωνα με (γ) έναν επιβάτη μέσα στο σκάφος και (δ) με εμάς.

69 Το πρόβλημα του αυτοκινήτου στο γκαράζ. Ο Αυτοκινητάκης έχει μόλις αγοράσει τη μακρύτερη λιμουζίνα που υπάρχει στον κόσμο, που έχει μήκος ηρεμίας $L_c = 30.5\text{ m}$. Στο Σχ. 37-32α, φαίνεται παρκαρισμένη μπροστά σε γκαράζ μήκους ηρεμίας $L_g = 6.00\text{ m}$. Το γκαράζ έχει μια μπροστινή πόρτα (στο σχήμα φαίνεται ότι είναι ανοιχτή) και μια πίσω πόρτα (στο σχήμα φαίνεται κλειστή). Η λιμουζίνα είναι προφανώς μακρύτερη από το γκαράζ. Παρ' όλα αυτά ο Γκαραζάκης, στον οποίον ανήκει το γκαράζ, και γνωρίζει για τη σχετική συστολή του μήκους, βάζει ένα στοίχιμα με τον Αυτοκινητάκη, ο οποίος είχε εγκαταλείψει τις σπουδές του στη φυσική πριν φτάσει στο μάθημα της ειδικής σχετικότητας. Ο Γκαραζάκης υποστηρίζει ότι η λιμουζίνα μπορεί να χωρέσει στο γκαράζ και με τις δύο πόρτες κλειστές ενώ ο Αυτοκινητάκης υποστηρίζει ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο εξαρχής.

Για να μελετήσουμε τη στρατηγική του Γκαραζάκη συνδέουμε ένα σύστημα αναφοράς με τη λιμουζίνα ώστε ο άξονας του x_c να είναι παράλληλος προς το μήκος της λιμουζίνας και θέτουμε $x_c = 0$ στο πίσω μέρος της. Επίσης συνδέουμε ένα σύστημα αναφοράς με το γκαράζ ώστε ο άξονας x_g να είναι παράλληλος με το μήκος του γκαράζ και θέτουμε $x_g = 0$ στην αρχικά ανοιχτή μπροστινή πόρτα του. Στη συνέχεια ο Αυτοκινητάκης θα βάλει το αυτοκίνητο μέσα από τη μπροστινή πόρτα με ταχύτητα $v = 0.9980c$ (κάτι που είναι τεχνικά και οικονομικά αδύνατο). Ο Αυτοκινητάκης είναι ακίνη-



Σχήμα 37-32 Πρόβλημα 69.

τος στο σύστημα αναφοράς x_c , ενώ ο Γκαραζάκης είναι ακίνητος στο σύστημα αναφοράς x_g .

Θα πρέπει να μελετήσουμε δύο γεγονότα. Γεγονός 1: Όταν το πίσω μέρος του αυτοκινήτου περάσει από τη μπροστινή πόρτα, αυτή κλείνει αυτόματα. Έστω ότι ο χρόνος που μετρούν και οι δύο παρατηρητές για αυτό το γεγονός είναι μηδέν: $t_{g1} = t_{c1} = 0$. Το γεγονός αυτό συμβαίνει στη συντεταγμένη $x_c = x_g = 0$. Στο Σχ. 37-32β παρουσιάζεται το γεγονός 1 στο σύστημα αναφοράς x_g . Γεγονός 2: Όταν το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου φτάνει στην πίσω πόρτα, αυτή ανοίγει αυτόματα. Στο Σχ. 37-32γ παρουσιάζεται το γεγονός 2 στο x_g σύστημα αναφοράς.

Σύμφωνα με τον Γκαραζάκη (α) πόσο είναι το μήκος της λιμουζίνας και ποιες είναι οι χωροχρονικές συντεταγμένες (β) x_{g2} και (γ) t_{g2} του γεγονότος 2; (δ) Για πόσο χρόνο η λιμουζίνα είναι προσωρινά «εγκλωβισμένη» μέσα στο γκαράζ και με τις δύο πόρτες κλειστές; Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το φαινόμενο σε σχέση με το σύστημα αναφοράς x_c . Σ' αυτό το σύστημα αναφοράς το γκαράζ κινείται ως προς τη λιμουζίνα με ταχύτητα $-0.9980c$. Σύμφωνα με τον Αυτοκινητάκη (ε) πόσο είναι το μήκος του γκαράζ, καθώς τον προσπερνάει και ποιες είναι οι χωροχρονικές συντεταγμένες (στ) x_{c2} και (ζ) t_{c2} του γεγονότος 2; (η) Ήταν ποτέ η λιμουζίνα μέσα στο γκαράζ και με τις δύο πόρτες κλειστές; (θ) Ποιο γεγονός συμβαίνει πρώτο; (ι) Σχεδιάσε τα γεγονότα 1 και 2 όπως τα παρατηρεί ο Αυτοκινητάκης. (κ) Είναι τα δύο γεγονότα αιτιοκρατικά συνδεδεμένα, δηλαδή είναι το ένα γεγονός η αιτία του άλλου; (ικ) Τελικά ποιος κέρδισε το στοίχιμα;

70 Αεροπλάνο μήκους ηρεμίας 40.0 m κινείται ως προς τη Γη με σταθερή ταχύτητα $v = 630\text{ m/s}$. α) Κατά πόσο ποσοστό μικρότερο από το μήκος ηρεμίας του το παρατηρεί ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς της Γης; β) Πόσος χρόνος θα περάσει σύμφωνα με τα γήινα ρολόγια για να μείνει πίσω το ρολόι του αεροπλάνου κατά $1.00\text{ }\mu\text{s}$; (Να χρησιμοποιήσετε τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας στους υπολογισμούς σας.)

71 Δορυφόρος σε χαμηλή τροχιά, πρέπει να έχει ταχύτητα $v = 2.7 \times 10^4\text{ km/h}$ για να εκτελέσει κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη. Υποθέστε ότι δύο τέτοιοι δορυφόροι εκτελούν κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη προς αντίθετες κατευθύνσεις. (α) Πόση είναι η σχετική τους ταχύτητα τη στιγμή που συναντιούνται σύμφωνα με την κλασική φυσική (μετασχηματισμοί Γαλιλαίου); (β) Ποιο είναι το ποσοστιαίο λάθος που κάνετε στο ερώτημα (α) μη χρησιμοποιώντας τη σωστή σχετικιστική έκφραση;

72 Να βρείτε την παράμετρο ταχύτητας ενός σωματιδίου που χρειάζεται 2.0 χρόνια περισσότερο από όσο χρειάζεται το φως για να διανύσει μια απόσταση 6.0 ετών φωτός.

73 Πόσο έργο απαιτείται για να επιταχυνθεί ένα πρωτόνιο από την ταχύτητα $v_1 = 0.9850c$ σε μια ταχύτητα $v_2 = 0.9860c$;

74 Ένα πόνιο δημιουργείται στα ανώτερα ατμοσφαιρικά στρώματα της Γης, όταν ένα υψηλής ενέργειας σωματίδιο των

κοσμικών ακτίνων προσπίπτει πάνω σε έναν ατομικό πυρήνα. Το πiónιο που παράγεται κινείται προς την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα $0.99c$. Στο σύστημα ηρεμίας των πιονίων, αυτά διασπώνται με μέσο χρόνο ζωής 26 ns . Πόση απόσταση κατά μέσο όρο θα διανύσει ένα τέτοιο πiónιο κατά την κάθοδό του προς τη Γη, μέσα από την ατμόσφαιρα, πριν διασπαστεί, όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς της Γης;

75 Έστω ένα ηλεκτρόνιο ολικής ενέργειας 1533 MeV το οποίο ξεκινάει από τον Βέγα, ένα άστρο που βρίσκεται σε απόσταση $26 \text{ έτη φωτός (ly)}$ από εμάς, και φθάνει στη Γη. Πόση απόσταση μετρημένη σε έτη φωτός (ly) διάνυσε το ηλεκτρόνιο στο σύστημα αναφοράς του;

76 Η ολική ενέργεια ενός πρωτονίου καθώς αυτό περνά μέσα από μια εργαστηριακή συσκευή είναι 10.611 nJ . Πόση είναι η παράμετρος ταχύτητάς του β ; Να χρησιμοποιήσετε τη μάζα του πρωτονίου η οποία δίνεται στο Παράρτημα Β κάτω από τη στήλη «καλύτερη τιμή» και όχι τη στρογγυλοποιημένη προσεγγιστική τιμή που συνήθως χρησιμοποιούμε.

77 Ένα διαστημόπλοιο που βρίσκεται σε ηρεμία ως προς το σύστημα αναφοράς S , ξαφνικά αποκτά ταχύτητα $0.50c$. Κατόπιν σε σχέση με το νέο σύστημα ηρεμίας του η ταχύτητά του αυξάνεται κατά $0.50c$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι η ταχύτητά του σε σχέση με το αρχικό σύστημα αναφοράς S να ξεπεράσει την τιμή $0.999c$. Πόσες επιταχύνσεις απαιτεί η διαδικασία αυτή;

78 Στο σύστημα του εργαστηρίου μια ακτινοβολία έχει μήκος κύματος 434 nm . Όταν αυτή η ακτινοβολία φτάνει σ' εμάς από έναν μακρινό γαλαξία, λόγω ερυθράς μετατόπισης εμφανίζει μήκος κύματος 462 nm . (α) Πόση είναι η ακτινική ταχύτητα του γαλαξία ως προς τη Γη; (β) Πλησιάζει ή απομακρύνεται ο γαλαξίας αυτός από τη Γη;

79 Πόση είναι η ορμή σε MeV/c ενός ηλεκτρονίου που έχει κινητική ενέργεια 2.00 MeV ;

80 Η ακτίνα της Γης είναι 6370 km και η γραμμική της ταχύτητα γύρω από τον Ήλιο είναι 30 km/s . Υποθέστε ότι η Γη προσπερνάει έναν παρατηρητή με αυτή την ταχύτητα. Για τον παρατηρητή αυτόν, πόσο θα συσταλεί η διάμετρος της Γης κατά τη διεύθυνση της κίνησης;

81 Σωματίδιο μάζας m κινείται με ταχύτητα $c/2$ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς S . Το σωματίδιο συγκρούεται με ένα ακριβώς όμοιο σωματίδιο που βρίσκεται σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς S . Σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς S' η ολική ορμή αυτών των σωματιδίων είναι μηδέν. Αυτό το σύστημα αναφοράς ονομάζεται *σύστημα αναφοράς του κέντρου της ορμής*. Πόση είναι η ταχύτητα του συστήματος αναφοράς S' ως προς το S ;

82 Στοιχειώδες σωματίδιο που παράγεται σε εργαστηριακό πείραμα στο εργαστήριο διανύει απόσταση 0.230 mm κατά μήκος του εργαστηρίου με σχετική ταχύτητα $0.960c$ πριν διασπαστεί (και μετατραπεί σε άλλο σωματίδιο). (α) Πόσος είναι ο

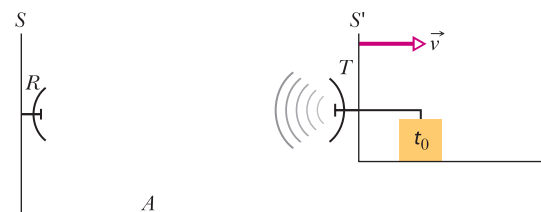
ιδιόχρονος ζωής του σωματιδίου; (β) Πόση απόσταση διανύει το σωματίδιο μετρημένη στο σύστημα ηρεμίας του;

83 Για ένα πρωτόνιο που κινείται με ταχύτητα $0.990c$ να υπολογιστεί (α) η K (β) η E και (γ) η p (σε GeV/c). Για ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με ταχύτητα $0.990c$ να υπολογιστεί (δ) η K (ε) η E και (στ) η p (σε MeV/c).

84 Ένας πομπός ραντάρ T είναι συνδεδεμένος με ένα σύστημα αναφοράς S' , το οποίο κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα v ως προς ένα σύστημα αναφοράς S (Σχ. 37-33). Στο σύστημα αναφοράς S' ένα μηχανικό χρονόμετρο (βασικά ένα ρολόι) που έχει περίοδο τ_0 (μετρημένη στο σύστημα αναφοράς S') υποχρεώνει τον πομπό T να εκπέμπει παλμούς ραντάρ, που διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός και οι οποίοι λαμβάνονται από έναν δέκτη R , που είναι συνδεδεμένος στο σύστημα αναφοράς S' . (α) Πόση είναι η περίοδος τ του χρονόμετρου όπως αυτή μετριέται από έναν παρατηρητή A που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S ; (β) Να δείξετε ότι στον δέκτη R , το χρονικό διάστημα με την οποία λαμβάνονται τα σήματα από τον πομπό T δεν είναι τ ή τ_0 , αλλά:

$$\tau_R = \tau_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

(γ) Να εξηγήσετε γιατί ο δέκτης R αλλά και ο παρατηρητής A που βρίσκονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς μετρούν διαφορετική περίοδο για τον πομπό. (Υπόδειξη: Ένα ρολόι και ένας παλμός ραντάρ δεν είναι το ίδιο πράγμα.)



Σχήμα 37-33 Πρόβλημα 84.

85 Σωματίδιο κοσμικών ακτίνων πλησιάζει τη Γη κατά μήκος του άξονα Βορρά-Νότου της Γης με ταχύτητα $0.80c$ κινούμενο προς το γεωγραφικό βόρειο πόλο. Ένα δεύτερο παρόμοιο σωματίδιο πλησιάζει τη Γη με ταχύτητα $0.60c$ κινούμενο προς τον γεωγραφικό νότιο πόλο (Σχ. 37-34). Πόση είναι η σχετική ταχύτητα με την οποία το ένα σωματίδιο πλησιάζει το άλλο;



Σχήμα 37-34 Πρόβλημα 85.

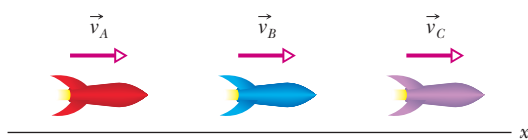
86 (α) Πόση ενέργεια απελευθερώνεται κατά την έκρηξη μιας πυρηνικής βόμβας σχάσης που περιέχει 3.0 kg σχάσιμο υλικό; Να υποθέσετε ότι το 0.10% της μάζας του σχάσιμου υλικού μετατρέπεται σε ενέργεια που

απελευθερώνεται. (β) Πόση μάζα TNT θα πρέπει να εκραγεί για να μας προμηθεύσει το ίδιο ποσό ενέργειας; Να υποθέσετε ότι το ένα γραμμομόριο TNT απελευθερώνει 3.4 MJ ενέργειας κατά την έκρηξή του. Η γραμμομοριακή μάζα της TNT είναι 0.227 kg/mol. (γ) Για την ίδια μάζα εκρηκτικών πόσος είναι ο λόγος της ενέργειας που απελευθερώνεται σε μια πυρηνική έκρηξη ως προς την ενέργεια που απελευθερώνεται σε μία έκρηξη από TNT;

87 (α) Πόση διαφορά δυναμικού θα επιτάχυνε ένα ηλεκτρόνιο σε ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός c σύμφωνα με την κλασική φυσική; (β) Με αυτή τη διαφορά δυναμικού ποια είναι η ταχύτητα που τελικά θα αποκτήσει το ηλεκτρόνιο;

88 Ένα καταδρομικό των Foron καταδιώκει μια ανιχνευτική άκατο των Ερπετοειδών, πάνω στην ευθεία που συνδέει τα δύο σκάφη και εκτοξεύει ένα παραπλανητικό ομοίωμα σκάφους προς την κατεύθυνση της άκατου. Σε σχέση με την άκατο το ομοίωμα ταξιδεύει με μια ταχύτητα $0.980c$, ενώ το καταδρομικό κινείται με ταχύτητα $0.900c$. Πόση είναι η ταχύτητα του ομοιώματος σε σχέση με το καταδρομικό;

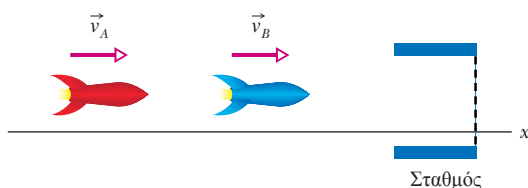
89 Στο Σχήμα 37-35 τρία διαστημόπλοια κυνηγούν το ένα το άλλο. Ως προς το άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος (ας πούμε ως προς ένα σύστημα συνδεδεμένο με τη Γη) οι ταχύτητές τους είναι $v_A = 0.900c$, v_B και $v_C = 0.800c$. (α) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα v_B ώστε τα διαστημόπλοια A και C να πλησιάζουν το B με την ίδια σχετική ταχύτητα ως προς το B και (β) πόση είναι αυτή η ταχύτητα;



Σχήμα 37-35 Πρόβλημα 89.

90 Δύο διαστημικά καταδρομικά A και B κινούνται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Το καταδρομικό A είναι ταχύτερο, έχει σχετική ταχύτητα $v = 0.900c$ και ιδιομήκος $L = 200\text{m}$. Σύμφωνα με τον πιλότο, το A , τη χρονική στιγμή ($t = 0$) που η ουρά του ενός καταδρομικού είναι ακριβώς απέναντι από την άλλη, η μύτη του ενός είναι επίσης ακριβώς απέναντι από την άλλη. Σύμφωνα με τον πιλότο B , μετά από πόσο χρόνο η μύτη του ενός καταδρομικού θα βρίσκεται ακριβώς απέναντι από την άλλη;

91 Στο Σχήμα 37-36 δύο διαστημικά καταδρομικά πετούν προς έναν διαστημικό σταθμό. Ως προς τον σταθμό το καταδρομικό A έχει ταχύτητα $0.800c$. Ως προς το σταθμό πόση



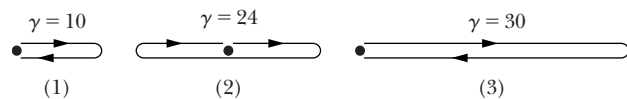
Σχήμα 37-36 Πρόβλημα 91.

πρέπει να είναι η ταχύτητα του B έτσι ώστε ο πιλότος του να βλέπει ότι τόσο το A όσο και ο σταθμός πλησιάζουν το B με την ίδια ταχύτητα;

92 Σχετικιστικό τρένο ιδιομήκους 200 m κινούμενο με ταχύτητα $0.900c$ πλησιάζει σε τούνελ, με το ίδιο ιδιομήκος. Μια χρωμοβόμβα που βρίσκεται στη μηχανή του τρένου έχει ρυθμιστεί να εκραγεί (και να χρωματίσει με μπλε μπογιά τον χώρο της μηχανής) όταν το μπροστινό τμήμα του τρένου φτάσει στην έξοδο του τούνελ (αυτό είναι το γεγονός FF). Ωστόσο, όταν το τελευταίο βαγόνι φτάσει στην είσοδο του τούνελ (αυτό είναι το γεγονός RN), μια συσκευή σε αυτό το βαγόνι έχει ρυθμιστεί ώστε να στείλει ένα σήμα στη μηχανή του τρένου και η βόμβα να απενεργοποιηθεί. Από την άποψη ενός παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στο τρένο: (α) Πόσο είναι το μήκος του τούνελ; (β) Ποιο γεγονός συμβαίνει πρώτο, το FF ή το RN; (γ) Πόσος είναι ο χρόνος μεταξύ των γεγονότων; (δ) Η χρωμοβόμβα θα εκραγεί; Από την άποψη ενός παρατηρητή που είναι ακίνητος ως προς το τούνελ: (ε) Πόσο είναι το μήκος του τρένου; (στ) Ποιο γεγονός συμβαίνει πρώτο; (ζ) Πόσος είναι ο χρόνος μεταξύ των δύο γεγονότων; (η) Η χρωμοβόμβα θα εκραγεί; Αν οι απαντήσεις σας στα ερωτήματα (δ) και (ζ) διαφέρουν μεταξύ τους, θα πρέπει να εξηγήσετε το παράδοξο, διότι ο χώρος της μηχανής θα καλυφθεί με μπλε χρώμα ή όχι. Δεν είναι δυνατόν να συμβούν και τα δύο. Αν οι απαντήσεις σας είναι ίδιες μεταξύ τους, θα πρέπει να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό.

93 Σωματίδιο A (με ενέργεια ηρεμίας 200 MeV) είναι ακίνητο ως προς το σύστημα του εργαστηρίου και διασπάται σε ένα σωματίδιο B (ενέργεια ηρεμίας 100 MeV) και σε ένα σωματίδιο C (ενέργειας ηρεμίας 50 MeV). Πόση είναι (α) η ολική ενέργεια και (β) η ορμή του B , (γ) η ολική ενέργεια και (δ) η ορμή του C ;

94 Στο Σχήμα 37-37 φαίνονται τρεις περιπτώσεις στις οποίες ένα διαστημόπλοιο προσπερνά τη Γη (που παριστάνεται με μια τελεία) και κατόπιν επιστρέφει προσπερνώντας πάλι τη Γη. Σε κάθε περίπτωση φαίνεται ο αντίστοιχος συντελεστής Lorentz. Ως προς το σύστημα ηρεμίας της Γης το μήκος του συνολικού ταξιδιού είναι: για το ταξίδι 1 $2D$, για το ταξίδι 2 $4D$ και για το ταξίδι 3 $6D$. Χωρίς να λάβετε υπόψη σας τον χρόνο που διήρκεσε η επιτάχυνση, βρείτε με τη βοήθεια του D και του c τον χρόνο που διήρκεσε (α) το ταξίδι (1), (β) το ταξίδι (2) και (γ) το ταξίδι (3), ως προς το σύστημα ηρεμίας της Γης. Κατόπιν, βρείτε τον χρόνο που διήρκεσε (δ) το ταξίδι (1), (ε) το ταξίδι (2) και (στ) το ταξίδι 3 ως προς το σύστημα ηρεμίας του διαστημόπλοιου. (Υπόδειξη: Για μεγάλες τιμές του παράγοντα Lorentz η σχετική ταχύτητα είναι περίπου c .)



Σχήμα 37-37 Πρόβλημα 94.

95 Μετρήσεις ιονισμού δείχνουν ότι ένα ελαφρό πυρηνικό σωματίδιο έχει διπλάσιο φορτίο από το στοιχειώδες φορτίο