

Περιεχόμενα

Πρόλογος 17

Σημείωμα προς τον φοιτητή 20

Πρόλογος ελληνικής έκδοσης 21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Τυπική λογική 23

1.1 Προτάσεις, συμβολική αναπαράσταση και ταυτολογίες 24

Σύνδεσμοι και τιμές αληθείας 24

Ταυτολογίες 29

Λογικοί σύνδεσμοι στον πραγματικό κόσμο 31

Ένας αλγόριθμος 32

ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ Μπορεί το «και» κάποτε να γίνει «ή»; 35

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1 Ανασκόπηση 36

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1 36

1.2 Προτασιακή λογική 44

Έγκυρα επιχειρήματα 44

Παραγωγικοί κανόνες της προτασιακής λογικής 46

Παραγωγική μέθοδος και άλλοι κανόνες 50

Λεκτικά επιχειρήματα 51

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2 Ανασκόπηση 53

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2 53

1.3 Ποσοδείκτες, κατηγορήματα και εγκυρότητα 57

Ποσοδείκτες και κατηγορήματα 57

Μετατροπή 60

Εγκυρότητα 64

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3 Ανασκόπηση 66

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.3 66

1.4 Κατηγορηματική λογική 72

Παραγωγικοί κανόνες της κατηγορηματικής λογικής 73

Καθολικός προσδιορισμός 74

Υπαρξιακός προσδιορισμός 75

Καθολική γενίκευση 75

Υπαρξιακή γενίκευση 77

Περισσότερη δουλειά με τους κανόνες 77

Λεκτικά επιχειρήματα 81

Συμπέρασμα 82

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.4 Ανασκόπηση 83

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.4 83

1.5 Λογικός προγραμματισμός 86*Prolog 86**Όροι Horn και επίλυση 88**Αναδρομή 91**Έμπειρα συστήματα 93***ΕΝΟΤΗΤΑ 1.5 Ανασκόπηση 94****ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.5 94****1.6 Απόδειξη της ορθότητας 96***Ισχυρισμοί 97**Κανόνας εκχώρησης 98**Υπό συνθήκη κανόνας 100***ΕΝΟΤΗΤΑ 1.6 Ανασκόπηση 102****ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.6 103****ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Ανασκόπηση 105****ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ 106****ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Αποδείξεις, επαγωγή και θεωρία αριθμών 107****2.1 Τεχνικές απόδειξης 108***Θεωρήματα και μη τυπικές αποδείξεις 108**Να αποδείξουμε ή να μην αποδείξουμε 108**Εξαντλητική απόδειξη 109**Άμεση απόδειξη 111**Αντιθετοαντιστροφή 112**Απαγωγή σε άτοπο 114**Συγκυριακή απόδειξη 115**Συνήθεις ορισμοί 116***ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1 Ανασκόπηση 117****ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.1 117****2.2 Επαγωγή 119***Πρώτη αρχή της επαγωγής 119**Αποδείξεις με μαθηματική επαγωγή 121**Δεύτερη αρχή της επαγωγής 126***ΕΝΟΤΗΤΑ 2.2 Ανασκόπηση 130****ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.2 130****2.3 Περισσότερα πάνω στην απόδειξη της ορθότητας αλγορίθμων 135***Κανόνας βρόχου 136**Ευκλείδειος αλγόριθμος 139*

ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ Ανάπτυξη ασφαλέστερου λογισμικού 141

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.3 Ανασκόπηση 142**ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.3 142****2.4 Θεωρία αριθμών 147***Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής 148**Περισσότερα για τους πρώτους αριθμούς 151**Συνάρτηση φ του Euler 153***ΕΝΟΤΗΤΑ 2.4 Ανασκόπηση 155****ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.4 155****ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Ανασκόπηση 158****ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ 158****ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Αναδρομή, αναδρομικές σχέσεις και ανάλυση αλγορίθμων 160****3.1 Αναδρομικοί ορισμοί 161***Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά 161*

Σύνολα που ορίζονται αναδρομικά 164
Πράξεις που ορίζονται αναδρομικά 167
Αλγόριθμοι που ορίζονται αναδρομικά 168

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.1 Ανασκόπηση 172

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.1 173

3.2 Αναδρομικές σχέσεις 180

Γραμμικές αναδρομικές σχέσεις πρώτης τάξης 180
Γραμμικές αναδρομικές σχέσεις δεύτερης τάξης 187
Αναδρομικές σχέσεις διαίρει και βασίλευε 191

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.2 Ανασκόπηση 195

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.2 195

3.3 Ανάλυση αλγορίθμων 200

Η γενική ιδέα 200
Ανάλυση με χρήση αναδρομικών σχέσεων 203
Άνω φράγμα (Ευκλείδειος αλγόριθμος) 206

ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ Δέντρα... και τηγανίτες 207

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.2 Ανασκόπηση 208

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.3 208

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.3 Ανασκόπηση 213

ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ 214

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Σύνοψη, συνδυαστική και πιθανότητα 215

4.1 Σύνοψη 216

Συμβολισμός 216
Σχέσεις μεταξύ συνόλων 218
Σύνολα συνόλων 220
Διμελείς και μονομελείς πράξεις 221
Πράξεις πάνω σε σύνολα 223
Συνολοθεωρητικές ταυτότητες 226
Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα 228

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.1 Ανασκόπηση 231

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.1 232

4.2 Απαρίθμηση 242

Αρχή του γινομένου 242
Αρχή του αθροίσματος 244
Χρησιμοποιώντας τις δύο αρχές μαζί 246
Δέντρα απόφασης 248

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.2 Ανασκόπηση 249

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.2 249

4.3 Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, αρχή του περιστερώνα 253

Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού 254
Αρχή του περιστερώνα 258

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.3 Ανασκόπηση 259

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.3 259

4.4 Μεταθέσεις και συνδυασμοί 261

Μεταθέσεις 261
Συνδυασμοί 263
Εξάλειψη των διπλότυπων 266
Μεταθέσεις και συνδυασμοί με επαναλήψεις 268
Παράγοντας μεταθέσεις και συνδυασμούς 269

ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ Ο Αρχιμήδης και το «Οστομάχιον» 274

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.4 Ανασκόπηση 275
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.4 275

4.5 Το Διωνυμικό Θεώρημα 280
Το τρίγωνο του Πασκάλ 281
Το Διωνυμικό Θεώρημα και η απόδειξή του 282
Εφαρμογές του Διωνυμικού Θεωρήματος 283

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.5 Ανασκόπηση 284
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.5 284

4.6 Πιθανότητα 287
Εισαγωγή στην πεπερασμένη πιθανότητα 287
Κατανομές πιθανότητας 288
Δεσμευμένη πιθανότητα 291
Το Θεώρημα του Bayes 292
Αναμενόμενη τιμή 294
Διωνυμικές κατανομές 296
Ανάλυση μέσης περίπτωσης των αλγορίθμων 297

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.6 Ανασκόπηση 298
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.6 299

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Ανασκόπηση 305
ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ 307

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Σχέσεις, συναρτήσεις και πίνακες 309

5.1 Σχέσεις 310
Διμελείς σχέσεις 310
Ιδιότητες των σχέσεων 313
Κλειστότητες των σχέσεων 315
Μερικές διατάξεις 317
Σχέσεις ισοδυναμίας 319

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.1 Ανασκόπηση 324
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.1 324

5.2 Τοπολογική ταξινόμηση 334

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.2 Ανασκόπηση 339
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.2 339

5.3 Σχέσεις και βάσεις δεδομένων 342
Υπόδειγμα οντοτήτων-συσχετίσεων 342
Σχεσιακό υπόδειγμα 343
Πράξεις με σχέσεις 346
Τιμές NULL και η λογική τριών τιμών 350
Ακεραιότητα βάσεων δεδομένων 351

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.3 Ανασκόπηση 352
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.3 352

5.4 Συναρτήσεις 357
Ορισμός 357
Ιδιότητες των συναρτήσεων 362
Συναρτήσεις ένα προς ένα 364
Αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις 366
Αντίστροφες συναρτήσεις 367
Συναρτήσεις μεταθέσεων 369
Πλήθος συναρτήσεων 371
Ισοδύναμα σύνολα 374

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.4 Ανασκόπηση 375
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.4 376

| | | |
|---------------------|--|-----|
| 5.5 | Τάξη μεγέθους | 385 |
| | <i>Αύξηση συνάρτησης</i> | 385 |
| | <i>Περισσότερα για την ανάλυση αλγορίθμων</i> | 387 |
| | <i>Το Θεώρημα Κυριαρχίας</i> | 389 |
| | <i>Απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχίας</i> | 391 |
| ΕΝΟΤΗΤΑ 5.5 | Ανασκόπηση | 392 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.5 | | 393 |
| 5.6 | Η συνάρτηση MOD | 395 |
| | <i>Κατακερματισμός</i> | 395 |
| | <i>Ασφάλεια υπολογιστών</i> | 308 |
| | <i>Κρυπτογραφία</i> | 308 |
| | <i>Κατακερματισμός για την κρυπτογράφηση κωδικού πρόσβασης</i> | 404 |
| | <i>Διάφορες εφαρμογές</i> | 405 |
| | <i>Αναγνωριστικοί κωδικοί</i> | 405 |
| | <i>Παράγοντας και αποσυνθέτοντας ακέραιους αριθμούς</i> | 407 |
| | <i>Αρθρωτά αριθμητικά σχέδια</i> | 408 |
| ΕΝΟΤΗΤΑ 5.6 | Ανασκόπηση | 410 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.6 | | 410 |
| 5.7 | Πίνακες | 414 |
| | <i>Ορολογία</i> | 414 |
| | <i>Πράξεις με πίνακες</i> | 417 |
| | <i>Απαλοιφή Gauss</i> | 421 |
| | <i>Πίνακες Boole</i> | 425 |

ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ Λύστε εκατομμύρια εξισώσεις πιο γρήγορα από τον Gauss 426

| | | |
|------------------------|-------------------|-----|
| ΕΝΟΤΗΤΑ 5.7 | Ανασκόπηση | 427 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.7 | | 427 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 | Ανασκόπηση | 434 |
| ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ | | 437 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Γραφήματα και δέντρα 439

| | | |
|------------|--|-----|
| 6.1 | Τα γραφήματα και οι αναπαραστάσεις τους | 440 |
| | <i>Ορισμοί ενός γραφήματος</i> | 440 |
| | <i>Εφαρμογές των γραφημάτων</i> | 442 |
| | <i>Ορολογία γραφημάτων</i> | 444 |
| | <i>Ισομορφικά γραφήματα</i> | 447 |
| | <i>Επίπεδα γραφήματα</i> | 450 |
| | <i>Αναπαράσταση γραφημάτων σε υπολογιστή</i> | 455 |
| | <i>Πίνακας γειτνίασης</i> | 455 |
| | <i>Λίστα γειτνίασης</i> | 456 |

ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ Ισομορφικά γραφήματα πρωτεΐνης 459

| | | |
|---------------------|--|-----|
| ΕΝΟΤΗΤΑ 6.1 | Ανασκόπηση | 460 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.1 | | 460 |
| 6.2 | Δέντρα και αναπαραστάσεις αυτών | 470 |
| | <i>Ορολογία δέντρων</i> | 470 |
| | <i>Εφαρμογές των δέντρων</i> | 472 |
| | <i>Αναπαράσταση δυαδικού δέντρου</i> | 473 |
| | <i>Αλγόριθμοι διάσχισης δέντρου</i> | 474 |
| | <i>Αποτελέσματα σχετικά με τα δέντρα</i> | 478 |
| ΕΝΟΤΗΤΑ 6.2 | Ανασκόπηση | 480 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.2 | | 480 |

6.3 Δέντρα απόφασης 487*Αναζήτηση 488**Κάτω φράγματα στην αναζήτηση 490**Αναζήτηση σε δυαδικό δέντρο 491**Ταξινόμηση 493***ΕΝΟΤΗΤΑ 6.3** Ανασκόπηση 494

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.3 494

6.4 Κώδικες Huffman 497*Το πρόβλημα και η δοκιμαστική λύση 497**Αλγόριθμος κωδικοποίησης Huffman 499**Αιτιολόγηση 502**Εφαρμογές των κωδικών Huffman 503***ΕΝΟΤΗΤΑ 6.4** Ανασκόπηση 504

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.4 504

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Ανασκόπηση 507

ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ 508

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Αλγόριθμοι γραφημάτων 509**7.1** Κατευθυνόμενα γραφήματα και διμελείς σχέσεις. Ο αλγόριθμος του Warshall 510*Κατευθυνόμενα γραφήματα και διμελείς σχέσεις 511**Προσπελασιμότητα 513**Ο αλγόριθμος του Warshall 517***ΕΝΟΤΗΤΑ 7.1** Ανασκόπηση 521

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.1 521

7.2 Μονοπάτια Euler και κυκλώματα Hamilton 525*Το πρόβλημα του μονοπατιού Euler 525**Το πρόβλημα του κυκλώματος Hamilton 529***ΕΝΟΤΗΤΑ 7.2** Ανασκόπηση 530

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.2 531

7.3 Συντομότερο μονοπάτι και ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο 534*Το πρόβλημα του συντομότερου μονοπατιού 534**Το πρόβλημα του ελάχιστου επικαλύπτοντος δέντρου 539*

ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ Αναζήτηση μονοπατιού 541

ΕΝΟΤΗΤΑ 7.3 Ανασκόπηση 542

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.3 542

7.4 Αλγόριθμοι διάσχισης 548*Αναζήτηση κατά βάθος 548**Αναζήτηση κατά πλάτος 550**Ανάλυση 553**Εφαρμογές 553***ΕΝΟΤΗΤΑ 7.4** Ανασκόπηση 555

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.4 556

7.5 Σημεία άρθρωσης και δίκτυα υπολογιστών 558*Η διατύπωση του προβλήματος 558**Η ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο 559**Ο αλγόριθμος 561***ΕΝΟΤΗΤΑ 7.5** Ανασκόπηση 563

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.5 563

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Ανασκόπηση 564

ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ 565

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 Άλγεβρα Boole και λογική υπολογιστών 587**8.1** Η δομή της άλγεβρας Boole 588*Υποδείγματα ή αφηρημένες μορφές* 589*Ορισμός και ιδιότητες* 570*Ισομορφικές άλγεβρες Boole* 575

Τι είναι ο ισομορφισμός; 575

Εφαρμογή του ισομορφισμού στις άλγεβρες Boole 576

ΕΝΟΤΗΤΑ 8.1 Ανασκόπηση 579**ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.1** 579**8.2** Λογικά κυκλώματα 585*Συνδυαστικά κυκλώματα* 585

Βασικά λογικά στοιχεία 585

Εκφράσεις Boole 586

Συναρτήσεις αληθείας 586

Κυκλώματα και εκφράσεις 587

Κανονική μορφή 588

Ελαχιστοποίηση 591

Προγραμματιζόμενες λογικές συσκευές 592

Ένα χρήσιμο κύκλωμα 594*Άλλα λογικά στοιχεία* 595*Κατασκευάζοντας συναρτήσεις αληθείας* 597**ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ** Κλάδεμα τσιπ και προγραμμάτων 598**ΕΝΟΤΗΤΑ 8.2** Ανασκόπηση 599**ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.2** 599**8.3** Ελαχιστοποίηση 606*Διαδικασία ελαχιστοποίησης* 606*Χάρτης Karnaugh* 607

Χάρτες για τρεις και τέσσερις μεταβλητές 608

Χρησιμοποιώντας τον χάρτη Karnaugh 610

Η διαδικασία των Quine – McCluskey 614**ΕΝΟΤΗΤΑ 8.3** Ανασκόπηση 618**ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.3** 618**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8** Ανασκόπηση 623**ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ** 624**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9** Μοντελοποίηση αριθμητικής, υπολογισμός και γλώσσες 625**9.1** Άλγεβρικές δομές 626*Ορισμοί και παραδείγματα* 626*Βασικά αποτελέσματα για τις ομάδες* 634*Υποομάδες* 637*Ισομορφικές ομάδες* 640**ΕΝΟΤΗΤΑ 9.1** Ανασκόπηση 645**ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.1** 645**9.2** Θεωρία κωδικοποίησης 650*Εισαγωγή* 650*Υπόβαθρο: Ομομορφισμοί και σύμπλοκα* 651*Παράγοντας κώδικες ομάδας* 653*Αποκωδικοποιώντας κώδικες ομάδας* 658**ΕΝΟΤΗΤΑ 9.2** Ανασκόπηση 662**ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.2** 662**9.3** Μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων 663*Ορισμός* 664

| | |
|---|-----|
| <i>Παραδείγματα μηχανών πεπερασμένων καταστάσεων</i> | 665 |
| <i>Αναγνώριση</i> | 668 |
| <i>Κανονικά σύνολα και το Θεώρημα του Kleene</i> | 670 |
| <i>Ελαχιστοποίηση μηχανής</i> | 672 |
| Μη προσπελάσιμες καταστάσεις | 672 |
| Διαδικασία ελαχιστοποίησης | 673 |
| <i>Ακολουθιακά κυκλώματα και μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων</i> | 678 |

ΣΕΛΙΔΑ ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΥ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ Οι μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων στη σχεδίαση παιχνιδιών 682

ΕΝΟΤΗΤΑ 9.3 Ανασκόπηση 683

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.3 684

9.4 Μηχανές Turing 695

| | |
|---|-----|
| <i>Μηχανές Turing ως αναγνωριστές συνόλων</i> | 699 |
| <i>Οι μηχανές Turing ως υπολογιστές συναρτήσεων</i> | 702 |
| <i>Θέση των Church – Turing</i> | 704 |
| <i>Προβλήματα απόφασης και μη υπολογισιμότητα</i> | 705 |
| Παραδείγματα προβλημάτων απόφασης | 706 |
| Το πρόβλημα τερματισμού | 707 |
| <i>Υπολογιστική πολυπλοκότητα</i> | 710 |

ΕΝΟΤΗΤΑ 9.4 Ανασκόπηση 712

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.4 712

9.5 Τυπικές γλώσσες 715

| | |
|---|-----|
| <i>Κατηγορίες γραμματικών</i> | 721 |
| <i>Τυπικές γλώσσες και υπολογιστικές συσκευές</i> | 724 |
| <i>Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα</i> | 725 |

ΕΝΟΤΗΤΑ 9.5 Ανασκόπηση 727

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.5 727

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 Ανασκόπηση 730

ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ 732

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Συμπερασματικοί κανόνες για την προτασιακή και κατηγορηματική λογική 735

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Συμβολισμός του αθροίσματος και του γινομένου 737

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Η λογαριθμική συνάρτηση 740