ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Εισαγωγή

Η εισαγωγή περιέχει μια σύντομη επισκόπηση των περιεχομένων του βιβλίου, περιγράφοντας συνοπτικά τα βασικά σημεία κάθε κεφαλαίου.

1.2 Σύντομη περίληψη ανά κεφάλαιο

Το 2^o Κεφάλαιο μας εισάγει στους πίνακες και την αντίστοιχη γραμμική άλγεβρα. Πίνακας είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπαριστά συνοπτικά σύνολα εξισώσεων, συνδέσεις δικτύου, εξελικτικά δυναμικά συστήματα και ούτω καθεξής. Η χρήση των πινάκων γίνεται απαραίτητη για την αποτελεσματική μελέτη των μεγάλων συστημάτων. Το παρακάτω παράδειγμα παρουσιάζει το όφελος των πινάκων όταν μεταφερόμαστε από προβλήματα μιας εξίσωσης σε συστήματα εξισώσεων.

Στο μοντέλο προσφοράς και ζήτησης, η ζήτηση (D) για κάποιο αγαθό σχετίζεται αρνητικά με την τιμή και η προσφορά (S) σχετίζεται θετικά. Έτσι, $D = \alpha - \beta p$, όπου p είναι η τιμή του προϊόντος. Τα γράμματα α και β υποδηλώνουν *παραμέτρους* του μοντέλου με $\alpha > 0$, δείχνοντας ότι η αύξηση της τιμής μειώνει τη ζήτηση. Η μαθηματική διατύπωση της προσφοράς είναι παρόμοια, με τη διαφορά ότι η προσφορά θα έπρεπε να σχετίζεται θετικά με την τιμή, οπότε παίρνουμε ως αξίωμα ότι $\delta > 0$ στη σχέση $S = \gamma + \delta p$. Ο συνδυασμός αυτών των δύο σχέσεων μας δίνει το μοντέλο προσφοράς και ζήτησης:

$$D = \alpha - \beta p, \alpha > 0, \beta > 0$$
$$S = \gamma + \delta p, \gamma < 0, \delta > 0.$$

Σε ποια τιμή πωλείται το αγαθό και σε τι ποσότητα; Η παραδοχή της εκκαθάρισης της αγοράς συνεπάγεται ότι η τιμή εκκαθάρισής της θα υπερισχύσει. Δηλώνοντας ως p_e την τιμή στην οποία η προσφορά ισοδυναμεί με τη ζήτηση, τότε $D_e = \alpha - \beta p_e = \gamma + \delta p_e = S_e$. Με αναδιάταξη της σχέσης $\alpha - \beta p_e = \gamma + \delta p_e$ προκύπτει ότι $(\alpha - \gamma) = (\beta + \delta) p_e$. Διαιρώντας και τα δυο μέλη με $(\beta + \delta)$ λαμβάνουμε την τιμή *ισορροπίας* $p_e = \frac{(\alpha-\gamma)}{(\beta+\delta)}$. Εφόσον σε αυτή την τιμή η ποσότητα που ζητείται ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα ισορροπίας η οποία συμβολίζεται με Q_e. Βρίσκουμε τον τύπο του Q_e αντικαθιστώντας το p_e είτε στον τύπο της προσφοράς είτε της ζήτησης: $Q_e = \alpha - \beta p_e = \alpha - \beta \left[\frac{(\alpha-\gamma)}{(\beta+\delta)}\right] = \frac{(\delta\alpha+\beta\gamma)}{(\beta+\delta)}$. Συνοψίζοντας:

$$p_e = \frac{(\alpha - \gamma)}{(\beta + \delta)}, \qquad Q_e = \frac{(\delta\alpha + \beta\gamma)}{(\beta + \delta)}. \tag{1.1}$$

Σε πολλαπλές αγορές, οι υπολογισμοί γίνονται πιο σύνθετοι και παρακινούν τη χρήση των πινάκων.

Με δύο (ή περισσότερες) αγορές, μπορεί να υπάρξουν επιπτώσεις μεταξύ των τιμών: η τιμή του ψωμιού μπορεί να επηρεάσει τη ζήτηση μαργαρίνης, η τιμή του τσαγιού μπορεί να επηρεάσει τη ζήτηση για καφέ. Ως εκ τούτου, οι υπολογισμοί για τον καθορισμό των τιμών και των ποσοτήτων εκκαθάρισης της αγοράς καθίστανται πιο περίπλοκοι. Για να αποτυπώσετε αυτές τις επιπτώσεις σε σχέση με τις τιμές, γράψτε τη ζήτηση και την προσφορά και στις δύο αγορές:

$$\begin{aligned} &\text{Αγορά 1:} \quad D_1 = a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2, \quad S_1 = b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 \\ &\text{Αγορά 2:} \quad D_2 = \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \quad S_2 = \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2. \end{aligned}$$

Η ισορροπία συμβαίνει όταν οι τιμές εξισώνουν την προσφορά και τη ζήτηση και στις δύο αγορές ($D_1 = S_1$ και $D_2 = S_2$). Για να βρούμε το επίπεδο ισορροπίας της ποσότητας και της τιμής σε κάθε αγορά εξισώνουμε την προσφορά με τη ζήτηση στη κάθε αγορά.

$$\begin{array}{lll} \text{Αγορά 1:} & D_1 = S_1 \quad \text{ή} \quad a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 = b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 \\ \text{Αγορά 2:} & D_2 = S_2 \quad \text{ή} \quad \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2. \end{array}$$

Αναδιατυπώνοντας τις εξισώσεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} (a_1 - b_1)p_1 + (a_2 - b_2)p_2 &= (b_0 - a_0) \\ (\alpha_1 - \beta_1)p_1 + (\alpha_2 - \beta_2)p_2 &= (\beta_0 - \alpha_0). \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να λυθούν με αντικατάσταση. Ωστόσο, η διαδικασία είναι κουραστική. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$p_1 = \frac{(b_0 - a_0)}{(a_1 - b_1)} - \frac{(a_2 - b_2)}{(a_1 - b_1)} p_2.$$

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση προκύπτει:

$$(\alpha_1 - \beta_1)\left[\frac{(b_0 - a_0)}{(a_1 - b_1)} - \frac{(a_2 - b_2)}{(a_1 - b_1)} p_2\right] + (\alpha_2 - \beta_2)p_2 = (\beta_0 - \alpha_0).$$

Επιλέγοντας στο πρώτο μέλος τους όρους με το p_2 προκύπτει:

$$\left[(\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{(a_2 - b_2)}{(a_1 - b_1)}\right] p_2 = (\beta_0 - \alpha_0) - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{(b_0 - a_0)}{(a_1 - b_1)}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και στα δυο μέλη με $(a_1 - b_1)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} &[(\alpha_2 - \beta_2)(a_1 - b_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(a_2 - b_2)]\, p_2 = \\ &= (\beta_0 - \alpha_0)(a_1 - b_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(b_0 - a_0). \end{aligned}$$

Οπότε,

$$p_2 = \frac{[(\beta_0 - \alpha_0)(a_1 - b_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(b_0 - a_0)]}{[(\alpha_2 - \beta_2)(a_1 - b_1) - (\alpha_1 - \beta_1)(a_2 - b_2)]}.$$

Με παρόμοιο υπολογισμό προκύπτει το p_1. Με τρεις ή περισσότερες εξισώσεις η διαδικασία γίνεται προοδευτικά πιο περίπλοκη. Η χρήση της άλγεβρας των πινάκων απλοποιεί σημαντικά προβλήματα αυτού του είδους. Σε μορφή πινάκων είναι:

$$\begin{pmatrix} (a_1 - b_1) & (a_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 - a_0 \\ \beta_0 - \alpha_0 \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 - b_1) & (a_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_0 - a_0 \\ \beta_0 - \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} (a_1 - b_1) & (a_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix}^{-1}$$

λέγεται αντίστροφος του

$$\begin{pmatrix} (a_1 - b_1) & (a_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix}.$$

Ο αντίστροφος πίνακας μπορεί να γραφεί *(λεπτομέρειες αργότερα)*:

$$\begin{pmatrix} (a_1 - b_1) & (a_2 - b_2) \\ (\alpha_1 - \beta_1) & (\alpha_2 - \beta_2) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - \beta_2) & -(a_2 - b_2) \\ -(\alpha_1 - \beta_1) & (a_1 - b_1) \end{pmatrix},$$

όπου $d = (a_1 - b_1)(\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1)(a_2 - b_2)$. Άρα,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - \beta_2) & -(a_2 - b_2) \\ -(\alpha_1 - \beta_1) & (a_1 - b_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b_0 - a_0) \\ (\beta_0 - \alpha_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - \beta_2)(b_0 - a_0) - (a_2 - b_2)(\beta_0 - \alpha_0) \\ -(\alpha_1 - \beta_1)(b_0 - a_0) + (a_1 - b_1)(\beta_0 - \alpha_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{[(\alpha_2 - \beta_2)(b_0 - a_0) - (a_2 - b_2)(\beta_0 - \alpha_0)]}{[(a_1 - b_1)(\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1)(a_2 - b_2)]} \\ p_2 &= \frac{[-(\alpha_1 - \beta_1)(b_0 - a_0) + (a_1 - b_1)(\beta_0 - \alpha_0)]}{[(a_1 - b_1)(\alpha_2 - \beta_2) - (\alpha_1 - \beta_1)(a_2 - b_2)]}. \end{aligned}$$

Το αρχικό μέρος του $2^{ου}$ Κεφαλαίου περιγράφει τους βασικούς κανόνες για τη χρήση πινάκων και την επίλυση συστημάτων εξισώσεων. Δεν έχουν όλα τα συστήματα μια λύση και ορισμένα συστήματα εξισώσεων μπορεί να έχουν πολλές λύσεις. Αυτό οδηγεί στο καθήκον του προσδιορισμού πότε τα συστήματα εξισώσεων έχουν λύση και των συνθηκών κάτω από τις οποίες υπάρχει μια μοναδική λύση. Οι βασικές ιδέες της τάξης και της γραμμικής ανεξαρτησίας εισάγονται με σκοπό να μελετηθεί αυτό το ζήτημα. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μερικές επιπλέον παρατηρήσεις στην άλγεβρα πινάκων.

Στο 3^o Κεφάλαιο, οι τεχνικές πινάκων χρησιμοποιούνται για να απεικονίσουν τις πολλές χρήσεις της άλγεβρας πινάκων. Αυτές περιλαμβάνουν γραμμικά συστήματα ζήτησης, τεχνικές εισόδου-εξόδου, στοχαστικές διαδικασίες Markov και αναλλοίωτες κατανομές, καθώς και εκτίμηση των ελαχίστων τετραγώνων. Για να διευκρινισθεί περισσότερο, εξετάστε την ανάλυση εισροών-εκροών, όπου η οικονομία αντιμετωπίζεται ως ένας αριθμός αλληλένδετων βιομηχανιών (n το πλήθος βιομηχανιών). Η παραγωγή μιας βιομηχανίας χρησιμοποιείται για την τελική κατανάλωση και για την παραγωγή άλλων προϊόντων. Η συνολική παραγωγή ενός κλάδου κατανέμεται μεταξύ εκείνων που χρησιμοποιείται στην παραγωγή άλλων κλάδων (ζήτηση μεταξύ βιομηχανιών) και κατανάλωσης ή τελικής ζήτησης. Ο σχεδιασμός για την επίτευξη ορισμένων (στοχευόμενων) επιπέδων κατανάλωσης ή τελικής ζήτησης συνεπάγεται έμμεσα επίπεδα παραγωγής σε κάθε κλάδο βιομηχανιών. Η ανάλυση εισροών-εκροών αφορά τον καθορισμό των επιπέδων παραγωγής που απαιτούνται για τη διατήρηση ή την επίτευξη των στοχευόμενων επιπέδων σε όλο το φάσμα των τελικών απαιτήσεων. Στη συνέχεια αναπτύσσεται ένα απλό μοντέλο για να παρουσιάσει τη διαδικασία. Η συζήτηση επεξηγεί τη μέθοδο και τη χρήση των διάφορων μεθόδων πινάκων ώστε να καθοριστεί το αναγκαίο επίπεδο παραγωγής ενός βιομηχανικού κλάδου.

Ας θέσουμε a_{ij} = ποσότητα του i που απαιτείται για την παραγωγή 1 μονάδας του j, x_i = παραγωγή του i και f_i = τελική ζήτηση για i. Επίσης, αν x_j είναι η ποσότητα του προϊόντος j που παράγεται, τότε $a_{ij}x_j$ είναι η ποσότητα του i που απαιτείται για την παραγωγή του j. (Εάν παραχθεί ένα κιλό προϊόντος j, το a_{ij} είναι το κλάσμα του ενός κιλού προϊόντος i που χρησιμοποιείται για την παραγωγή του κιλού του j.) Η παραγωγή της βιομηχανίας i κατανέμεται στη παραγωγή άλλων βιομηχανιών ($a_{ij}x_j$) και στην τελική ζήτηση (f_i). Έτσι,

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + f_i, i = 1, ..., n.$$

Αυτό μπορεί να μετασχηματιστεί σε:

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2... + (1 - a_{ii})x_i... - a_{in}x_n = f_i, i = 1, ..., n.$$

ή, σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1-a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Αυτή η έκφραση μπορεί να γραφεί συνοπτικά και ως: $(\mathbf{I}-\mathbf{A})x = f$, όπου οι πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{I}$ είναι οι ακόλουθοι:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

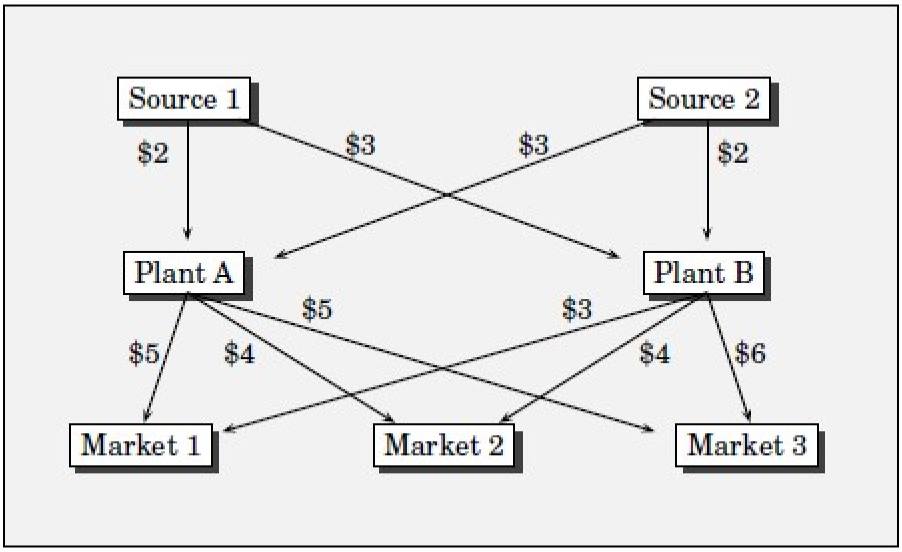
Στο 4$^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού. Η βελτιστοποίηση εμφανίζεται σε πολλά περιβάλλοντα. Για παράδειγμα, η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας εμπεριέχει τον καθορισμό του πακέτου κατανάλωσης που μεγιστοποιεί το όφελος κάτω από την συνθήκη του γραμμικού περιορισμού, δηλαδή τον περιορισμό του προϋπολογισμού. Ενώ η αντικειμενική συνάρτηση, η συνάρτηση της χρησιμότητας, είναι μη γραμμική, το σύνολο των εφικτών επιλογών καθορίζεται από έναν γραμμικό περιορισμό. Το 4$^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο εισάγει τη βελτιστοποίηση υπό περιορισμό στο γραμμικό πλαίσιο: τόσο ο στόχος όσο και οι περιορισμοί να είναι γραμμικοί. Ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται ευρέως στη βιομηχανία και έχει άμεση πρακτική χρησιμότητα.

Το ακόλουθο πρόβλημα μεταφοράς δείχνει πώς προκύπτει ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Μια εταιρεία έχει δύο πηγές εισροών, δύο μονάδες επεξεργασίας και τρεις αγορές να προμηθεύσει. Τα έξοδα αποστολής αναφέρονται στον πίνακα που ακολουθεί.

	Πηγή 1	*Πηγή 2*	*Αγορά 1*	*Αγορά 2*	*Αγορά 3*
Μονάδα Α	2	3	5	4	5
Μονάδα Β	3	2	3	4	6

Το γράφημα στο Σχήμα 1.1 απεικονίζει αυτό γραφικά.

Έστω $x_{iAj} = \#$ τόνοι από την πηγή i μέσω της μονάδας Α στην αγορά j και $x_{iBj} = \#$ τόνοι από την πηγή i μέσω της μονάδας Β στην αγορά j. Οι εισροές μεταφέρονται από την πηγή στη μονάδα και στη συνέχεια στην αγορά. Το κόστος αποστολής ενός τόνου από την πηγή 1 μέσω της μονάδας A στην αγορά 3 είναι $2 + 5 = 7$ (το κόστος μεταφοράς από την πηγή 1 στη μονάδα A συν το κόστος μεταφοράς από τη μονάδα A στην αγορά 3). Έτσι, το κόστος της αποστολής x_{1A3} τόνων σε αυτή τη διαδρομή είναι $7x_{1A3}$. Όλα τα κόστη δρομολογίων υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο. Τέλος, οι πηγές 1 και 2 διαθέτουν, αντίστοιχα, 10 και 20 μονάδες πρώτης ύλης. Η ζήτηση είναι 10 στην αγορά 1, 15 στην



Σχήμα 1.1. Ροές κόστους

αγορά 2 και 5 στην αγορά 3. Αυτό οδηγεί στο πρόγραμμα:

$$\begin{aligned}\min \ \ C = {} & 7x_{1A1} + 6x_{1A2} + 7x_{1A3} + 6x_{1B1} + 7x_{1B2} + 9x_{1B3} + 8x_{2A1} \\ & + 7x_{2A2} + 8x_{2A3} + 5x_{2B1} + 6x_{2B2} + 8x_{2B3},\end{aligned}$$

υπό των περιορισμών:

$$\begin{aligned}
x_{1A1} + x_{1A2} + x_{1A3} + x_{1B1} + x_{1B2} + x_{1B3} \leq 10\\
x_{2A1} + x_{2A2} + x_{2A3} + x_{2B1} + x_{2B2} + x_{2B3} \leq 20\\
x_{1A1} + x_{1B1} + x_{2A1} + x_{2B1} \geq 10\\
x_{1A2} + x_{1B2} + x_{2A2} + x_{2B2} \geq 15\\
x_{1A3} + x_{1B3} + x_{2A3} + x_{2B3} \geq 5\\
x_{iAj}, x_{iBj} \geq 0, \forall i, j.
\end{aligned}$$

Από θεωρητικής άποψης, το θέμα εισάγει πολλές βασικές ιδέες στα οικονομικά όπως βελτιστοποίηση, περιορισμοί και εφικτές επιλογές, δυϊκές ή σκιώδεις τιμές των περιορισμών, έννοια της χαλαρής μεταβλητής και του αντίστοιχου περιορισμού κ.ο.κ.

Το πρώτο μέρος του $4^{ου}$ Κεφαλαίου εισάγει τις βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, διατυπώνοντας τους στόχους, τους περιορισμούς και την εφικτή περιοχή. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται μια γραφική αναπαράσταση για την επεξήγηση της τεχνικής που εφαρμόζεται για την επίλυση του προβλήματος. Μια βασική ιδέα είναι ότι μια λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί πάντα να βρεθεί σε μια γωνία ή κορυφή της εφικτής περιοχής. Δεδομένου ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος (αν και ενδεχομένως μεγάλος) αριθμός κορυφών, απλοποιείται σημαντικά η αναζήτηση μιας λύσης. Παραδείγματα επεξηγούν αυτό το γεγονός και το χρησιμοποιούν για να εντοπίσουν τη βέλτιστη λύση. Επιπλέον, ο υπολογισμός των σκιώδους τιμών μπορεί να γίνει άμεσα για απλά προβλήματα χρησιμοποιώντας την τεχνική της γραφικής αναπαράστασης. Το δεύτερο μέρος του κεφαλαίου εξετάζει τη γενική δομή αυτών των προβλημάτων. Εισάγονται βασικές λύσεις καθώς οι κορυφές αναγνωρίζονται ως τέτοιες. Ο υπολογισμός των βασικών λύσεων είναι απλός και έτσι αυτή η παρατήρηση παρέχει ένα μέσο εντοπισμού των κορυφών της εφικτής περιοχής. Αυτές οι παρατηρήσεις δημιουργούν μια βάση για τους αλγορίθμους που προσδιορίζουν τη λύση. Το τελευταίο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζει μια συζήτηση για τη θεωρία της δυαδικότητας και τη θεωρία που βασίζεται στις δυϊκές ή σκιώδεις τιμές.

Το $5^{ο}$ Κεφάλαιο ασχολείται με τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής και αρχίζει με την εμφάνιση του τρόπου με τον οποίο προκύπτουν στα οικονομικά διάφορες συναρτήσεις, όπως συναρτήσεις ζήτησης, συναρτήσεις παρούσας αξίας κ.ο.κ. Μία συνάρτηση ζήτησης συμβολίζεται με $p(q)$, σχετίζοντας την τιμή με την ποσότητα που απαιτείται. Για να μετρήσουμε την ανταπόκριση ανάμεσα στην τιμή και την ζήτηση, πρέπει να εξετάσουμε την τιμή $p(q')$ στην οποία θα υπήρχε κάποια εναλλακτική ζήτηση q'. Αυτό φυσικά οδηγεί στον υπολογισμό $p(q')-p(q)$, ή $\frac{p(q')-p(q)}{q'-q}$, δίνοντας τη διακύμανση της τιμής ανά μονάδα που σχετίζεται με την μεταβολή της ποσότητας. Ομοίως, εάν μία μόνο εταιρεία τροφοδοτεί την αγορά, το συνολικό εισόδημα της εταιρείας είναι $r(q) = qp(q)$, και αν το κόστος της παραγωγής ποσότητας q είναι $c(q)$, τότε το κέρδος της εταιρείας είναι $\pi(q) = r(q) - c(q)$. Με αυτόν τον τρόπο, συναρτήσεις εμφανίζονται σταθερά σε οικονομικά προβλήματα και υπολογισμοί όπως η αύξηση του κόστους ανά μονάδα αύξησης της παραγωγής $\frac{c(q')-c(q)}{q'-q}$, δηλαδή το οριακό κόστος, οδηγούν όπως είναι φυσικό στον μαθηματικό λογισμό και στις παραγώγους.

Δουλεύοντας με συναρτήσεις απαιτείται η κατανόηση των βασικών εννοιών της συνέχειας και της παραγωγισιμότητας. Αυτές εισάγονται στο αρχικό μέρος του κεφαλαίου. Στη συνέχεια περιγράφονται διάφορες συναρτήσεις. Οι λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις εξετάζονται λεπτομερώς, εφόσον εμφανίζονται τακτικά στους οικονομικούς υπολογισμούς, ιδίως στους υπολογισμούς που αφορούν την ανάπτυξη και την παρούσα αξία. Περιγράφονται διάφοροι κανόνες λογισμού για τις λειτουργίες των συναρτήσεων (αθροίσματα, γινόμενα και λόγοι). Τέλος, εισάγονται παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Στο 6ο Κεφάλαιο, ορισμένες εφαρμογές απεικονίζουν την χρήση των συναρτήσεων στα οικονομικά. Η βελτιστοποίηση για συναρτήσεις μιας μεταβλητής εξετάζεται λεπτομερώς, λαμβάνοντας υπόψη τη συμπεριφορά των πρώτων και δεύτερων παραγώγων. Στη συνέχεια, ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης σχετίζεται με την κοιλότητα ή την κυρτότητα της συνάρτησης, και αυτό κατ' επέκταση με τη χρήση των ιδιοτήτων των παραγώγων. Μετά τη συζήτηση για τη βελτιστοποίηση με μία μεταβλητή, εξετάζεται ένα φάσμα εφαρμογών. Ένα μοντέλο αναπτύσσεται για να περιγράψει το πρόβλημα των ελεύθερων αναβατών, δηλαδή αυτών που λαμβάνουν μια ωφέλεια από ένα αγαθό χωρίς να συνεισφέρουν στο κόστος του, και την αναποτελεσματικότητα της αγοράς. Στη συνέχεια περιγράφεται η συνάρτηση ελαστικότητας όπου και εφαρμόζεται αργότερα στη μελέτη της φορολογίας και της απώλειας νεκρού βάρους, δηλαδή απώλειας χωρίς αντιστάθμισμα. Για παράδειγμα, αν η προ-φόρων ισορροπία είναι στο Q_e με τιμή p_e και η μετά-φόρων παραγωγή και τιμή είναι αντίστοιχα Q_t, p_t, τότε ο αντίκτυπος στον φόρο είναι μείωση της ποσότητας κατά $Q_t - Q_e$ και αύξηση της τιμής κατά $p_t - p_e$. Η απώλεια νεκρού βάρους είναι η περιοχή μεταξύ Q_t και Q_e πάνω από την καμπύλη προσφοράς και κάτω από την καμπύλη ζήτησης. Στην γραμμική περίπτωση, όπως είναι εύκολο να υπολογιστεί, δίνεται μια έκφραση για τις περιττές δαπάνες. Σε αυτό το κεφάλαιο, εισάγονται συγκριτικές στατικές εξετάζοντας την επίδραση των μεταβολών των παραμέτρων στην ισορροπία ή στο βέλτιστο επίπεδο μιας μεταβλητής. Η επίπτωση ενός φόρου προϊόντος εξετάζεται λεπτομερώς. Τέλος, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μια συζήτηση για την τιμολόγηση του Ramsey.

Το 7^o Κεφάλαιο εισάγει συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων. Το κεφάλαιο ξεκινά με τον ορισμό της μερικής παραγώγου και την έννοια της ισοϋψής μιας συνάρτησης. Αυτή απεικονίζεται από τις ευθείες των ισοϋψών όπου η καμπυλότητα περιγράφεται από τον οριακό ρυθμό μεταβολής. Οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιούνται για να αναπτύξουν την έννοια μιας ισορροπίας Cournot στο πλαίσιο του ολιγοπωλίου. Η συνάρτηση αντίστροφης ζήτησης της αγοράς δίνεται από την εξίσωση $p = f(Q)$, όπου p είναι η τιμή της αγοράς και Q η συνολική ποσότητα. Υπάρχουν δύο εταιρίες, με την ένδειξη 1 και 2. Αν η εταιρία i τροφοδοτεί ποσότητα q_i, η συνολική εξαγωγή και προσφορά είναι $Q = q_1 + q_2$. Το κόστος ανά μονάδα παραγωγής για την εταιρία i δίνεται από το c_i, έτσι ώστε εάν η εταιρία i παράγει q_i, το κόστος παραγωγής της είναι $c_i q_i$. Όταν η συνολική παραγωγή είναι $Q = q_1 + q_2$, τα έσοδα της εταιρίας i είναι $q_i f(Q)$. Έτσι, το συνολικό κέρδος της εταιρίας i είναι

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i f(q_1 + q_2) - c_i q_i.$$

Αυτός ο συμβολισμός καθιστά σαφή την εξάρτηση του κέρδους από την παραγωγή κάθε εταιρίας και απεικονίζει τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να προκύψουν συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Η ανάλυση της συμπεριφοράς μιας εταιρίας στην περίπτωση γραμμικής ζήτησης $p = a - bQ$ μπορεί να γίνει περαιτέρω εδώ. Στην περίπτωση αυτή, το κέρδος της εταιρίας i είναι $\pi_i(q_i, q_j) = pq_i - c_i q_i$, όπου $i \neq j$. Εφόσον η τιμή εξαρτάται από τις ποσότητες, $\pi_i(q_i, q_j) =$

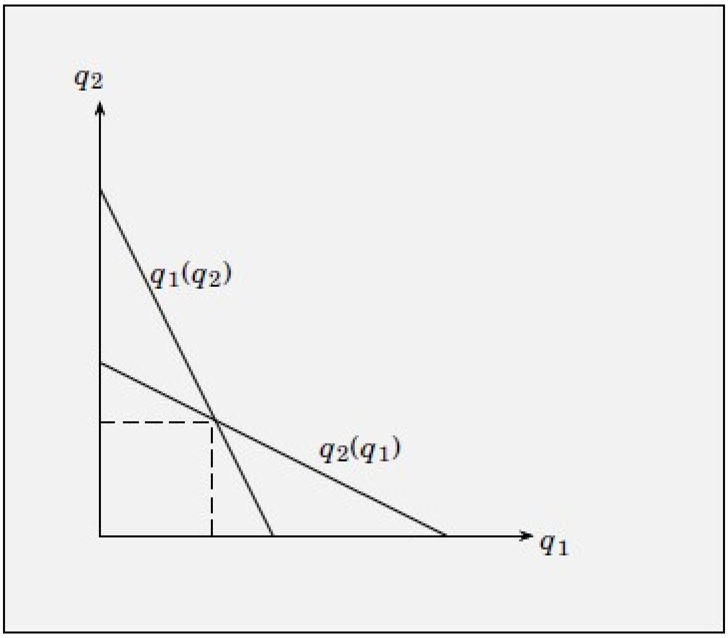
$[a - b(q_1 + q_2)]q_i - c_i q_i$, όπου $i \neq j$. Αυτό μπορεί να αναδιαταχθεί: $\pi_i(q_i, q_j) = [(a - c_i) - b(q_1 + q_2)]q_i$, όπου ξανά $i \neq j$. Ο τρόπος με τον οποίο μια εταιρία αποφασίζει για το επίπεδο της παραγωγής της εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο αναμένεται να συμπεριφερθεί μια άλλη ανταγωνιστική της εταιρία. Μια στενόμυαλη υπόθεση για εταιρία, ας πούμε για την εταιρία 1, είναι ότι η εταιρία 2 δεν θα προσαρμόσει την παραγωγή της ως απάντηση στην επιλογή της εταιρίας 1. Γενικά, όταν μια εταιρία ρυθμίζει την παραγωγή της, η άλλη εταιρία θα το επιθυμεί επίσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση όπου τα επίπεδα ποσότητας και των δύο εταιριών είναι τέτοια ώστε καμία από τις δύο εταιρίες δεν *επιθυμεί* να προσαρμόσει το επίπεδο παραγωγής της, τα επίπεδα παραγωγής είναι επίπεδα ισορροπίας. Το γεγονός ότι μια εταιρία δεν επιθυμεί να αλλάξει το επίπεδο παραγωγής της είναι το ουσιαστικό ζήτημα. Το γεγονός ότι η απόφαση αυτή βασίζεται στην αφελή υπόθεση ότι η άλλη εταιρία δεν θα απαντήσει είναι άνευ σημασίας. Εάν η εταιρία i λαμβάνει ως δεδομένο την παραγωγή της j και μεγιστοποιεί τα κέρδη της (παραγωγίζοντας ως προς q_i), αυτό δίνει: $(a - c_i) - 2bq_i - bq_j = 0, i \neq j$. Λύνοντας ως προς q_i έχουμε $q_i = [(a - c_i) - bq_j]/2b$. Συγκεκριμένα, $q_1 = [(a - c_1) - bq_2]/2b$ και $q_2 = [(a - c_2) - bq_1]/2b$. Οι παραστάσεις αυτές υποδηλώνουν τα $q_1(q_2)$ και $q_2(q_1)$, αντίστοιχα. Αυτές απεικονίζονται στο Σχήμα 1.2: η ερμηνεία είναι ότι όταν η εταιρία 2 παρέχει την ποσότητα q_2, τότε η εταιρία 1 επιθυμεί να επιλέξει το επίπεδο παραγωγής $q_1(q_2)$ και το αντίστροφο. Σημειώστε ότι στο ζεύγος ποσοτήτων (q_1^*, q_2^*), η εταιρία 1 επιθυμεί να επιλέξει q_1^* δεδομένου ότι η εταιρία 2 τροφοδοτεί q_2^*, παρομοίως και για την εταιρία 2.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{(a - c_1)}{2b} - \frac{1}{2}q_2 = \frac{(a - c_1)}{2b} - \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(a - c_2)}{2b}\right] - \frac{1}{2}q_1\right\} \\ &= \frac{(a - c_1) - (a - c_2)}{2b} + \frac{1}{4}q_1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Έτσι, οι τιμές λύσης για τα q_1 και q_2, (q_1^*, q_2^*) είναι:

$$q_1^* = \frac{4}{6b}\left[(a - c_1) - \frac{1}{2}(a - c_2)\right] \quad q_2^* = \frac{4}{6b}\left[(a - c_2) - \frac{1}{2}(a - c_1)\right]. \tag{1.3}$$

Η περαιτέρω ανάπτυξη της ισορροπίας Cournot επιτρέπει τον χαρακτηρισμό της αύξησης των τιμών πάνω από το οριακό κόστος όσον



Σχήμα 1.2. Καμπύλες αντίδρασης

αφορά την ελαστικότητα. Επιπλέον, ο δείκτης της βιομηχανικής συγκέντρωσης του Herftndahl-Hirschman μπορεί να οριστεί και να συνδεθεί με την ένδειξη ισορροπίας στον ανταγωνισμό του Cournot.

Αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσει επίσης τις τεχνικές της συγκριτικής στατικής και παρέχει μια συζήτηση για το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης. Με δεδομένες τις δύο συναρτήσεις f και g δύο μεταβλητών (x και y), ας υποθέσουμε ότι για κάποιες παραμέτρους α οι συναρτήσεις ικανοποιούν την σχέση $a = f(x, y)$ και $0 = g(x, y)$. Στη συνέχεια, σε μια λύση (x, y) τα ολικά διαφορικά (με μεταβολή του α, da) δίνουν $da = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$ και $0 = g_x(x, y)dx + g_y(x, y)dy$, όπου για παράδειγμα $f_x(x, y)$ είναι η μερική παράγωγος της f στο (x, y). Αναδιατυπώνοντας το ίδιο σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} da \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Αυτό θέτει τις μεταβολές x και y με φυσικό τρόπο σε όρους των μερικών παραγώγων και του da.

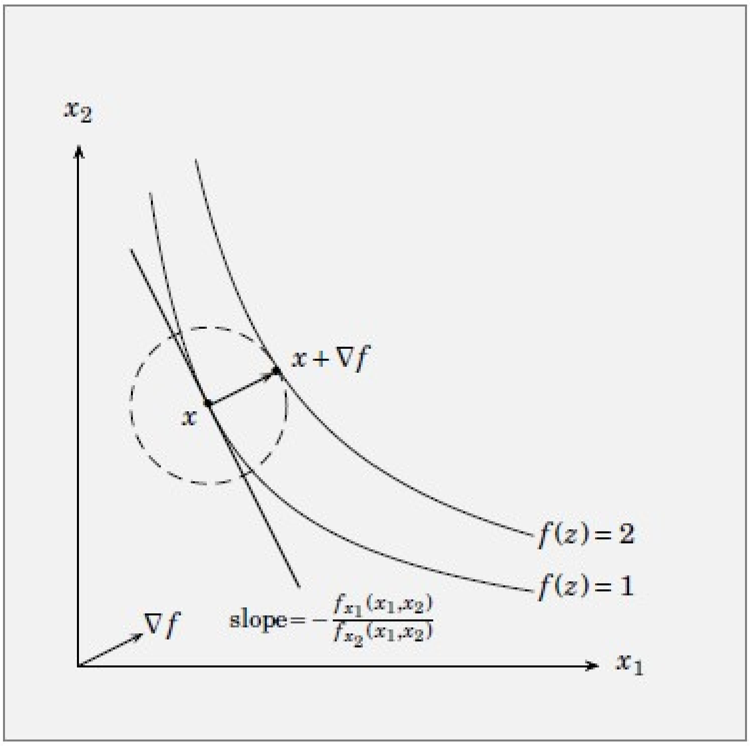
$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} da \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η διατύπωση του τύπου χρησιμοποιεί την άλγεβρα πινάκων και υπογραμμίζει το γεγονός ότι η μήτρα των μερικών παραγώγων πρέπει να είναι αντιστρέψιμη.

Το κεφάλαιο προχωρά στη συζήτηση για την ύπαρξη λύσεων των μη γραμμικών συστημάτων εξισώσεων και της συμπεριφοράς τους όταν οι παράμετροι μεταβάλλονται. Μια άτυπη συζήτηση οδηγεί στο θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης. Μετά από αυτό, αναπτύσσονται διάφορα παραδείγματα, συμπεριλαμβανομένων γνωστών μακροοικονομικών πολλαπλασιαστικών μοντέλων ώστε να επεξηγήσουν την εφαρμογή του θεωρήματος.

Το 8^{ο} Κεφάλαιο παρουσιάζει το ανάπτυγμα της σειράς Taylor. Το ανάπτυγμα της σειράς Taylor περιλαμβάνει την προσέγγιση μιας συνεχούς συνάρτησης από μια πολυωνυμική συνάρτηση, με πολυώνυμα υψηλότερης τάξης που δίνουν καλύτερες προσεγγίσεις ή μεγαλύτερη ακρίβεια. Η αξία αυτής της τεχνικής είναι σημαντική, αφού οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι σχετικά απλές και, αν η προσέγγιση είναι καλή, παρέχονται σημαντικές πληροφορίες για τις ιδιότητες της αρχικής συνάρτησης. Το κεφάλαιο ξεκινά με ένα παράδειγμα που δείχνει μια προσέγγιση συνάρτησης σε δευτεροβάθμια και στη συνέχεια προχωράει για να περιγράψει το ανάπτυγμα τάξεως n. Ορισμένες περαιτέρω συζητήσεις δείχνουν πώς βελτιώνεται η ακρίβεια καθώς αυξάνεται ο βαθμός του αναπτύγματος. Μετά από αυτό, το κεφάλαιο αναπτύσσει μερικές εφαρμογές του αναπτύγματος της σειράς Taylor, ξεκινώντας με μια απόδειξη ότι η κοίλη επιφάνεια συνεπάγεται αρνητική δεύτερη παράγωγο. Αυτή η εφαρμογή δείχνει τη χρησιμότητα του αναπτύγματος. Μια δεύτερη εφαρμογή αφορά την αριθμητική βελτιστοποίηση. Μεγάλο μέρος της λογικής των βημάτων του αλγορίθμου της αριθμητικής βελτιστοποίησης προέρχεται από το γεγονός ότι μια τυχαία συνεχής συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά από δευτεροβάθμια συνάρτηση. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί τη βάση για πολλές αριθμητικές συνήθεις διαδικασίες. Στο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι ιδέες πίσω από αυτό, καθώς και μια ποικιλία παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται για να επεξηγήσουν πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διαδικασία για τον εντοπισμό ενός μέγιστου ή ελάχιστου μιας συνάρτησης $f(x)$. Ακριβώς η ίδια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εντοπισθεί μια ρίζα μιας συνάρτησης (μια τιμή για το x τέτοια ώστε η συνάρτηση να είναι ίση με 0 σε αυτή την τιμή ($f(x) = 0$)). Αναλύονται επίσης πολυδιάστατες γενικεύσεις. Στη συνέχεια, το κεφάλαιο εξετάζει την αποστροφή κινδύνου χρησιμοποιώντας τις επεκτάσεις της σειράς Taylor ώστε να αξιολογηθούν ο κίνδυνος, τα ασφάλιστρα κινδύνου και οι ζημίες πρόνοιας που προκύπτουν από μικρούς κινδύνους. Τέλος, η απόδειξη του θεωρήματος Taylor παρέχεται τόσο για την περίπτωση μιας μεταβλητής όσο και για την περίπτωση πολλαπλών μεταβλητών.

Τα διανύσματα εξετάζονται στο Κεφάλαιο 9. Ένα διάνυσμα μπορεί να παρατηρηθεί από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Θεωρώντας το ως μια ορθογώνια διάταξη αριθμών, η μία του μορφή είναι ένας πίνακας με μία γραμμή ή μία στήλη. Μια δεύτερη ερμηνεία θεωρεί το διάνυσμα ως μια διεύθυνση, με κάθε συντεταγμένη να αντιπροσωπεύει ένα μήκος προς την αντίστοιχη κατεύθυνση. Επομένως, το $x = (x_1, x_2)$ θεωρείται ότι έχει διαγράψει x_1 μονάδες στην κατεύθυνση 1 και x_2 μονάδες στην κατεύθυνση 2. Από την άποψη αυτή, είναι λογικό να περιγραφούν τα διανύσματα με όρους κατεύθυνσης, καθετότητας (ή ορθογωνιότητας), μήκους προς δεδομένη κατεύθυνση, κ.ο.κ. Συγκεκριμένα, με τη χρήση διανυσμάτων μπορεί να υπολογιστεί η κατεύθυνση προς την οποία μια συνάρτηση αυξάνεται (ή μειώνεται) ταχύτερα. Η προοπτική αυτή διευκολύνει τη μελέτη πολλών προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένου και της βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη μια συνάρτηση $f(x_1, x_2)$, οι τιμές εκείνες του $x = (x_1, x_2)$ που δίνουν μια σταθερή τιμή στη συνάρτηση f καθορίζουν το "επίπεδο καμπύλης" της συνάρτησης. Επομένως, το σύνολο $F = \{(x_1, x_2) | f(x_1, x_2) = c\}$ είναι το επίπεδο της καμπύλης της συνάρτησης f που ισούται με το επίπεδο c. Τέτοιες καμπύλες εμφανίζονται στα οικονομικά όπως, για παράδειγμα, καμπύλες ίσου κόστους ή καμπύλες αδιαφορίας. Εάν f είναι μια συνάρτηση χρησιμότητας, το σύνολο F είναι το σύνολο των συνδυασμών κατανάλωσης που παρέχουν το ίδιο επίπεδο χρησιμότητας. Είναι σύνηθες να λαμβάνεται υπόψη η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας, παίρνοντας τις διακυμάνσεις των x_1 και x_2 που διατηρούν την χρησιμότητα σταθερή: $0 = f_{x_1}(x_1, x_2)dx_1 + f_{x_2}(x_1, x_2)dx_2$, με οριακό δείκτη αντικατάστασης να δίνεται από την σχέση $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_{x_1}(x_1,x_2)}{f_{x_2}(x_1,x_2)}$. Αλλά αυτή η πληροφορία περιλαμβάνεται στο διάνυσμα $(f_{x_1}(x_1,x_2), f_{x_2}(x_1,x_2))$ καθώς επίσης και στα απόλυτα μεγέθη των μερικών παραγώγων. Θεωρώντας το διάνυσμα ως κατεύθυνση, φαίνεται ότι το $\nabla f = (f_{x_1}(x_1,x_2), f_{x_2}(x_1,x_2))$ δείχνει την κατεύθυνση της πιο απότομης αύξησης της συνάρτησης f. Το Σχήμα 1.3 απεικονίζει αυτή την παρατήρηση. Ξεκινώντας από το x, η τιμή της συνάρτησης f αυξάνεται ταχύτερα προς την κατεύθυνση ∇f και το ∇f είναι κάθετο στο επίπεδο καμπύλης της f στο x. Το γεγονός αυτό χρησιμοποιείται εκτενώς στη συζήτηση για την υπό περιορισμούς βελτιστοποίηση. Τέλος, το 9ο Κεφάλαιο αναφέρει και αποδεικνύει το λήμμα του Farka. Το χρήσιμο αυτό αποτέλεσμα χρησιμοποιείται για την απόδειξη των κύριων θεωρημάτων γραμμικού προγραμματισμού και παρέχει πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τη λογική πίσω από την οποία βρίσκονται σημαντικά αποτελέσματα στην θεωρία βελτιστοποίησης.



Σχήμα 1.3. Κατεύθυνση υψηλότερης αύξησης

Το 10ο Κεφάλαιο εξετάζει τις τετραγωνικές μορφές. Μια τετραγωνική μορφή είναι η έκφραση $x'Ax$ όπου το x είναι ένα διάνυσμα και A ένας πίνακας. Στην περίπτωση μιας μεταβλητής, αυτό ακριβώς ανέρχεται σε x^2a. Μια σημαντική ερώτηση αφορά τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια τέτοια έκφραση είναι πάντοτε θετική ή πάντοτε αρνητική. Δηλαδή, ποιες ιδιότητες του A υποδηλώνουν για παράδειγμα ότι το $x'Ax > 0$ για όλα τα $x \neq 0$. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται θετικά ορισμένος πίνακας. Όταν $x'Ax < 0$ για όλα τα $x \neq 0$, ο πίνακας ονομάζεται αρνητικά ορισμένος. Ο χαρακτηρισμός αυτός δίνεται μετά τον προσδιορισμό των πρωτίστων κύριων ελασσόνων του πίνακα (μια πρώτιστη κύρια ελάσσονα μήτρα τάξης k ενός $n \times n$ πίνακα αποκτάται διαγράφοντας τις τελευταίες $n - k$ γραμμές και $n - k$ στήλες του). Ο θετικός και αρνητικός χαρακτηρισμός αντιστοιχεί στις περιπτώσεις όπου $x'Ax \geqslant 0$ (ή $x'Ax \leqslant 0$ αντίστοιχα) για όλα τα x. Μια σημαντική ερώτηση που αφορά τη θετικά ή αρνητικά ορισμένη μορφή του πίνακα όταν το αποδεκτό x είναι περιορισμένο είναι η εξής: υπό ποιές συνθήκες είναι $x'Ax < 0$ ή $x'Ax > 0$ για όλα τα μη μηδενικά x που ικανοποιούν ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών της μορφής $Bx = 0$; Το ερώτημα αυτό προκύπτει στην υπό περιορισμούς βελτιστοποίηση. Εδώ δίνεται ένας πλήρης χαρακτηρισμός από την άποψη ενός επαυξημένου (φραγμένου) πίνακα και των πρωτίστων κύριων ελασσόνων του.

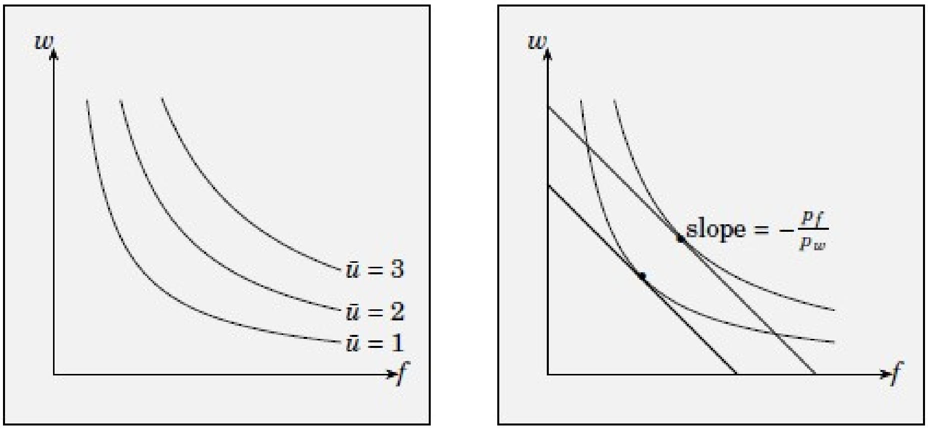
Το $11^{\text{ο}}$ Κεφάλαιο είναι το πρώτο από τα τρία κεφάλαια για τη βελτιστοποίηση και εξετάζει τη περίπτωση πολλαπλών μεταβλητών όταν δεν υπάρχουν περιορισμοί στις επιλεγμένες μεταβλητές. Το κεφάλαιο ξεκινά με μια συζήτηση στην περίπτωση των δύο μεταβλητών, αυτή της μεγιστοποίησης ή της ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης $f(x_1, x_2)$. Για παράδειγμα, το τυπικό πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους έχει συνάρτηση κέρδους την $\pi(x_1, x_2) = ph(x_1, x_2) - c_1x_1 - c_2x_2$, όπου h είναι η συνάρτηση παραγωγής, p η τιμή της παραγωγής και c_i το μοναδιαίο κόστος εισροών i.

Οι συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης για ένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο αναπτύσσονται λεπτομερώς, παρακινούμενοι από τη χρήση των επεκτάσεων σειράς Taylor, χρησιμοποιώντας τον Εσσιανό πίνακα (των δεύτερης τάξης μερικών παραγώγων). Ακολούθως, περιγράφεται το θεώρημα του περιβλήματος: δεδομένης της συνάρτησης $f(x, a)$ εξαρτώμενη από την επιλεγμένη μεταβλητή x και την παράμετρο a, αν η $x(a)$ μεγιστοποιεί την $f(x, a)$, πώς η $f^*(a) = f(x(a), a)$ ποικίλλει ανάλογα το a; Αυτό είναι ανάλογο της σκιώδους ή δυϊκής τιμής στον γραμμικό προγραμματισμό και μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρηση της αξίας του πόρου a. Το κεφάλαιο εξετάζει την υπόθεση των n μεταβλητών, γενικεύοντας την αρχική συζήτηση, και ολοκληρώνεται καθορίζοντας τη σχέση μεταξύ της κοιλότητας, της κυρτότητας και των ιδιοτήτων του Εσσιανού πίνακα.

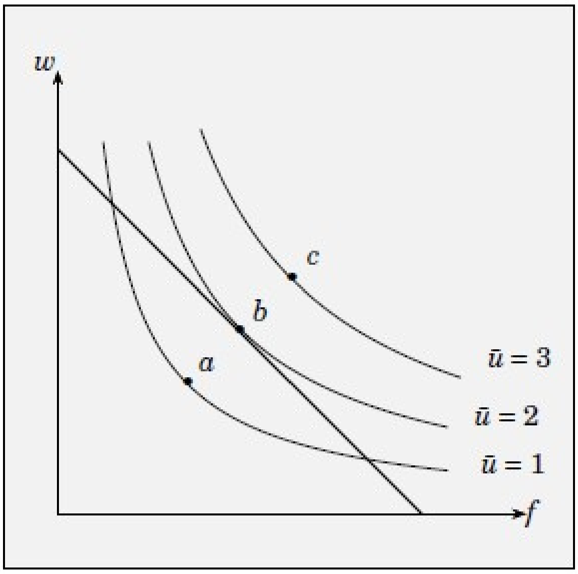
Στο 12^{o} Κεφάλαιο εξετάζεται η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης που υπόκειται σε περιορισμούς ισότητας. Γνωστά προβλήματα είναι η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας $u(x_1, ..., x_n)$ υπό τους περιορισμούς του προϋπολογισμού $\sum p_i x_i = y$ και ελαχιστοποίησης του κόστους, $c = \sum w_i x_i$, για την επίτευξη παραγωγής τάξεως y με συνάρτηση παραγωγής $f(x_1, ..., x_n)$, έτσι ώστε $f(x_1, ..., x_n) = y$. Η ακόλουθη συζήτηση περιγράφει τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας με σκοπό να αναπτυχθεί περισσότερο υλικό για σκέψη.

Ένα ενδεικτικό παράδειγμα αφορά το πρόβλημα βελτιστοποίησης ενός ατόμου. Η χρησιμότητα ενός καταναλωτή εξαρτάται από την κατανάλωση τροφής, f και ποτού, w, σύμφωνα με τον τύπο: $u(f, w) = fw$. Οι αντίστοιχες τιμές των τροφίμων και ποτών είναι p_f και p_w και το εισόδημα του καταναλωτή είναι το I. Το πρόβλημα για τον καταναλωτή είναι να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητα με την προϋπόθεση ότι δεν ξοδεύει τίποτα περισσότερο από I. Έτσι ο καταναλωτής περιορίζεται στην επιλογή αυτών των ζευγών (f, w) που ικανοποιούν την σχέση $p_f f + p_w w = I$. Αυτή η εξίσωση μπορεί επίσης να γίνει $w = \frac{I}{p_w} - (\frac{p_f}{p_w})f$ η οποία παριστάνεται από μια ευθεία που συνδέει τα w και f, με κλίση $-(\frac{p_f}{p_w})$. Βλέπε Σχήμα 1.4. Το σύνολο των ζευγών (f, w) που αποδίδουν ένα δεδομένο επίπεδο ωφέλειας $\bar{u}$ δίνεται από την εξίσωση $\bar{u} = fw$. Αυτό καθορίζει μια σχέση μεταξύ f και w, την $w = \frac{\bar{u}}{f}$, η οποία δίνει για οποιαδήποτε τιμή του f το επίπεδο w $(\frac{\bar{u}}{f})$ στο οποίο επιτυγχάνεται χρησιμότητα $\bar{u}$. Όταν $\bar{u} = 1$ τότε $fw = 1$ έτσι ώστε $w = \frac{1}{f}$, όταν $\bar{u} = 2$ τότε $fw = 2$ έτσι ώστε $w = \frac{2}{f}$ και όταν $\bar{u} = 3$ τότε $fw = 3$ έτσι ώστε $w = \frac{3}{f}$. Αυτοί οι υπολογισμοί δείχνουν ότι τα υψηλότερα επίπεδα χρησιμότητας αντιστοιχούν σε υψηλότερες καμπύλες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4. Έτσι, η υψηλότερη δυνατή χρησιμότητα επιτυγχάνεται μεταβαίνοντας στην υψηλότερη καμπύλη και στο κοινό σημείο με την εξίσωση $p_f f + p_w w = I$.

Το Σχήμα 1.5 απεικονίζει μια σειρά δυνατοτήτων όσον αφορά τις καμπύλες αδιαφορίας και τον περιορισμό του προϋπολογισμού: (α) τα



Σχήμα 1.4. Καμπύλες αδιαφορίας και βέλτιστες επιλογές



Σχήμα 1.5. Μη βέλτιστη, βέλτιστη και μη εφικτή επιλογή

εφικτά σημεία της καμπύλης αδιαφορίας δεν είναι βέλτιστα, (c) δεν υπάρχουν προσιτά σημεία που δίνουν τη χρησιμότητα $\bar{u}$, (b) αυτή είναι η μόνη πιθανή βέλτιστη κατάσταση και υπάρχει ένα μοναδικό βέλτιστο σημείο, το (f^*, w^*). Σε αυτό η κλίση της καμπύλης είναι $-\frac{w^*}{f^*}$, ενώ η κλίση της ευθείας είναι σταθερή και ίση με $-\frac{p_f}{p_w}$. Δεδομένου ότι αυτές οι κλίσεις είναι ίσες στο σημείο επαφής, προκύπτει ότι: $-\frac{w^*}{f^*} = -\frac{p_f}{p_w}$ και έτσι $p_w w^* = p_f f^*$. Το ίδιο ποσό δαπανάται για φαγητό και ποτό. Εφόσον $p_w w^* + p_f f^* = I$ και $p_w w^* = p_f f^*$, τότε $I = 2p_w w^* = 2p_f f^*$. Έτσι $w^* = \frac{I}{2p_w}$ και $f^* = \frac{I}{2p_f}$.

Από μαθηματικής πλευράς, αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως εξής. Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι μια συνάρτηση τροφίμων και ποτών $u(f, w)$. Η επιπλέον χρησιμότητα από την μικρή σε ποσότητα αύξηση του f είναι $\frac{\partial u}{\partial f}$, και ονομάζεται *οριακή χρησιμότητα* της τροφής σε επίπεδο κατανάλωσης (f, w). Ομοίως, η *οριακή χρησιμότητα* του ποτού στο επίπεδο κατανάλωσης είναι $\frac{\partial u}{\partial w}$. Εάν στο (f, w) το επίπεδο της κατανάλωσης τροφής αλλάζει κατά μικρή ποσότητα, df, ο αντίκτυπος στην χρησιμότητα είναι $\frac{\partial u}{\partial f}df$. Εάν στο (f, w) το επίπεδο κατανάλωσης τροφής και ποτού αλλάζει κατά μικρές ποσότητες, df και dw, η επίπτωση στην χρησιμότητα είναι $\frac{\partial u}{\partial f}df + \frac{\partial u}{\partial w}dw$. Αν η αλλαγή στο ζεύγος (f, w) σε $(f + df, w + dw)$ είναι τέτοια ώστε να μην υπάρχει αλλαγή στην χρησιμότητα, τότε πρέπει να ισχύει $0 = \frac{\partial u}{\partial f}df + \frac{\partial u}{\partial w}dw$. Επειδή οι οριακές χρησιμότητες είναι θετικές (περισσότερο φαγητό ή περισσότερο ποτό αυξάνει τη χρησιμότητα), αύξηση σε ένα από τα δύο πρέπει να αντισταθμίζεται από μείωση του άλλου ώστε να διατηρείται το ίδιο επίπεδο χρησιμότητας. Όταν αλλάζει το f και αλλάζει και το w ώστε να διατηρείται σταθερή η χρησιμότητα, πρέπει να ισχύει:

$$dw = -\left(\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial w}}\right)\frac{\partial u}{\partial f}df \quad \text{ή} \quad \frac{dw}{df} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial f}}{\frac{\partial u}{\partial w}}.$$

Αυτό δίνει την κλίση της καμπύλης αδιαφορίας στο (f, w). Από την προηγούμενη συζήτηση, αυτό πρέπει να ισούται με την κλίση του περιορισμού του προϋπολογισμού στο βέλτιστο σημείο όπου μεγιστοποιείται η χρησιμότητα υπό αυτόν τον περιορισμό. Έτσι, στο βέλτιστο σημείο,

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial f}}{\frac{\partial u}{\partial w}} = \frac{p_f}{p_w}.$$

Ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων ονομάζεται οριακός λόγος υποκατάστασης, οπότε στο βέλτιστο σημείο ο οριακός λόγος υποκατάστασης είναι ίσος με τον λόγο των τιμών. Ωστόσο, αυτή η διαδικασία γίνεται μόνο σε αυτό το πρόβλημα. Το κεφάλαιο αναπτύσσει συστηματικές διαδικασίες για τον εντοπισμό βέλτιστων λύσεων.

Το αρχικό μέρος του $12^{ου}$ Κεφαλαίου ασχολείται με την υπόθεση των δύο μεταβλητών, δίνοντας αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα. Στην περίπτωση δύο μόνο μεταβλητών, ο περιορισμός (υπό συνθήκες κανονικότητας) καθορίζει τη μία μεταβλητή ως συνάρτηση της άλλης, έτσι ώστε η μία μεταβλητή να μπορεί να εξαλειφθεί. Για παράδειγμα, αν ο στόχος είναι η $f(x_1, x_2)$ και ο περιορισμός είναι $g(x_1, x_2) = c$, τότε χρησιμοποιώντας τον περιορισμό για την επίλυση του x_2 ως συνάρτηση του x_1, $x_2(x_1)$, ο στόχος μπορεί να μεγιστοποιηθεί ως συνάρτηση μιας μη περιοριζόμενης μεταβλητής, $\max f(x_1, x_2(x_1))$. Η παρατήρηση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δικαιολογήσει τις συνθήκες δεύτερης τάξης. Στη συνέχεια εξετάζεται η περίπτωση των n μεταβλητών. Εδώ οι συνθήκες δεύτερης τάξης χρησιμοποιούν τον φραγμένο Εσσιανό πίνακα και τις ιδιότητες που προκύπτουν από τη θεωρία των τετραγωνικών μορφών. Η τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange ερμηνεύεται ως σκιώδης τιμή και δίνεται μια γενική έκδοση του θεωρήματος του περιβλήματος για το υπό περιορισμών πρόβλημα βελτιστοποίησης. Στη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας, οι υπολογισμοί αυτοί προσδιορίζουν τον πολλαπλασιαστή Lagrange ως την οριακή αξία του εισοδήματος. Στην περίπτωση ελαχιστοποίησης του κόστους, ο πολλαπλασιαστής Lagrange θεωρείται ότι είναι το οριακό κόστος της πρόσθετης παραγωγής. Τέλος, το κεφάλαιο αυτό εξετάζει τη βελτιστοποίηση όσον αφορά τη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης και τους περιορισμούς. Η βασική ιδέα είναι η οιωνεί-κοιλότητα (ή οιωνεί-κυρτότητα) μιας συνάρτησης. Η ιδιότητα αυτή συνδέεται με το φραγμένο Εσσιανό πίνακα και χρησιμοποιείται για να παρέχει ικανή συνθήκη για το υπό περιορισμούς ολικό μέγιστο.

Το $13^{ο}$ Κεφάλαιο εξετάζει τη βελτιστοποίηση με περιορισμούς ανισότητας. Επομένως, ο σκοπός είναι να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί μια συνάρτηση $f(x_1, ..., x_n)$ που υπόκειται σε περιορισμό $g(x_1, ..., x_n) \leq c$ ή σύνολο περιορισμών $g_k(x_1, ..., x_n) \leq c_k$, $k = 1, ..., m$. Το κεφάλαιο αρχίζει με ορισμένα προς παρακίνηση του αναγνώστη παραδείγματα. Η κεντρική ιδέα του κεφαλαίου είναι η παρατήρηση ότι η κατεύθυνση βελτίω-