

Με μια πρώτη ματιά τα οκτώ συστήματα στο Σχήμα 1.1 φαίνεται να έχουν μόνο λίγα κοινά χαρακτηριστικά:

- 1.1 (α) Απλό εκκρεμές αποτελούμενο από μια μάζα m^1 , η οποία ταλαντεύεται στο άκρο μιας ελαφριάς άκαμπτης ράβδου μήκους l .
- 1.1 (β) Ένας επίπεδος δίσκος κρέμεται από ελαφρό μη εκτατό σύρμα, το οποίο διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος εκτελεί, στο επίπεδο του, στροφικές ταλαντώσεις μικρής γωνίας.
- 1.1 (γ) Μια μάζα συνδέεται μέσω ελατηρίου με τοίχο. Η δυσκαμψία του ελατηρίου είναι s . Η μάζα κινείται παλινδρομικά κατά μήκος του άξονα x , πάνω σε λείο επίπεδο.
- 1.1 (δ) Μια μάζα m είναι στερεωμένη στο μέσο ελαφράς χορδής, μήκους $2l$. Τα άκρα της χορδής είναι ακλόνητα και η χορδή είναι τεντωμένη με σταθερή τάση T . Η μάζα ταλαντώνεται στο επίπεδο της σελίδας.
- 1.1 (ε) Σωλήνας σταθερής διατομής και σχήματος U περιέχει υγρό μήκους l πυκνότητας ρ . Το υγρό ταλαντώνεται χωρίς τριβές γύρω από τη θέση όπου οι επιφάνειες του υγρού σε κάθε σκέλος του σωλήνα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
- 1.1 (στ) Ανοιχτό δοχείο όγκου V έχει λαιμό μήκους l και σταθερής διατομής A . Καθώς ο αέρας πυκνότητας ρ που βρίσκεται μέσα στο λαιμό εκτελεί ταλάντωση, παράγεται ηχητικό κύμα.

1. ΣτΜ: Όπως και στο πρωτότυπο κείμενο, έτσι και στο παρόν η λέξη μάζα χρησιμοποιείται αντί για τη λέξη σώμα (μετωνυμία). Η γλωσσική αντικατάσταση της λέξης σώμα με τη λέξη μάζα είναι πολύ συνηθισμένη στη Φυσική. Μετωνυμία έχουμε και στη συνηθισμένη έκφραση «ηλεκτρικό φορτίο βρίσκεται, κινείται κ.λπ.» αντί για την έκφραση: «ηλεκτρικά φορτισμένο σώμα βρίσκεται, κινείται κ.λπ.».

- 1.1 (ζ) Πυκνόμετρο: σώμα μάζας m επιπλέει σε υγρό πυκνότητας ρ . Στο σώμα υπάρχει λαιμός σταθερής διατομής A , που ξεπροβάλλει από την επιφάνεια του υγρού. Όταν το σώμα βυθιστεί λίγο κάτω από τη θέση ισορροπίας του, εκτελεί μικρές κατακόρυφες ταλαντώσεις.
- 1.1 (η) Ηλεκτρικό κύκλωμα: τα άκρα ενός πηνίου αυτεπαγωγής L είναι συνδεδεμένα με τα άκρα ενός πυκνωτή χωρητικότητας C . Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο q .

Όλα αυτά τα συστήματα είναι απλοί αρμονικοί ταλαντωτές, δηλαδή αν απομακρυνθούν λίγο από την κατάσταση ή τη θέση ισορροπίας τους, εκτελούν μια απλή αρμονική ταλάντωση. Αυτή είναι η πιο θεμελιώδης ταλάντωση ενός μεμονωμένου σωματιδίου ή ενός μονοδιάστατου συστήματος. Με μια μικρή απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας προκαλείται μια δύναμη επαναφοράς. Αυτή η δύναμη είναι ανάλογη με τη x και κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας.

(α)



$$m\ddot{x} + mg \frac{x}{l} = 0$$

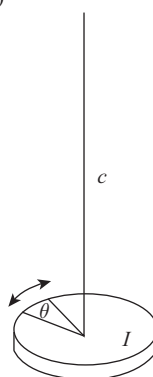
$$ml \ddot{\theta} + mg \theta = 0$$

$$\omega^2 = g/l$$

$$mg \sin \theta \approx mg \theta$$

$$\approx mg \frac{x}{l}$$

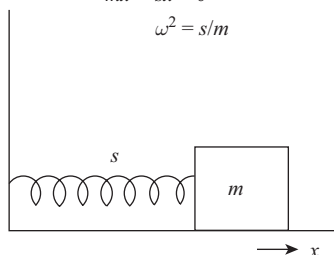
(β)



$$I \ddot{\theta} + c\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{c}{I}$$

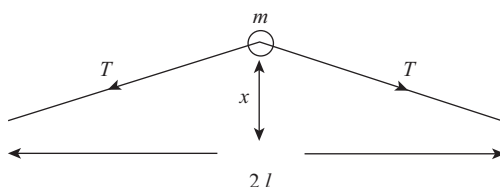
(γ)



$$m\ddot{x} + sx = 0$$

$$\omega^2 = s/m$$

(δ)

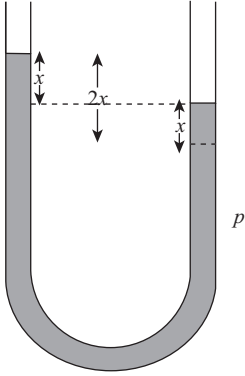


$$m\ddot{x} + 2T \frac{x}{l} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2T}{lm}$$

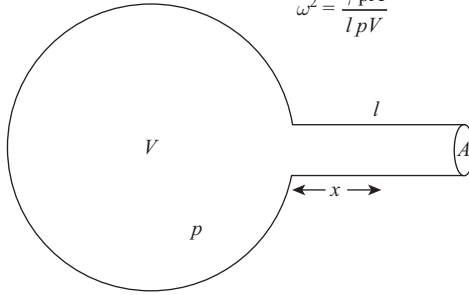
$$(ε) \quad \ddot{p} lx + 2pgx = 0$$

$$\omega^2 = 2g/l$$

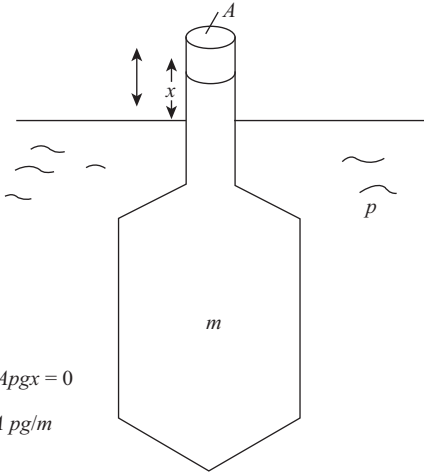


$$(στ) \quad p A l \ddot{x} + \frac{\gamma p x A^2}{V} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma p A}{l p V}$$



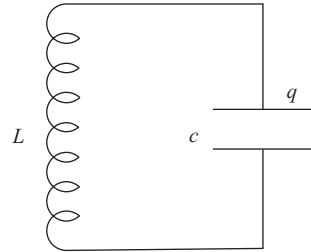
(ζ)



$$m \ddot{x} + Apgx = 0$$

$$\omega^2 = Apg/m$$

(η)



$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Σχήμα 1.1 Απλοί αρμονικοί ταλαντωτές με τις εξισώσεις κίνησής τους και τις γωνιακές συχνότητες ω των ταλαντώσεών τους. (α) Απλό εκκρεμές. (β) Στροφικό εκκρεμές. (γ) Μάζα πάνω σε λείο επίπεδο συνδεδεμένη μέσω ελατηρίου με τοίχο. (δ) Μάζα στο μέσο μιας χορδής, η οποία είναι τεντωμένη με σταθερή τάση T . (ε) Στήλη υγρού, σταθερού μήκους και χωρίς εσωτερική τριβή, μέσα σε λείο σωλήνα σχήματος U σταθερής διατομής. (στ) αντηχείο Helmholtz. (ζ) Πυκνόμετρο m μέσα σε υγρό πυκνότητας ρ . (η) Ηλεκτρικό κύκλωμα, LC , συντονισμού.

Άρα η δύναμη επαναφοράς F μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$F = -sx$$

Η σταθερά s , δηλαδή η σταθερά αναλογίας, ονομάζεται δυσκαμψία και το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη εμποδίζει την απομάκρυνση του σώματος, δηλαδή κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας. Για να είναι σταθερή η τιμή της

δυσκαμψίας, η απομάκρυνση x πρέπει να περιορίζεται σε μικρές τιμές (αυτός είναι ο νόμος ελαστικότητας του Hooke). Προφανώς η δυσκαμψία (stiffness) s είναι η δύναμη επαναφοράς ανά μονάδα μήκους (ή ανά μονάδα απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας) και έχει διαστάσεις

$$\frac{\text{δύναμη}}{\text{μήκος}} = \frac{MLT^{-2}}{L}.$$

Η εξίσωση κίνησης ενός τέτοιου διαταραγμένου συστήματος προκύπτει από τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σύστημα. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η εξίσωση αυτή είναι

$$(\text{μάζα}) \times (\text{επιτάχυνση}) = (\text{δύναμη επαναφοράς})$$

ή

$$m\ddot{x} = -sx$$

όπου η επιτάχυνση είναι

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Από αυτή προκύπτει

$$m\ddot{x} + sx = 0$$

ή

$$\ddot{x} + \frac{s}{m}x = 0$$

όπου διαστάσεις της ποσότητας

$$\frac{s}{m} \text{ είναι } \frac{MLT^{-2}}{ML} = T^{-2} = \nu^2.$$

Σ' αυτή την εξίσωση T είναι ο χρόνος ή η περίοδος της ταλάντωσης. Αυτό το μέγεθος είναι το αντίστροφο της ν , που είναι η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται το σύστημα.

Ωστόσο όταν λύσουμε την εξίσωση κίνησης θα βρούμε ότι η x εξαρτάται ημιτονοειδώς ή συνημιτονοειδώς από το χρόνο και θα προκύψει ότι είναι καταλληλότερο να χρησιμοποιούμε τη γωνιακή συχνότητα, $\omega = 2\pi\nu$, και όχι τη ν . Η περίοδος λοιπόν είναι:

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{s}}$$

όπου η ποσότητα s/m γράφεται πλέον ως ω^2 . Άρα η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης

$$\ddot{x} + \frac{s}{m}x = 0.$$

γίνεται

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \quad (1.1)$$

(Πρόβλημα 1.1)

Η Απομάκρυνση του Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

Η συμπεριφορά ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή περιγράφεται μέσω της απομάκρυσής του x , της ταχύτητάς του $\dot{x}$, και της επιτάχυνσής του $\ddot{x}$ σε συνάρτηση με το χρόνο. Αν δοκιμάσουμε τη λύση

$$x = A \cos \omega t$$

όπου A είναι μια σταθερά που έχει τις ίδιες διαστάσεις με το x , θα διαπιστώσουμε ότι ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

διότι

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t$$

και

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Επίσης ισχύει η λύση

$$x = B \sin \omega t$$

όπου η σταθερά B έχει τις ίδιες διαστάσεις με την A . Πράγματι σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\dot{x} = B\omega \cos \omega t$$

και

$$\ddot{x} = -B\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x.$$

Η πλήρης ή γενική λύση της εξίσωσης (1.10) προκύπτει από το άθροισμα ή την υπέρθεση των δύο συναρτήσεων ως προς x . Έτσι έχουμε

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1.2)$$

Από αυτή προκύπτει

$$\ddot{x} = -\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = -\omega^2 x$$

Οι σταθερές A και B προσδιορίζονται από τις τιμές του x και $\dot{x}$ σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Γράφοντας τις σταθερές με τη μορφή:

$$A = a \sin \phi \text{ και } B = a \cos \phi$$

όπου ϕ είναι μια σταθερή γωνία, προκύπτει

$$A^2 + B^2 = a^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \text{ και } B = a^2.$$

Άρα

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}$$

και

$$\begin{aligned} x &= a \sin \phi \cos \omega t + a \cos \phi \sin \omega t \\ &= a \sin (\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Επειδή η μέγιστη τιμή της παράστασης $\sin (\omega t + \phi)$ είναι η μονάδα, η μέγιστη τιμή του x είναι η σταθερά a , που είναι γνωστή ως πλάτος της απομάκρυνσης. Επειδή οι ακραίες τιμές της παράστασης $\sin (\omega t + \phi)$ είναι ± 1 , το σύστημα ταλαντώνεται μεταξύ των τιμών $x = \pm a$. Θα δούμε επίσης ότι η τιμή του a καθορίζεται από την ολική ενέργεια του ταλαντωτή.

Η γωνία ϕ ονομάζεται «σταθερά φάσης» για τον εξής λόγο. Συχνά η απλή αρμονική ταλάντωση εισάγεται μέσω μιας «κυκλικής κίνησης». Ο κύκλος ορίζεται από το άκρο ενός ακτινικού διανύσματος σταθερού μήκους a , καθώς το διάνυσμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , με θετική φορά, δηλαδή αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Κάθε τιμή της απομάκρυνσης x είναι δυνατό να απεικονιστεί με την προβολή του ακτινικού διανύσματος πάνω στη διάμετρο του κύκλου. Άρα, καθώς το ακτινικό διάνυσμα διαγράφει γωνία φάσης ίση με 2π rad, κάθε περιστροφή αντιστοιχεί σε μία πλήρη ταλάντωση. Στη λύση

$$x = a \sin (\omega t + \phi)$$

η γωνία φάσης ϕ , μετρούμενη σε ακτίνια, ορίζει πάνω στον κύκλο τη θέση του άκρου του περιστρεφόμενου ακτινικού διανύσματος τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή η αρχική θέση του ταλαντωτή είναι

$$x = a \sin \phi$$

Η λύση

$$x = a \sin \omega t$$

περιγράφει την απομάκρυνση μόνο στην περίπτωση που το σύστημα τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην αρχή του άξονα, δηλαδή $x = 0$. Ωστόσο συμπεριλαμβανοντας στη λύση τη φάση ϕ , δηλαδή

$$x = a \sin (\omega t + \phi)$$

και θεωρώντας ότι η ϕ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 και 2π , μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση, για οποιαδήποτε αρχική θέση πάνω στον κύκλο. Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2 για ποικίλες τιμές της ϕ .

(Προβλήματα 1.2, 1.3, 1.4, 1.5)

Η Ταχύτητα και η Επιτάχυνση στην Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Στην απλή αρμονική ταλάντωση, όταν

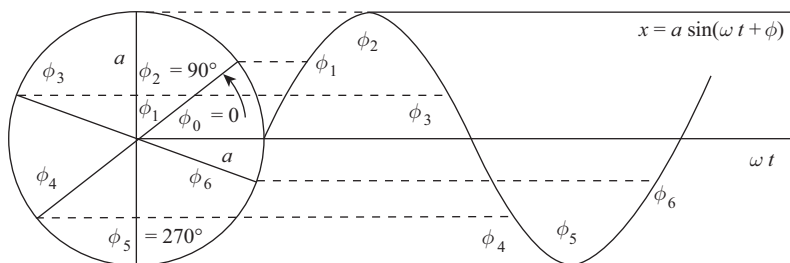
$$x = a \sin (\omega t + \phi)$$

οι τιμές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = a\omega \cos (\omega t + \phi)$$

και

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin (\omega t + \phi).$$



Σχήμα 1.2 Ημτονοειδής συνάρτηση της απομάκρυνσης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή ως προς το χρόνο. Επίσης φαίνεται η μεταβολή της αρχικής θέσης του άκρου της ακτίνας πάνω στον κύκλο, ως συνάρτηση της γωνίας φάσης ϕ .

Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας, $a\omega$, ονομάζεται *πλάτος ταχύτητας*. Το *πλάτος της επιτάχυνσης* δίνεται από το $a\omega^2$.

Στο Σχήμα 1.2 παρατηρούμε ότι μια θετική γωνία φάσης $\pi/2$ ακτινίων μετατρέπει μια ημτονοειδή καμπύλη σε συνημιτονοειδή. Άρα η ταχύτητα

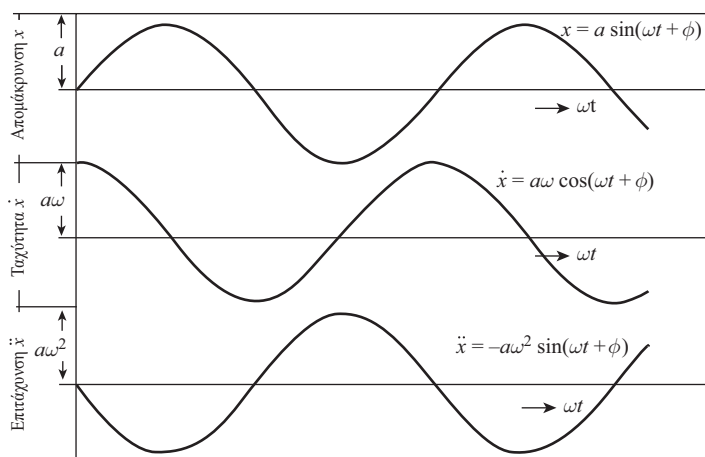
$$\dot{x} = a\omega \cos(\omega t + \phi)$$

προηγείται της απομάκρυνσης

$$x = a \sin(\omega t + \phi)$$

κατά μία γωνία φάσης $\pi/2$ rad και τα μέγιστα και ελάχιστα της ταχύτητας προηγούνται εκείνων της απομάκρυνσης κατά ένα τέταρτο του κύκλου. Δηλαδή όταν η απομάκρυνση μηδενίζεται η ταχύτητα είναι μέγιστη και όταν η απομάκρυνση είναι μέγιστη, ταχύτητα είναι ίση με μηδέν. Η επιτάχυνση βρίσκεται σε «αντίθεση φάσης» (διαφορά φάσης π rad) σε σχέση με την απομάκρυνση. Δηλαδή, όταν η απομάκρυνση παίρνει την πιο αρνητική τιμή της, η επιτάχυνση παίρνει την πιο θετική και αντιστρόφως. Αυτά τα χαρακτηριστικά φαίνονται στο Σχήμα 1.3.

Συχνά η σχετική απομάκρυνση ή η σχετική κίνηση μεταξύ δύο ταλαντωτών που έχουν την ίδια συχνότητα και το ίδιο πλάτος μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση της διαφοράς φάσης $\phi_1 - \phi_2$ των δύο ταλαντωτών. Αυτή η διαφορά είναι



Σχήμα 1.3 Η μεταβολή με το χρόνο της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στην απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση υστερεί κατά $\pi/2$ rad ως προς την ταχύτητα και έχει διαφορά φάσης π rad με την επιτάχυνση. Έχουμε θεωρήσει ότι η αρχική σταθερά φάσης ϕ είναι μηδενική.

δυνατό να έχει οποιαδήποτε τιμή, διότι το ένα σύστημα μπορεί να άρχισε να κινείται αρκετούς κύκλους πριν από το άλλο και κάθε πλήρης κύκλος ταλάντωσης ισοδυναμεί με μεταβολή φάσης κατά $\phi = 2\pi$. Όταν οι κινήσεις των δύο συστημάτων είναι διαμετρικά αντίθετες, π.χ. όταν η απομάκρυνση του ενός είναι $x = +a$, του άλλου είναι $x = -a$, τα συστήματα βρίσκονται σε «αντίθεση φάσης» και η διαφορά φάσης είναι

$$\phi_1 - \phi_2 = (2n - 1)\pi \text{ rad}$$

όπου n είναι οποιοσδήποτε ακέραιος. Πανομοιότυπα συστήματα που βρίσκονται «σε φάση», έχουν διαφορά φάσης

$$\phi_1 - \phi_2 = 2n\pi \text{ rad}$$

όπου n είναι οποιοσδήποτε ακέραιος. Δηλαδή κάθε χρονική στιγμή έχουν ακριβώς ίσες απομακρύνσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις.

(Προβλήματα 1.6, 1.7, 1.8)

Μη γραμμικότητα

Όταν η δυσκαμψία s είναι σταθερή και η δύναμη επαναφοράς, $F = -sx$, σχεδιαστεί ως προς x , προκύπτει ευθεία γραμμή και το σύστημα ονομάζεται γραμμικό. Σε μια γραμμική απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση έχει ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή μορφή. Μη γραμμικότητα προκύπτει όταν η δυσκαμψία s δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x (δείτε την αρχή του 14ου Κεφαλαίου).

Η Ενέργεια ενός Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

Το γεγονός ότι στην απλή αρμονική ταλάντωση η ταχύτητα μηδενίζεται, όταν η απομάκρυνση είναι μέγιστη και είναι μέγιστη, όταν η απομάκρυνση είναι μηδενική, καταδεικνύει τη σημαντική έννοια της συνεχούς ανταλλαγής μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Αν και σε μια ιδανική περίπτωση η ολική ενέργεια του ταλαντωτή παραμένει σταθερή, στην πραγματικότητα αυτό δε συμβαίνει ποτέ. Δηλαδή αν δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας, όλη η δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σταδιακά σε κινητική και αντιστρόφως. Γι' αυτό οι τιμές (α) της ολικής ενέργειας κάθε χρονική στιγμή, (β) της μέγιστης δυναμικής ενέργειας και (γ) της μέγιστης κινητικής ενέργειας είναι ίσες μεταξύ τους. Δηλαδή

$$E_{\text{total}} = KE + PE = KE_{\text{max}} = PE_{\text{max}} .$$

Η λύση $x = a \sin(\omega t + \phi)$ υποδηλώνει ότι η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή, γιατί μετά από κάθε μισό κύκλο η απομάκρυνση ξαναπαίρνει τις ακραίες τιμές της (δηλαδή $x = \pm a$), στις θέσεις όπου η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη. Όταν υπάρχει απώλεια ενέργειας, το πλάτος σταδιακά φθίνει, όπως θα δούμε στο 2ο Κεφάλαιο. Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια αθροίζουμε όλα τα απειροστά γινόμενα $sx \cdot dx$ (δηλαδή τα γινόμενα της δύναμης με τις στοιχειώδεις μετατοπίσεις) από την τιμή μηδέν μέχρι την τιμή x , θεωρώντας ότι στο σημείο $x = 0$ η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική. Αυτό είναι το έργο που πρέπει να εκτελεστεί από το σύστημα ώστε να υπερνικηθεί η δύναμη επαναφοράς.

Η δυναμική ενέργεια λοιπόν είναι ίση με

$$\int_0^x sx \cdot dx = \frac{1}{2}sx^2.$$

Επειδή η κινητική ενέργεια δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, η ολική ενέργεια είναι

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}sx^2$$

Επειδή η E είναι σταθερή, έχουμε

$$\frac{dE}{dt} = (m\ddot{x} + sx)\dot{x} = 0.$$

Από αυτή προκύπτει πάλι η εξίσωση της κίνησης

$$m\ddot{x} + sx = 0.$$

Επειδή η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη όταν $x = \pm a$, έχουμε

$$PE_{\max} = \frac{1}{2}sa^2.$$

Η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι

$$\begin{aligned} KE_{\max} &= \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)_{\max} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2[\cos^2(\omega t + \phi)]_{\max} \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \end{aligned}$$

δηλαδή αυτό συμβαίνει, όταν ο συνημιτονοειδής όρος είναι ίσος με μονάδα.

Αλλά $m\omega^2 = s$ κι αυτό οι μέγιστες τιμές της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας είναι ίσες μεταξύ τους. Αυτό δείχνει ότι η μετατροπή της ενέργειας από τη μια μορφή στην άλλη είναι πλήρης.

Η ολική ενέργεια κάθε χρονική στιγμή ή σε κάθε τιμή της x είναι

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}sx^2 \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] \\ &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}sa^2 \end{aligned}$$

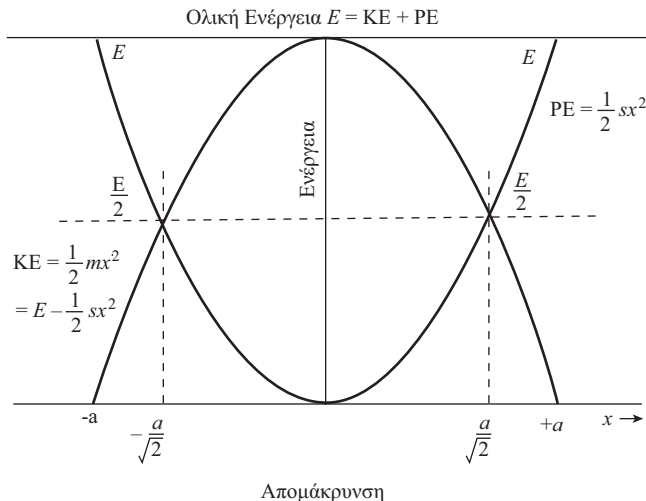
όπως αναμέναμε.

Στο Σχήμα 1.4 φαίνεται η κατανομή της ενέργειας σε κινητική και δυναμική ως συνάρτηση της απομάκρυνσης, στην απλή αρμονική ταλάντωση. Σημειώστε ότι η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$PE = \frac{1}{2}sx^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

ως προς x είναι υπερβολή και συμμετρική ως προς την τιμή $x = 0$. Άρα στον ταλαντωτή αποθηκεύεται δυναμική ενέργεια όταν η x είναι θετική αλλά και όταν είναι αρνητική. Δηλαδή τα ελατήρια αποθηκεύουν ενέργεια όταν είναι συμπιεσμένα αλλά και όταν είναι τεντωμένα, όπως συμβαίνει σε ένα αέριο όταν έχει συμπιεστεί ή όταν έχει εκτονωθεί. Η καμπύλη της κινητικής ενέργειας

$$KE = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi)$$



Σχήμα 1.4 Η παράσταση της παραβολής της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας ως προς την απομάκρυνση. Το γεγονός ότι η μια καμπύλη είναι ανεστραμμένη σε σχέση με την άλλη οφείλεται στη διαφορά φάσης $\pi/2$ μεταξύ της απομάκρυνσης και της ταχύτητας. Για κάθε τιμή της απομάκρυνσης το άθροισμα των τεταγμένων που αντιστοιχούν στις δύο καμπύλες είναι ίσο με την ολική ενέργεια E , η οποία είναι σταθερή.

είναι ανεστραμμένη ως προς την καμπύλη της δυναμικής, λόγω της διαφοράς φάσης $\pi/2$ που υπάρχει μεταξύ της απομάκρυνσης (που συνδέεται με τη δυναμική ενέργεια) και της ταχύτητας (που συνδέεται με την κινητική ενέργεια).

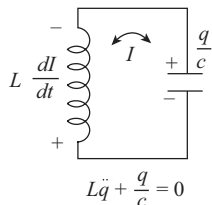
Για κάθε τιμή της απομάκρυνσης το άθροισμα των τεταγμένων των δύο καμπυλών είναι ίσο με την ολική ενέργεια E , το οποίο είναι σταθερό.

(Προβλήματα 1.10, 1.11, 1.12)

Απλές Αρμονικές Ταλαντώσεις σε Ηλεκτρικό Σύστημα

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει την απλή αρμονική ταλάντωση των μηχανικών και των ρευστοδυναμικών συστημάτων του Σχ. 1.1, έχοντας κατά νου κυρίως την κίνηση μιας αδρανειακής μάζας που κρέμεται από ένα αβαρές ελατήριο, δυσκαμψίας s . Η δυσκαμψία του ελατηρίου εκφράζει τη δυσκολία της συμπίεσης ή της επιμήκυνσής του. Το αντίστροφο της δυσκαμψίας το ονομάζουμε ενδοτικότητα και το συμβολίζουμε με C (δηλαδή $s = 1/C$). Η ενδοτικότητα (compliance) καθορίζει την ευκολία με την οποία συμπίεζεται ή επιμηκύνεται το ελατήριο και αποθηκεύεται η δυναμική ενέργεια. Αυτός ο συμβολισμός είναι χρήσιμος στη μελέτη των απλών αρμονικών ταλαντώσεων των ηλεκτρικών κυκλωμάτων του Σχήματος 1.1(η) και του Σχήματος 1.5, όπου ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L , συνδέεται σε σειρά με πυκνωτή χωρητικότητας C . Η εξίσωση που περιέχει τις δυνάμεις που δρουν στα μηχανικά συστήματα και στα συστήματα ρευστοδυναμικής μετατρέπεται πλέον σε εξίσωση διαφορών δυναμικού που υπάρχουν στο ηλεκτρικό κύκλωμα. Όμως η μορφή και η λύση των εξισώσεων και η συμπεριφορά αυτών των συστημάτων είναι πανομοιότυπες.

Όταν δεν υπάρχει ηλεκτρική αντίσταση στο κύκλωμα, η ενέργεια του συστήματος μένει σταθερή και μετατρέπεται από ενέργεια *μαγνητικού* πεδίου, που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο, σε ενέργεια *ηλεκτρικού* πεδίου που αποθηκεύεται μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή και αντιστρόφως. Επίσης κάθε στιγμή η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου είναι



Σχήμα 1.5 Ηλεκτρικό σύστημα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το άθροισμα των τάσεων κατά μήκος του κυκλώματος δίνεται από το νόμο του Kirchhoff: $L \, dI/dt + q/C = 0$.

$$V = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$$

όπου I είναι το ρεύμα στο κύκλωμα και q το φορτίο του πυκνωτή. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η διαφορά δυναμικού αντιτίθεται στην αύξηση του ρεύματος. Αυτή η διαφορά δυναμικού είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού q/C μεταξύ των άκρων του πυκνωτή, δηλαδή

$$L\ddot{q} + q/C = 0 \quad (\text{Νόμος του Kirchhoff})$$

ή

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

όπου

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Καθώς το ρεύμα αυξάνεται από 0 σε I , η ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο ή στο επαγωγικό τμήμα του κυκλώματος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, βρίσκεται υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα της ισχύος ως προς το χρόνο, δηλαδή

$$E_L = \int VI \cdot dt$$

(εδώ V είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του πηνίου²).

Άρα

$$\begin{aligned} E_L &= \int VI \, dt = \int L \frac{dI}{dt} I \, dt = \int_0^I LI \, dI \\ &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L\dot{q}^2 \end{aligned}$$

Η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται με μηχανικό τρόπο στο ελατήριο, στον πυκνωτή αποθηκεύεται ηλεκτροστατικά και είναι ίση με

$$\frac{1}{2} CV^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

2. ΣτΕ: Αν, αντί της απόλυτης τιμής, χρησιμοποιούσαμε την αλγεβρική μορφή για τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου $V = -L\dot{I}$, η αλγεβρική τιμή της ενέργειας προκύπτει ίση με $E_L = -L\dot{I}^2/2$, με το αρνητικό πρόσημο να δηλώνει ότι η ενέργεια αυτή δεν προσφέρεται από το πηνίο αλλά αποθηκεύεται στο πηνίο (με τη μορφή της ενέργειας του μαγνητικού του πεδίου).

Συγκρίνοντας μεταξύ τους τις εξισώσεις των μηχανικών ταλαντώσεων με τις εξισώσεις των ηλεκτρικών έχουμε

$$\text{μηχανική ταλάντωση (δύναμη)} \rightarrow m\ddot{x} + sx = 0$$

$$\text{ηλεκτρική ταλάντωση (διαφορά δυναμικού)} \rightarrow L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{μηχανική ταλάντωση (ενέργεια)} \rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}sx^2 = E$$

$$\text{ηλεκτρική ταλάντωση (ενέργεια)} \rightarrow \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = E .$$

Από αυτή τη σύγκριση διαπιστώνουμε ότι η αδράνεια του μαγνητικού πεδίου (που καθορίζεται από την αυτεπαγωγή L) ελέγχει το ρυθμό μεταβολής του ρεύματος για μια δεδομένη διαφορά δυναμικού στο κύκλωμα, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που η αδρανειακή μάζα ελέγχει τη μεταβολή της ταχύτητας για δεδομένη δύναμη. Η μαγνητική ή επαγωγική αδρανειακή συμπεριφορά οφείλεται στο γεγονός ότι, η μαγνητική ροή που διαπερνά το κύκλωμα τείνει να μένει σταθερή. Η αντίδραση λοιπόν σε οποιαδήποτε μεταβολή της τιμής της ροής προκαλεί διαφορά δυναμικού και επομένως ρεύμα. Η κατεύθυνση αυτού του ρεύματος είναι τέτοια ώστε να εμποδίζεται η μεταβολή της μαγνητικής ροής. Αυτή είναι η φυσική βάση του κανόνα του δεξιού χεριού (κανόνας του Fleming).

Επαλληλία Δύο Απλών Αρμονικών Ταλαντώσεων που Εκτελούνται σε μια Διάσταση

1) Ταλαντώσεις με ίσες μεταξύ τους συχνότητες

Στα επόμενα Κεφάλαια θα συναντήσουμε φυσικά προβλήματα τα οποία περιλαμβάνουν την επαλληλία δύο ή περισσοτέρων απλών αρμονικών ταλαντώσεων, όταν οι ταλαντώσεις συμβαίνουν στο ίδιο σύστημα.

Στην απλή αρμονική ταλάντωση έχουμε δει με ποιο τρόπο η απόλυτη τιμή και η φάση της απομάκρυνσης παριστάνονται με τη βοήθεια ενός διανύσματος σταθερού μήκους, που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , κατά τη θετική φορά (δηλαδή αντίθετα από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού). Για να βρούμε τη συνισταμένη κίνηση ενός συστήματος που κινείται πάνω στον άξονα x , όταν το σύστημα επηρεάζεται ταυτόχρονα από δύο απλές αρμονικές

ταλαντώσεις, με ίδιες γωνιακές συχνότητες αλλά με διαφορετικά πλάτη και φάσεις, μπορούμε να παραστήσουμε καθεμία κίνηση με κατάλληλο διάνυσμα και να βρούμε τη συνισταμένη των δύο διανυσμάτων.

Αν η απομάκρυνση της πρώτης κίνησης δίνεται από τη σχέση:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

και της δεύτερης από τη σχέση

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

τότε, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6, το πλάτος R της συνισταμένης απομάκρυνσης δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} R^2 &= (a_1 + a_2 \cos \delta)^2 + (a_2 \sin \delta)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \delta \end{aligned}$$

όπου η γωνία $\delta = \phi_1 - \phi_2$ είναι σταθερή.

Η σταθερά φάσης θ του R δίνεται από τη σχέση

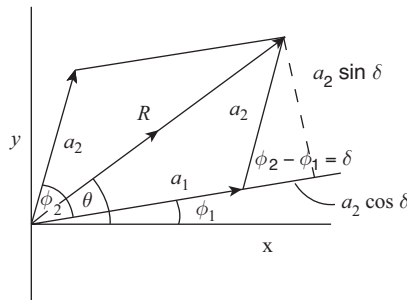
$$\tan \theta = \frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2}$$

άρα η απομάκρυνση της απλής αρμονική ταλάντωσης που προκύπτει είναι

$$x = R \sin(\omega t + \theta)$$

Πρόκειται λοιπόν για ταλάντωση με την ίδια γωνιακή συχνότητα ω , αλλά με πλάτος R και σταθερά φάσης θ .

(Πρόβλημα 1.13)



Σχήμα 1.6 Άθροισμα δύο διανυσμάτων: καθεμία από αυτά παριστάνει μια απλή αρμονική ταλάντωση κατά μήκος τον άξονα x με γωνιακή συχνότητα ω . Από την άθροιση προκύπτει απλή αρμονική ταλάντωση και στο Σχήμα φαίνεται η απομάκρυνσή της για $t = 0$.

2) Ταλαντώσεις με διαφορετικές συχνότητες

Στη συνέχεια εξετάζουμε την υπέρθεση δύο ταλαντώσεων του ίδιου πλάτους αλλά διαφορετικών συχνотήτων. Εκφράζουμε τις δύο ταλαντώσεις ως εξής

$$x_1 = a \sin(\omega_1 t)$$

και

$$x_2 = a \sin(\omega_2 t)$$

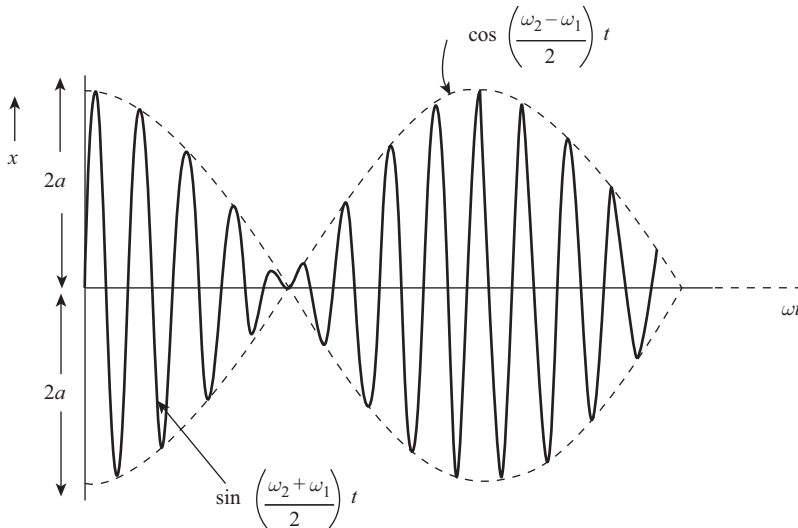
όπου

$$\omega_2 > \omega_1.$$

Τότε η συνισταμένη απομάκρυνση δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = a(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) \\ &= 2a \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}. \end{aligned}$$

Αυτή η έκφραση παριστάνεται στο Σχήμα 1.7. Έχει τη μορφή ημιτονοειδούς ταλάντωσης. Η γωνιακή συχνότητα αυτής ταλάντωσης είναι $(\omega_1 + \omega_2)/2$, δηλαδή είναι ίση με τη μέση τιμή των συχνοτήτων των αρχικών ταλαντώσεων. Η απομάκρυνσή της έχει πλάτος $2a$ και διαμορφώνεται συνεχώς, δηλαδή μεταβάλλεται



Σχήμα 1.7 Επαλληλία δύο απλών αρμονικών απομακρύνσεων, $x_1 = a \sin \omega_1 t$ και $x_2 = a \sin \omega_2 t$, όταν $\omega_2 > \omega_1$. Η αργά μεταβαλλόμενη περιβάλλουσα, $\cos [(\omega_2 - \omega_1)/2]t$, διαμορφώνει την καμπύλη $\sin [(\omega_2 + \omega_1)/2]t$, μεταξύ των τιμών $x = \pm 2a$.

μεταξύ των τιμών $2a$ και 0 . Η διαμόρφωση είναι αποτέλεσμα της επίδρασης του συνημιτονοειδούς παράγοντα. Η συχνότητα αυτού του παράγοντα είναι πολύ χαμηλότερη από τις συχνότητες των αρχικών ταλαντώσεων, διότι είναι ίση με την ημιδιαφορά των αρχικών συχνοτήτων, δηλαδή είναι ίση με $(\omega_2 - \omega_1)/2$.

Όταν οι συχνότητες ω_1 και ω_2 είναι σχεδόν ίσες μεταξύ τους, η συχνότητα του ημιτονοειδούς παράγοντα διαφέρει πολύ λίγο από την ω_1 και την ω_2 ενώ η συνημιτονοειδής περιβάλλουσα διαμορφώνει το πλάτος της απομάκρυνσης με γωνιακή συχνότητα $(\omega_2 - \omega_1)/2$, που είναι πολύ χαμηλή.

Σ' αυτή την περίπτωση καθώς ακούμε δύο ήχους με σχεδόν ίδια συχνότητα, συγχρόνως αντιλαμβανόμαστε ένα διακρότημα (beat), δηλαδή μια ρυθμική αυξομείωση της έντασης του ήχου. Επειδή το πλάτος αποκτά τη μέγιστη τιμή του ($2a$) δύο φορές σε κάθε περίοδο, δηλαδή στην περίοδο που αντιστοιχεί στη γωνιακή συχνότητα $(\omega_2 - \omega_1)/2$, η συχνότητα του διακροτήματος είναι $(\omega_2 - \omega_1)$, δηλαδή είναι ίση με τη διαφορά των δύο συχνοτήτων (και όχι με την ημιδιαφορά τους). Θα συναντήσουμε πάλι αυτή την κατάσταση στο 3ο Κεφάλαιο, όταν θα μελετήσουμε τη σύζευξη μεταξύ δύο ταλαντωτών, και στο 4ο Κεφάλαιο, όταν θα μελετήσουμε ομάδες κυμάτων με δύο συνιστώσες.

Επαληθευτικά Δύο Κάθετων μεταξύ τους Απλών Αρμονικών Ταλαντώσεων

1) Ταλαντώσεις με ίσες συχνότητες

Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο κινείται με την ταυτόχρονη επίδραση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας. Η μία ταλάντωση εκτελείται κατά μήκος του άξονα x και η άλλη κατά μήκος του κάθετου άξονα y . Τι κίνηση προκύπτει;

Η απομάκρυνση δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \sin(\omega t + \phi_1) \\ y &= a_2 \sin(\omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

Η τροχιά του σωματιδίου βρίσκεται με απαλοιφή του χρόνου t από αυτές τις εξισώσεις, οπότε προκύπτει μια σχέση μεταξύ των x και y καθώς και των σταθερών ϕ_1 και ϕ_2 .

«Αναπτύσσοντας τα ορίσματα» των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{x}{a_1} = \sin \omega t \cos \phi_1 + \cos \omega t \sin \phi_1$$

και

$$\frac{y}{a_2} = \sin \omega t \cos \phi_2 + \cos \omega t \sin \phi_2 .$$

Από τον υπολογισμό της επόμενης παράστασης

$$\left(\frac{x}{a_1} \sin \phi_2 - \frac{y}{a_2} \sin \phi_1 \right)^2 + \left(\frac{y}{a_2} \cos \phi_1 - \frac{x}{a_1} \cos \phi_2 \right)^2$$

προκύπτει

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1) \quad (1.3)$$

Αυτή είναι η γενική μορφή της εξίσωσης μιας έλλειψης.

Γενικά οι άξονες της έλλειψης σχηματίζουν γωνία με τους άξονες x και y . Οι άξονες x και y γίνονται οι κύριοι άξονες της έλλειψης, όταν η διαφορά φάσης είναι

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{2} .$$

Τότε η εξίσωση (1.3) παίρνει τη γνώριμη μορφή

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$$

αυτή είναι η εξίσωση μιας έλλειψης με ημιάξονες a_1 και a_2 .

Αν $a_1 = a_2 = a$ η έλλειψη μετατρέπεται σε κύκλο

$$x^2 + y^2 = a^2 .$$

Όταν

$$\phi_2 - \phi_1 = 0, 2\pi, 4\pi, \kappa.λπ.$$

η εξίσωση απλοποιείται και γίνεται

$$y = \frac{a_2}{a_1} x$$

Αυτή η εξίσωση παριστάνει μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση a_2/a_1 .

Επίσης αν $\phi_2 - \phi_1 = \pi, 3\pi, 5\pi \kappa.λπ.$, προκύπτει

$$y = -\frac{a_2}{a_1} x$$

Αυτή η εξίσωση παριστάνει επίσης μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων αλλά με αντίθετη κλίση από την προηγούμενη.

Οι τροχιές που διαγράφονται από το σωματίδιο για ποικίλες τιμές της διαφοράς $\delta = \phi_2 - \phi_1$ φαίνονται στο Σχήμα 1.8 και επιδεικνύονται πολύ εύκολα με έναν παλμογράφο.

Όταν

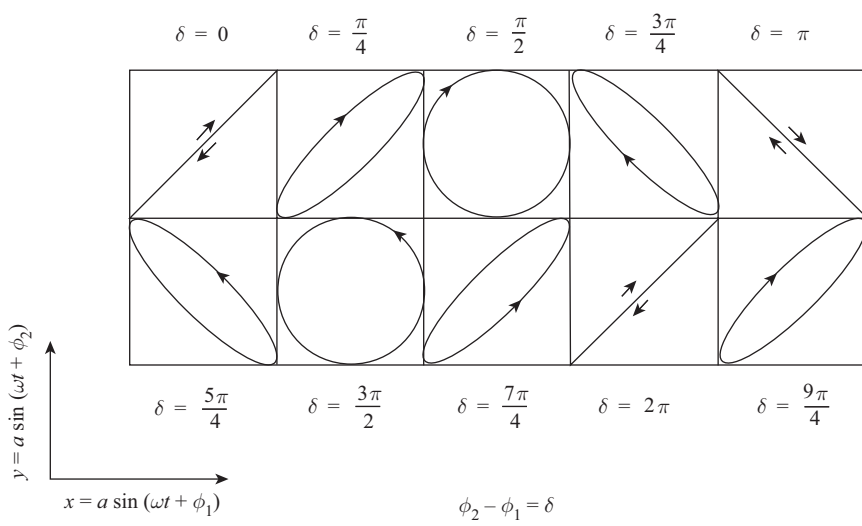
$$\phi_2 - \phi_1 = 0, 2\pi, 4\pi, \text{ κ.λπ.}$$

η έλλειψη εκφυλίζεται σε ευθεία γραμμή. Τότε η ταλάντωση που προκύπτει εκτελείται εξ ολοκλήρου πάνω σε ένα επίπεδο και οι ταλαντώσεις λέγονται *γραμμικά πολωμένες*.

Το επίπεδο στο οποίο εκτελούνται οι ταλαντώσεις, ορίζεται συμβατικά ως επίπεδο πόλωσης.³ Ομοίως για άλλες τιμές της διαφοράς

$$\phi_2 - \phi_1$$

προκύπτει *κυκλική* ή *ελλειπτική* πόλωση. Σ' αυτή την περίπτωση το τέλος του



Σχήμα 1.8 Τροχιές που διαγράφονται από ένα σύστημα που εκτελεί ταυτόχρονα, σε δύο κάθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις, απλές αρμονικές ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα. Η διαφορά φάσης δ είναι η γωνία κατά την οποία η κίνηση που εκτελείται κατά μήκος του άξονα y προηγείται εκείνης που εκτελείται κατά μήκος του άξονα x .

3. ΣτΕ: Σύμφωνα με παλαιότερη σύμβαση, οριζόταν ως επίπεδο πόλωσης το επίπεδο το κάθετο προς το επίπεδο της ταλάντωσης. Σε κύματα με περισσότερες συνιστώσες, όπως το Ηλεκτρομαγνητικό κύμα, ορίζεται ως επίπεδο πόλωσης το επίπεδο ταλάντωσης της μίας συνιστώσας, (στο Η/Μ κύμα, το επίπεδο ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου).

διανύσματος της συνισταμένης των διανυσμάτων των δύο αρχικών κινήσεων διαγράφει κατάλληλη κωνική τομή.

(Προβλήματα 1.14, 1.15, 1.16)

Πόλωση*

Η πόλωση είναι βασικό θέμα στην Οπτική και προκύπτει από την υπέρθεση δύο κάθετων μεταξύ τους απλών, αρμονικών, ταλαντώσεων της Οπτικής. Θα δούμε στο 7ο Κεφάλαιο ότι, όταν ένα κύμα φωτός είναι γραμμικά πολωμένο, το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος ταλαντώνεται σε μόνο ένα επίπεδο και διαγράφει ημιτονοειδή καμπύλη κατά μήκος της κατεύθυνσης διάδοσης του κύματος. Ωστόσο υλικά, όπως ο χαλαζίας και ο ασβεστίτης, έχουν την ιδιότητα να διαχωρίζουν το φως σε δύο κύματα. Τα επίπεδα διάδοσης των δύο κυμάτων είναι κάθετα μεταξύ τους. Επίσης προς κάθε κατεύθυνση η ταχύτητα διάδοσης του ενός κύματος διαφέρει από την ταχύτητα διάδοσης του άλλου με εξαίρεση μόνο μία κατεύθυνση που είναι γνωστή ως οπτικός άξονας του μέσου. Το ένα κύμα, που ονομάζεται τακτικό⁴ (ordinary) ή κύμα *O* διαδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις με την ίδια ταχύτητα. Επίσης οι ταλαντώσεις του ηλεκτρικού πεδίου αυτού του κύματος είναι πάντα κάθετες στον οπτικό άξονα. Το άλλο κύμα, που ονομάζεται έκτακτο⁵ (extraordinary) ή κύμα *E*, έχει ταχύτητα που εξαρτάται από την κατεύθυνση της διάδοσης του κύματος. Οι δείκτες διάθλασης του τακτικού και του έκτακτου κύματος διαφέρουν μεταξύ τους και γι' αυτό υλικά, όπως ο χαλαζίας και ο ασβεστίτης είναι γνωστά ως διπλοθλαστικά (birefringent) υλικά. Όταν το τακτικό κύμα είναι ταχύτερο από το έκτακτο, όπως συμβαίνει στο χαλαζία, οι κρύσταλλοι του υλικού ονομάζονται θετικοί, ενώ στον ασβεστίτη το έκτακτο κύμα είναι ταχύτερο από το τακτικό και ο κρύσταλλος ονομάζεται αρνητικός. Στο Σχήμα 1.9(α) φαίνονται οι σφαιρικές και οι ελλειψοειδείς επιφάνειες που είναι οι γεωμετρικοί τόποι των τιμών των ταχυτήτων των δύο κυμάτων προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Επίσης, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα, για δεδομένη κατεύθυνση, οι ταλαντώσεις του ηλεκτρικού πεδίου των ξεχωριστών κυμάτων είναι εφαπτόμενες στην επιφάνεια των σφαιρών ή των ελλειψοειδών. Στο Σχ. 1.9(β) φαίνεται γραμμικά πολωμένο φως που προσπίπτει κάθετα σε μια επιφάνεια κρυστάλλου ασβεστίτη⁶. Ο κρύσταλλος

* Σε πρώτη ανάγνωση η παρούσα Ενότητα είναι δυνατό να παραλειφθεί.

4. ΣτΜ: Εδώ η λέξη τακτικός έχει το νόημα της λέξης συνηθισμένος.

5. Εδώ η λέξη έκτακτος σημαίνει μη συνηθισμένος

6. ΣτΕ: Οι γεωμετρικοί τόποι των ταχυτήτων, στο σχήμα, αποδίδουν όλες τις κατευθύνσεις διάδοσης. Η κάθετη πρόσπτωση (που αναφέρεται στο κείμενο και απεικονίζεται στο πάνω μέρος του σχήματος) αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη διαφορά ταχυτήτων.