

ΛΟΓΙΚΗ

Τι είναι η Λογική; Τι μελετάει και τι μας προσφέρει;

Ένας συνήθης ορισμός είναι ότι είναι ο κλάδος της φιλοσοφίας που μελετά τους νόμους και τους κανόνες της ανθρώπινης λογικής (reasoning). Αυτό δεν είναι πραγματικά σωστό. Πρώτον, γιατί η Λογική αποσχίστηκε από τη Φιλοσοφία εδώ και πολύ καιρό και είναι τώρα ένας διεπιστημονικός χώρος, σχετικός και συναφής όχι μόνο με τη Φιλοσοφία αλλά και με τα Μαθηματικά, την Επιστήμη των Υπολογιστών, την Τεχνητή Νοημοσύνη, τη Γλωσσολογία, τις Κοινωνικές Επιστήμες, ακόμα και με τα Οικονομικά. Δεύτερον, είναι πραγματικά λογική η ανθρώπινη λογική μας; Αν ίσχυε αυτό, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το πώς σκέφτεται κάποιος. Όπως έγραψε ο Emerson Pugh: «Αν ο ανθρώπινος εγκέφαλος ήταν τόσο απλός που να μπορούσαμε να τον καταλάβουμε, θα ήμασταν τόσο απλοί (απλοϊκοί) που δεν θα μπορούσαμε». Τι μας λέει η Λογική, τελικά, αν όχι πώς σκεφτόμαστε; Μας λέει πώς μπορούμε –και ιδανικά θα έπρεπε– να αιτιολογούμε με έναν συστηματικό και καλά δομημένο τρόπο ώστε εγγυημένα να αντλούμε πάντα αληθή συμπεράσματα, εφόσον χρησιμοποιούμε μόνο αληθείς υποθέσεις και εφαρμόζουμε λογικά κανόνες συλλογισμού.

Οι πρώτες πραγματείες σχετικά με τη Λογική γράφηκαν από τον Έλληνα φιλόσοφο Αριστοτέλη (384 π.Χ.-322 π.Χ.) Επρόκειτο για μια συλλογή κανόνων για τον παραγωγικό συλλογισμό που προορίζονταν να χρησιμεύσουν ως βάση για τη μελέτη κάθε κλάδου της γνώσης. Τον δέκατο έβδομο αιώνα, ο Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός Gottfried Leibniz συνέλαβε την ιδέα της χρήσης συμβόλων για να μηχανοποιήσει τη διαδικασία του παραγωγικού συλλογισμού με τον ίδιο τρόπο που ο αλγεβρικός συλλογισμός είχε μηχανοποιήσει τη διαδικασία συλλογισμού σχετικά με τους αριθμούς και τις σχέσεις τους. Η ιδέα του Leibniz πραγματοποιήθηκε τον δέκατο ένατο αιώνα από τους άγγλους μαθηματικούς George Boole και Augustus De Morgan, οι οποίοι θεμελίωσαν τη σύγχρονη συμβολική λογική.

Τι είναι μια λογική πρόταση;

«Πρώτα πρέπει να πούμε ποιο είναι το αντικείμενο της έρευνάς μας και πού ανήκει αυτή η έρευνα. Η έρευνά μας αφορά την απόδειξη και ανήκει στην αποδεικτική επιστήμη. Έπειτα πρέπει να ορίσουμε τι είναι “πρόταση”, τι είναι “όρος”» και τι είναι “συλλογισμός”, και ποιος συλλογισμός λέγεται “τέλειος” και ποιος “ατελής”... Η “πρόταση” λοιπόν είναι λόγος καταφατικός ή αποφατικός, όπου κάτι αποδίδεται σε κάτι άλλο... Αποκαλώ “όρο” το στοιχείο στο οποίο αναλύεται η πρόταση, όπως το κατηγορούμενο και αυτό επί του οποίου κάτι κατηγορείται... Ο “συλλογισμός” είναι λόγος, όπου αν τεθούν ορισμένα πράγματα, κάτι άλλο από αυτά που έχουν τεθεί ακολουθεί κατ’ ανάγκην, εξ αιτίας αυτών ακριβώς που έχουν τεθεί... Αποκαλώ “τέλειο συλλογισμό” αυτόν που δεν χρειάζεται τίποτε άλλο για να φανεί η αναγκαιότητά του» (Αριστοτέλης, «Αναλυτικά πρότερα»).

Η λογική πρόταση είναι μια δήλωση για την οποία μπορούμε να αποφανθούμε για την αλήθεια ή την αναλήθεια της και η απόφαση αυτή να είναι καθολικά αποδεκτή. Προκειμένου να γίνει αυτό, πρέπει καταρχήν να καθορισθεί ένα κριτήριο αλήθειας.

Πώς καθορίζεται ένα κριτήριο αλήθειας;

Επειδή το ζήτημα της «αλήθειας» είναι ένα πολύπλοκο φιλοσοφικό ζήτημα, θα αρκεστούμε εδώ να δώσουμε κάποια ενδεικτικά παραδείγματα.

1) Έχουμε 3 δίσκους. Οι δύο είναι ίδιου μεγέθους και ο τρίτος είναι μικρότερου μεγέθους και θέτουμε το ερώτημα «ποιος είναι διαφορετικός». Με κριτήριο το μέγεθος ο τρίτος δίσκος είναι διαφορετικός.

Αν επιπλέον οι δίσκοι είναι χρωματισμένοι και οι δύο μεγάλοι έχουν μπλε και κόκκινο χρώμα αντίστοιχα ενώ ο τρίτος είναι κόκκινος, με κριτήριο το χρώμα διαφορετικός είναι ο μεγάλος μπλε δίσκος.

2) Αν θέλουμε να αναδείξουμε «το πιο όμορφο κορίτσι» στην τάξη δεν υπάρχει κάποιο αντικειμενικό καθολικά αποδεκτό κριτήριο.

Αν όμως θέλουμε να αναδείξουμε «τον πιο καλό μαθητή», και έχουμε ορίσει την τελική βαθμολογία ως κριτήριο (αν και πρόκειται για αυθαίρετο κριτήριο, είναι εντούτοις ένα κριτήριο με το οποίο μπορούμε όλοι να συμφωνήσουμε), τότε μπορούμε να αναδείξουμε τον «πιο καλό» μαθητή.

Παραδείγματα

- (1) Έξω βρέχει. (Αυτή τη στιγμή που γράφεται η πρόταση είναι ψευδής).
- (2) Ο αριθμός 31 είναι πρώτος. Αληθής.
- (3) $x \geq 1$. Είναι αληθής ή ψευδής, ανάλογα τις τιμές που παίρνει ο x .

- (4) Μεγαλύτερος φυσικός αριθμός είναι εκείνος που έχει τα περισσότερα ψηφία. Αληθής.
- (5) $x + 1$. Δεν είναι λογική πρόταση.
- (6) Η Μαρία είναι ψηλή κοπέλα. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε, αν δεν ορίσουμε την έννοια «ψηλή» (π.χ. με ύψος μεγαλύτερο του 1,70 μ.). Συνεπώς δεν είναι λογική πρόταση.
- (7) Αυτό είναι το τελευταίο παράδειγμα στη λίστα των παραδειγμάτων. Αληθής.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπετε την αντιπαράθεση μεταξύ μιας πρότασης στη φυσική γλώσσα που δεν είναι μαθηματική πρόταση και μιας μαθηματικής πρότασης.

Δεν είναι μαθηματική πρόταση	Μαθηματική πρόταση
Πρόσθεσε 5 και στα δύο μέλη.	Προσθέτοντας 5 και στα δύο μέλη της $x - 5 = 12$, η σχέση γίνεται $x = 17$.
Ποια είναι η λύση της $2x = 24$;	Η λύση της $2x = 24$ είναι $x = 12$.

Το βασικό εργαλείο του κριτικά σκεπτόμενου ανθρώπου είναι το επιχείρημα. Στην καθημερινή ζωή το «επιχείρημα» αναφέρεται στο πλαίσιο της αντιπαράθεσης μεταξύ συνομιλητών. Στο πλαίσιο της κριτικής σκέψης ένα επιχείρημα ορίζεται ως ένα σύνολο δηλώσεων, μια από τις οποίες είναι το συμπέρασμα και οι άλλες είναι οι προκείμενες.

Τα επιχειρήματα,

- περιέχουν δηλώσεις,
- έχουν ένα συμπέρασμα. Το συμπέρασμα είναι μια δήλωση που θέλουμε να ελέγξουμε την αλήθεια της,
- έχουν τουλάχιστον μια προκείμενη.

Το πρώτο βήμα για την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος είναι να καθορίσουμε τι είδους επιχείρημα είναι. Μια πρώτη κατηγοριοποίηση είναι σε παραγωγικά ή επαγωγικά επιχειρήματα. Στα παραγωγικά επιχειρήματα η αλήθεια των προκείμενων στοχεύει στο να αποδείξει την αλήθεια του συμπεράσματος. Στα επαγωγικά επιχειρήματα η αλήθεια των προκείμενων στοχεύει στο να αποδείξει την πιθανή αλήθεια του συμπεράσματος.

Στη συνέχεια θα εστιάσουμε μόνον στα παραγωγικά επιχειρήματα.

Από τη στιγμή που έχουμε ότι ένα επιχείρημα είναι παραγωγικό, ρωτάμε αν είναι έγκυρο. Για να είναι ένα επιχείρημα έγκυρο πρέπει να υπάρχει μια πολύ ιδιαίτερη λογική σχέση μεταξύ των προκείμενων και του συμπεράσματος, έτσι ώστε

εάν οι προκειμένες είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα πρέπει να είναι αληθές. Με άλλα λόγια, ένα επιχείρημα είναι έγκυρο αν και μόνον αν είναι αδύνατο να είναι αληθείς οι προκειμένες και αναληθές το συμπέρασμα.

Σημειώστε ότι το να λέμε ότι ένα επιχείρημα είναι έγκυρο δεν είναι το ίδιο με το να λέμε ότι το συμπέρασμα είναι αληθές ή ότι το επιχείρημα έχει αληθείς προκειμένες. Ένα έγκυρο επιχείρημα σημαίνει απλά ότι ΑΝ οι προκειμένες ήταν αληθείς, θα ήταν αρκετό με απόλυτη βεβαιότητα να πούμε ότι το συμπέρασμα είναι αληθές.

Για παράδειγμα, το παρακάτω επιχείρημα είναι έγκυρο;

- Εάν τα πρόβατα πετάνε, θα αυξηθεί ο κατώτατος μισθός.
- Τα πρόβατα πετάνε.

Άρα θα αυξηθεί ο κατώτατος μισθός.

Το επιχείρημα είναι έγκυρο. Αν αληθεύουν οι δύο προκειμένες, το συμπέρασμα είναι αληθές. Παρότι, λοιπόν, το επιχείρημα είναι έγκυρο, το συμπέρασμα δεν είναι αληθές γιατί τα πρόβατα δεν πετάνε.

Δείτε τώρα το εξής επιχείρημα:

- Όλοι οι σκύλοι είναι θηλαστικά.
- Ο Ρίνγκο είναι θηλαστικό.

Άρα ο Ρίνγκο είναι σκύλος.

Σε αυτή την περίπτωση οι προκειμένες είναι αληθείς και το συμπέρασμα είναι αληθές.

Το ερώτημα είναι αν οι αληθείς προκειμένες μας εγγυώνται ένα αληθές συμπέρασμα. Η απάντηση είναι όχι, γιατί ο Ρίνγκο θα μπορούσε να είναι γάτα. Άρα το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο. Οι δύο προκειμένες δεν αποδεικνύουν την αλήθεια του συμπεράσματος.

Τα δύο αυτά παραδείγματα μας λένε ότι ένα παραγωγικό επιχείρημα μπορεί να αποτύχει για δύο λόγους. Είτε γιατί δεν είναι έγκυρο, είτε γιατί δεν είναι αληθής μια τουλάχιστον από τις προκειμένες, ή και τα δύο.

Αν ένα επιχείρημα είναι έγκυρο και έχει όλες τις προκειμένες αληθείς, τότε έχουμε ένα «ισχυρό» επιχείρημα (sound argument).

Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι ένα επιχείρημα δεν είναι έγκυρο είναι μέσω ενός αντιπαδείγματος. Το προηγούμενο επιχείρημα. (Όλοι οι σκύλοι είναι θηλαστικά...) είναι ένα αντιπαράδειγμα, γιατί οι προκειμένες είναι αληθείς και το συμπέρασμα θα μπορούσε να μην είναι αληθές.

Στη συνέχεια θα δούμε κάποια δομημένα λογικά συστήματα. Το πρώτο είναι η κατηγορική λογική.

Α) Ψηφίδες ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Η κατηγορική λογική έχει τις ρίζες της στον Αριστοτέλη. Είναι μια λογική κατηγοριών ή κλάσεων. Μια κλάση είναι μια ομάδα πραγμάτων με ένα κοινό χαρακτηριστικό. Μπορούμε, δηλαδή, να αποφανθούμε με βεβαιότητα αν ένα στοιχείο/αντικείμενο ανήκει ή όχι σε μια κλάση (π.χ. μαθητές, δάσκαλοι, πρόβατα κ.λπ.). Κάθε πρόταση, χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές κλάσεις. Η μια είναι το κατηγορούμενο (subject class) και η άλλη το κατηγορήμα (predicate class). Σε αυτό το είδος της λογικής μπορούμε να πούμε κάτι για όλα τα στοιχεία της κλάσης (universal sentence) ή για κάποια στοιχεία της κλάσης (particular sentence). Μπορούμε να κάνουμε μια θετική δήλωση (affirmation) ή μια αρνητική (negation).

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις δύο διακρίσεις έχουμε 4 είδη δηλώσεων που συμβολίζονται με τα γράμματα A, I, E, O για να δηλώσουμε αν τα μέλη μιας κλάσης/κατηγορίας πραγμάτων περιλαμβάνονται ή όχι σε μια άλλη κατηγορία πραγμάτων (: κατηγορικές δηλώσεις).

- (A) Καθολικά αποφατική (Universal affirmative): Όλα τα S είναι P.
- (I) Μερικά αποφατική (Particular affirmative): Μερικά S είναι P.
- (E) Καθολικά αρνητική (Universal negative): Κανένα S δεν είναι P.
- (O) Μερικά αρνητική (Particular negative): Μερικά S δεν είναι P.
(S είναι το κατηγορούμενο και P το κατηγορήμα).

Παραδείγματα

(A): Καθολικά αποφατική: Όλα τα όντα που είναι ψάρια είναι όντα που κολυμπάνε ή πιο απλά: Όλα τα ψάρια κολυμπάνε.

Να σημειώσουμε 2 πράγματα:

1. Δεν λέμε ότι μόνον τα ψάρια κολυμπάνε. Αυτή η δήλωσή μας δεν αποκλείει ότι και άλλα πράγματα κολυμπάνε π.χ. οι σκύλοι.
2. Η δήλωση «όλα τα ψάρια κολυμπάνε», μπορεί να διατυπωθεί με διαφορετικούς τρόπους. Ενδεικτικά:
 - Κάθε ψάρι κολυμπάει.
 - Οτιδήποτε είναι ψάρι κολυμπάει.
 - Δεν μπορεί κάτι να είναι ψάρι, αν δεν κολυμπάει.

(I): Μερικά αποφατική: Μερικοί σκύλοι είναι μαύροι.

Αυτή η δήλωση μπορεί να διατυπωθεί και με άλλους τρόπους. Ενδεικτικά:

- Τουλάχιστον ένας σκύλος είναι μαύρος.
- Υπάρχουν σκύλοι που είναι μαύροι.
- Μερικά μαύρα όντα είναι σκύλοι.

(E): **Καθολικά αρνητική**: Κανένας άνθρωπος δεν ζει περισσότερο από 200 χρόνια.

Αυτή η δήλωση μπορεί να διατυπωθεί και με άλλους τρόπους. Ενδεικτικά:

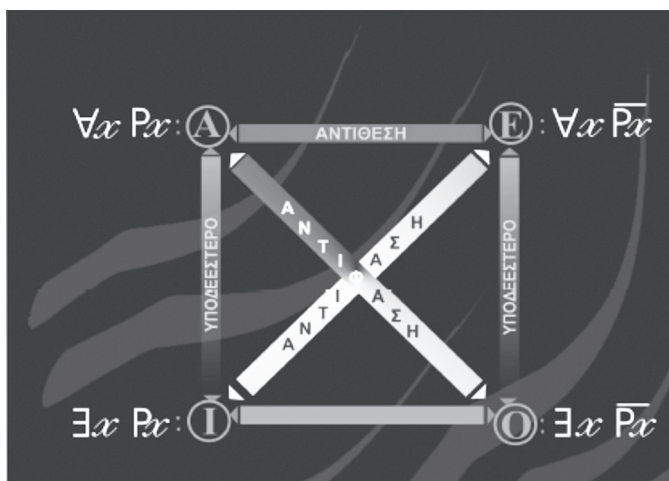
- Όλοι οι άνθρωποι είναι όντα που δεν ζουν περισσότερο από 200 χρόνια.
- Δεν υπάρχουν άνθρωποι με ηλικία μεγαλύτερη από 200 χρόνια.
- Όλα τα όντα με ηλικία πάνω από 200 χρόνια δεν είναι άνθρωποι.

(O): **Μερικά αρνητική**: Μερικά φλιτζάνια δεν είναι γυάλινα

Αυτή η δήλωση μπορεί να διατυπωθεί και με άλλους τρόπους. Ενδεικτικά:

- Τουλάχιστον ένα φλυτζάνι, δεν είναι γυάλινο.
- Δεν είναι όλα τα φλυτζάνια γυάλινα.

ΤΟ ΛΟΓΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ (Square of Opposition)



(Η εικόνα είναι μια από τις αφίσες της Εστίας Επιστημών Πάτρας).

Το Λογικό Τετράγωνο (ή Τετράγωνο Αντίθεσης) είναι ένα διάγραμμα που απεικονίζει τις σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων βασικών κατηγορηματικών προτάσεων. Η προέλευση του τετραγώνου μπορεί να αναχθεί στον Αριστοτέλη, ο οποίος κάνει τη διάκριση μεταξύ δύο αντιθέσεων: της αντίφασης και της εναντιότητας/αντίθεσης.

(A) Καθολικά αποφατική (Universal affirmative): Όλα τα A είναι B.

(I) Μερικά αποφατική (Particular affirmative): Μερικά A είναι B.

(E) Καθολικά αρνητική (Universal negative): Κανένα A δεν είναι B.

(O) Μερικά αρνητική (Particular negative): Μερικά A δεν είναι B.

ΑΝΤΙΘΕΣΗ/ΕΝΑΝΤΙΩΣΗ: Δεν μπορούν και οι δύο δηλώσεις να είναι αληθείς.

ΥΠΟ-ΕΝΑΝΤΙΩΣΗ (Subcontrary): Δεν μπορούν και οι δύο δηλώσεις να είναι ψευδείς.

ΥΠΟΔΕΕΣΤΕΡΟ:

1. Η αλήθεια «ρέει» προς τα κάτω, αλλά όχι προς τα πάνω.

► (Αριστερά, A-I): Αν A αληθής (δήλωση), τότε η I πρέπει να είναι αληθής.

Για παράδειγμα, «Αν όλα τα κοράλλια είναι ζωντανοί οργανισμοί» αληθεύει, τότε αληθεύει και το ότι «Μερικά κοράλλια είναι ζωντανοί οργανισμοί». Αν όμως η I είναι αληθής δεν είναι απαραίτητο να είναι και η A. Για παράδειγμα, αν η δήλωση «Μερικοί σκύλοι είναι μαύροι» είναι αληθής, η δήλωση «Όλοι οι σκύλοι είναι μαύροι» δεν είναι αληθής.

► (Δεξιά, E-O): Αν E αληθής, τότε και η O αληθής.

Για παράδειγμα, αν η δήλωση «Καμία νύχτα δεν διαρκεί για πάντα» είναι αληθής, θα είναι αληθής και η δήλωση «Μερικές νύχτες δεν διαρκούν για πάντα».

2. Η μη-αλήθεια «ρέει» προς τα πάνω».

► (Αριστερά, I-A): Το γεγονός ότι η I είναι αληθής, δεν μας βοηθά να προβλέψουμε αν η A είναι αληθής ή όχι.

Αν όμως η I είναι ψευδής, σίγουρα θα είναι ψευδής και η A.

Για παράδειγμα το ότι «Μερικοί σκύλοι γεννούν γατάκια» είναι ψευδής, δεν μπορεί με κανένα τρόπο να κάνει αληθή τη δήλωση «Όλοι οι σκύλοι γεννούν γατάκια». Αν I ψευδής και η A ψευδής.

► Δεξιά (O-E): Το γεγονός ότι η O είναι αληθής, δεν μας βοηθά να προβλέψουμε αν η E είναι αληθής ή όχι.

Αν όμως η O είναι ψευδής, σίγουρα θα είναι ψευδής και η E. Για παράδειγμα το ότι η δήλωση «Κάποιες σαρδέλες δεν είναι ψάρια» είναι ψευδής, κάνει τη δήλωση «Δεν είναι κάθε σαρδέλα ψάρι» επίσης ψευδή.

Ας διατρέξουμε, τώρα, συνολικά το τετράγωνο.

Έστω ότι A αληθής. Τότε η O από αντίφαση είναι ψευδής. Τα υποδεέστερα I και O δεν μπορούν και τα δύο να είναι ψευδή, οπότε η I είναι αληθής. Αυτό προκύπτει και από το ότι «η αλήθεια ρέει προς τα κάτω». Η E είναι αντιφατική της I. Και αφού η I είναι αληθής, η E είναι ψευδής.

Δοκιμάστε το με A: «Όλες οι αστραπές είναι ηλεκτρικές εκκενώσεις».

Έστω ότι η Α είναι ψευδής. Τότε η Ο πρέπει να είναι αληθής. Δεν μπορούμε, όμως, να πούμε τίποτα για την Ι. Ξέρουμε ότι οι Ι και Ο δεν μπορούν να είναι και οι δύο ψευδείς, αλλά όταν η μια είναι αληθής, δεν ξέρουμε τίποτα για την άλλη. Και επειδή «η αλήθεια δεν ρέει προς τα πάνω», δεν μπορούμε να πούμε τίποτα για την Ε. Οι Α και Ε δεν μπορούν να είναι και οι δύο αληθείς, αλλά μπορεί να είναι και οι δύο ψευδείς.

Δοκιμάστε το με Α: «Όλοι οι σκύλοι είναι γάτες».

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΙΔΕΑ

Ένας συλλογισμός είναι ένα επιχείρημα που αποτελείται από δύο προκείμενες και ένα συμπέρασμα. Χρησιμοποιώντας τις 4 μορφές κατηγορικών δηλώσεων που είδαμε προηγουμένως μπορούμε να έχουμε 256 διαφορετικούς συλλογισμούς, από τους οποίους μόνον οι 15 είναι έγκυροι.

Είναι απαραίτητο να κάνουμε μια διάκριση μεταξύ εγκυρότητας και αλήθειας. Για να είναι ένα συμπέρασμα αναγκαστικά αληθές ως συνέπεια των προκείμενων, πρέπει να υφίστανται δύο προϋποθέσεις: Οι προκείμενες να είναι αληθείς και η μορφή του συλλογισμού να είναι έγκυρη.

Παράδειγμα

1. Είμαι άνθρωπος.
2. Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.

Το συμπέρασμα που προκύπτει αναγκαστικά είναι ότι είμαι θνητή.

Δείτε τώρα το εξής παράδειγμα:

1. Μερικά φρούτα έχουν σπόρια.
2. Τα μήλα είναι φρούτα.

Άρα τα μήλα έχουν σπόρια.

Τον δέχεστε αυτόν το συλλογισμό; Οι προκείμενες είναι αληθείς, και το συμπέρασμα επίσης. Αλλά το συμπέρασμα δεν είναι αληθές λόγω της δομής των προκείμενων.

Δείτε τι συμβαίνει με μια μικρή αλλαγή, που δεν αλλάζει όμως τη δομή του συλλογισμού.

1. Μερικά φρούτα έχουν σπόρια.
2. Οι μπανάνες είναι φρούτα.

Άρα οι μπανάνες έχουν σπόρια.

Οι προκείμενες είναι αληθείς, αλλά όχι το συμπέρασμα. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε έναν **μη έγκυρο συλλογισμό**.

Δείτε τώρα τον εξής συλλογισμό.

1. Όλα τα πορτοκάλια είναι στρογγυλά.
2. Αυτό το αντικείμενο είναι πορτοκάλι.

Άρα αυτό το αντικείμενο πρέπει να είναι στρογγυλό.

Οι προκείμενες είναι αληθείς και η δομή του συλλογισμού είναι τέτοια που μας επιτρέπει να καταλήξουμε σε ένα αληθές συμπέρασμα. Οι αληθείς προκείμενες και η έγκυρη δομή τους μας οδηγούν σε έγκυρο συλλογισμό.

Αν όμως λέγαμε

1. Όλα τα πορτοκάλια είναι στρογγυλά.
2. Είμαι πορτοκάλι.

Άρα είμαι στρογγυλή.

Ο συλλογισμός είναι έγκυρος αλλά το συμπέρασμα δεν είναι αληθές, γιατί μια από τις δύο προκείμενες δεν ήταν αληθής.

Από τους 15 έγκυρους συλλογισμούς, θα αναφερθούμε μόνον σε 4 τύπους συλλογισμών. Θα χρησιμοποιήσουμε τον γενικό συμβολισμό A, B και C και όχι συγκεκριμένα αντικείμενα ή ονόματα, γιατί αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να είναι έγκυρος ο συλλογισμός μας και όχι το αν είναι αληθές ή όχι το συμπέρασμα.

Τύπος 1:

- Όλα τα A είναι B.
- Το C είναι A.

Άρα το C είναι B.

- Όλες οι αντίκες είναι πάνω από 100 ετών.
- Αυτή η καρέκλα είναι αντίκα.

Άρα αυτή η καρέκλα είναι πάνω από 100 ετών.

Μπορούμε να αναφερθούμε σε ένα ή όλα τα C.

- Όλα τα A είναι B.
- Όλα τα C είναι A.

Άρα όλα τα C είναι B.

Τύπος 2:

- Το A είναι B.
- Κανένα B δεν είναι C.

Άρα το A δεν είναι C.

Παράδειγμα

- Όλες οι σαύρες είναι ερπετά.
- Κανένα ερπετό δεν είναι θερμόαιμο.
- Άρα, καμία σαύρα δεν είναι θερμόαιμη.

- Όλα τα A είναι B.
- Κανένα B δεν είναι C.
- Άρα, κανένα A δεν είναι C.

Προφανώς αυτός και γενικά όλοι οι συλλογισμοί είναι λογικά ισοδύναμοι με τα αντιθετοαντίστροφά τους. Δηλαδή θα μπορούσαμε να γράψουμε τον εξής έγκυρο συλλογισμό:

- Το A είναι B.
- Κανένα C δεν είναι B.
- Άρα, το A δεν είναι C.

Τύπος 3:

- Όλα τα A είναι B.
- Μερικά A είναι C.
- Άρα, μερικά C είναι B.

- Όλες οι διαφημίσεις τσιγάρων συνεισφέρουν στον εθισμό.
- Ορισμένες διαφημίσεις τσιγάρων είναι διαφημίσεις που απευθύνονται στους έφηβους.

Άρα, μερικές διαφημίσεις τσιγάρων που απευθύνονται στους έφηβους συνεισφέρουν στον εθισμό.

- Όλα τα A είναι B.
- Μερικά A είναι C.
- Άρα, μερικά C είναι B.

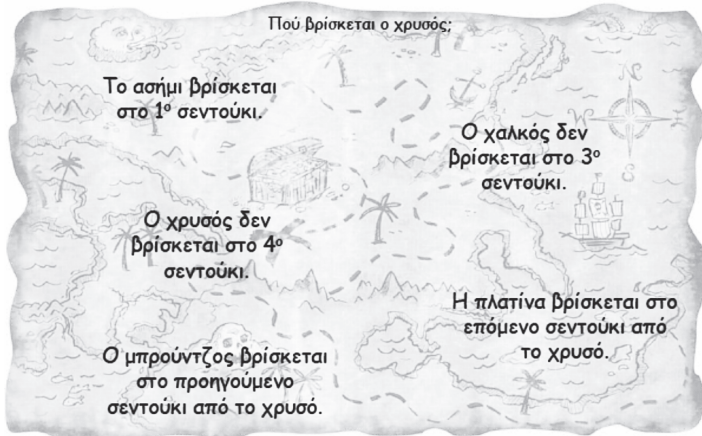
Τύπος 4:

- Όλα τα A είναι B.
- Μερικά C δεν είναι B.
- Άρα, κάποια C δεν είναι A.

- Όλοι οι άνθρωποι ξέρουν να ξεχωρίζουν το σωστό απ' το λάθος.
- Κάποια όντα δεν ξέρουν να ξεχωρίζουν το σωστό απ' το λάθος.
- Άρα, κάποια όντα δεν είναι άνθρωποι.

Απαντήστε στους παρακάτω λογικούς γρίφους. (Πηγή: *Εστία Επιστημών Πάτρας*)

1) Βρείτε το θησαυρό.



Το αίνιγμα της Αλίκης στη Χώρα των Θαυμάτων

Π1: Τα ζώα νιώθουν τρομερά ενοχλημένα όταν δεν τους δίνω σημασία

Π2: Τα δικά μου ζώα βρίσκονται στο λιβάδι

Π3: Ένα ζώο δεν μπορεί να λύσει ένα αίνιγμα εάν δεν έχει μορφωθεί καλά στο σχολείο

Π4: Ανάμεσα στα ζώα που βρίσκονται στο λιβάδι δεν υπάρχει κάποιο κουνάβι

Π5: Όταν ένα ζώο νιώθει τρομερά ενοχλημένο τρέχει ουρλιάζοντας προς κάθε κατεύθυνση

Π6: Δεν δίνω σημασία στα ζώα εκτός από τα δικά μου

Π7: Όταν ένα ζώο έχει μορφωθεί καλά στο σχολείο δεν τρέχει ουρλιάζοντας προς κάθε κατεύθυνση

Αυτές οι επτά φράσεις οδηγούν σε ένα συμπέρασμα: ποιο είναι αυτό;



Β) Ψηφίδες ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Η κατηγορική λογική μας βοηθά να αναλύουμε επιχειρήματα, αλλά μόνον συγκεκριμένους τύπους επιχειρημάτων. Περιορίζεται σε επιχειρήματα που έχουν 2 μόνον προκειμένες και 4 είδη κατηγορικών δηλώσεων (Α, Ι, Ε, Ο).

Αυτό σημαίνει ότι κάποια επιχειρήματα που είναι έγκυρα δεν μπορούν να διατυπωθούν με τη δομή μιας κατηγορικής δήλωσης.

Για παράδειγμα:

1. Θα βγω έξω είτε για δείπνο σήμερα το βράδυ, είτε για καφέ αύριο το πρωί.
 2. Δεν θα βγω για δείπνο σήμερα το βράδυ.
- Θα βγω για καφέ αύριο το πρωί.

Η βασική λογική μονάδα στην κατηγορική λογική είναι η κατηγορία/κλάση. Η βασική λογική μονάδα στην προτασιακή λογική είναι η δήλωση ή πρόταση. Είδαμε τι είναι μια πρόταση στην αρχή του κεφαλαίου.

Κάθε δήλωση/πρόταση στην προτασιακή λογική συμβολίζεται με τα γράμματα p, q, r, s , κ.λπ. ή τα κεφαλαία τους $P, Q, R, S, \dots$ που συνδέονται με λογικούς συνδέσμους. Κάθε μεταβλητή μπορεί να πάρει ΜΟΝΟΝ δύο τιμές: Αληθής/Ψευδής.

Αποφανθείτε για τις παρακάτω προτάσεις αν είναι αληθείς ή ψευδείς

- S: Κάθε άρτιος ακέραιος είναι πραγματικός.
- Q: Κάθε πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού έχει n ρίζες.
- P: Αν ένας ακέραιος x είναι πολλαπλάσιο του 6, τότε ο x είναι άρτιος.
- R: Ο ακέραιος x είναι άρτιος.
- F: Για όλους τους φυσικούς a, b, c με $n > 2$, ισχύει ότι $a^n + b^n \neq c^n$.
- G: Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων.

Σχόλια

Η πρόταση R μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής, ανάλογα την τιμή του x . Σε αυτήν την περίπτωση η R δεν είναι πρόταση/δήλωση, είναι μια «ανοικτή πρόταση».

Η P είναι πάντα αληθής γιατί οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του 6 έχει τη μορφή $(2 \cdot 3) \cdot \kappa = 2 \cdot (3 \cdot \kappa)$ όπου κ είναι κάποιος ακέραιος.

Η πρόταση F είναι μια διάσημη πρόταση, «ανοικτή» για περισσότερα από 300 χρόνια. Την ξέρουμε ως το θεώρημα του Fermat (1601-1665). Το 1993 ο νεαρός μαθηματικός Andrew Wiles (1953), απέδειξε ότι είναι αληθής. Η απόδειξη είναι περίπου 100 σελίδες.

Η πρόταση G από την εποχή που την διατύπωσε ο Goldbach (1690-1764), το 1742, σε ένα γράμμα που έστειλε στον Euler (διακρίνουμε την εφαρμογή της εικασίας στους αριθμούς $4 = 2 + 2$, $5 = 2 + 3$), παραμένει απλή εικασία, δηλαδή «ανοικτή» πρόταση.

Όταν μια πρόταση περιέχει μια μεταβλητή x , τη συμβολίζουμε $P(x)$.

Λογικές πράξεις: ΚΑΙ, Η, ΟΧΙ

1) ΚΑΙ (AND): $P \wedge Q$. Διαβάζεται: « P και Q ».

Παράδειγμα

R : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος και ο αριθμός 3 είναι περιττός.

Η πρόταση R είναι μια σύνθετη πρόταση που αποτελείται από δύο απλούστερες, οι οποίες συνδέονται με το σύνδεσμο «και».

P : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος

Q : Ο αριθμός 3 είναι περιττός

Η πρόταση $P \wedge Q$ είναι αληθής αν και οι δύο προτάσεις p και q είναι αληθείς.

Αυτή η λογική πράξη ονομάζεται επίσης λογική σύζευξη.

Στον παρακάτω πίνακα το T συμβολίζει το «αληθής» και το F το «ψευδής».

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2) Η (OR): $P \vee Q$. Διαβάζεται «P ή Q».

Η πρόταση $P \vee Q$ είναι αληθής, αν τουλάχιστον μια από τις P ή Q είναι αληθής. Αυτό ο λογικός σύνδεσμος ονομάζεται επίσης **λογική διάζευξη**.

Παράδειγμα

R_1 : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος ή ο αριθμός 3 είναι περιττός.

R_2 : Ο αριθμός 3 είναι άρτιος ή ο αριθμός 2 είναι περιττός.

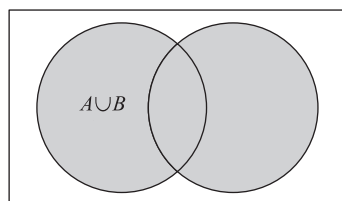
R_3 : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος ή ο αριθμός 4 είναι περιττός.

Η πρώτη και τρίτη πρόταση είναι αληθείς, ενώ η δεύτερη ψευδής.

Το νόημα του «ή» στη μαθηματική λογική διαφέρει από αυτό της καθημερινής ζωής.

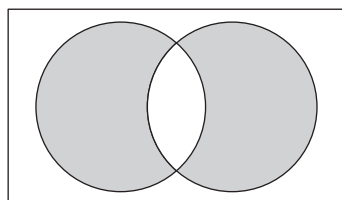
Στην καθημερινή ζωή το «ή» συνήθως σημαίνει αποκλειστικά το ένα ή το άλλο, ενώ στη μαθηματική λογική σημαίνει «το ένα ή το άλλο ή και τα δύο».

P	Q	$P \vee Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F



Αποκλειστική διάζευξη έχουμε όταν **μόνο μια** από τις προτάσεις P, Q πρέπει να είναι αληθής ή ψευδής.

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F



• OXI (NOT): $\neg P$ ή «~ P». Διαβάζεται: «όχι P».

Η πρόταση $\sim P$ είναι αληθής, αν και μόνον αν η P είναι ψευδής.

Αυτός ο λογικός σύνδεσμος ονομάζεται επίσης άρνηση.

P	$Q \neg P$
T	F
F	T

• **Λογική συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$. Διαβάζεται: Αν P τότε (συνεπάγεται) Q**

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Οι δύο τελευταίες γραμμές του πίνακα φαίνεται να είναι κάπως προβληματικές.

Ας υποθέσουμε ότι P: Παίρνεις άριστα στις εξετάσεις και Q: Σου δίνω 50 ευρώ.

Η πρόταση «Αν πάρεις άριστα στις εξετάσεις, θα σου δώσω 50 ευρώ» είναι αληθής αν τηρήσω την υπόσχεσή μου (πρώτη γραμμή του πίνακα) και ψευδής αν δεν την τηρήσω (δεύτερη γραμμή του πίνακα).

Τι θα συμβεί αν δεν πάρεις άριστα; Είτε σου δώσω είτε δεν σου δώσω 50 ευρώ, δεν αθέτησα την υπόσχεσή μου. Οπότε η συνεπαγωγή είναι αληθής.

Ας δούμε ένα δεύτερο παράδειγμα

	Αυτός ο μήνας είναι Σεπτέμβρης	Υπάρχει μια ισημερία αυτό το μήνα	Αν είναι Σεπτέμβρης υπάρχει μια ισημερία
Σεπτέμβρης	T	T	T
Μάρτης	F	T	T
Μάης	F	F	T

Το ότι το Σεπτέμβρη θα υπάρχει ισημερία είναι αληθές, οποιεσδήποτε κι αν είναι οι συνθήκες (εκτός αν καταστραφεί η γη).

Ένα δεύτερο παράδειγμα:

$$-1 = 1 \rightarrow (-1)^2 = 1^2 \rightarrow 1 = 1$$

- Λογική ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$. Διαβάζεται P τότε και μόνον τότε αν Q

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Παράδειγμα: Ο a είναι άρτιος $\Leftrightarrow$ Ο a διαιρείται με το 2.

Ταυτολογία είναι μια πρόταση που είναι πάντα αληθής

Για παράδειγμα $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Το αντίθετο της ταυτολογίας, δηλαδή όταν μια πρόταση είναι πάντα λάθος λέγεται αντίφαση (contadiction).

Δύο προτάσεις P, Q είναι λογικά ισοδύναμες αν η $P \Leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$\sim P$	$\sim P \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Πίνακες αλήθειας

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

Ασκήσεις

- 1) Μεταφράστε στη φυσική γλώσσα την παρακάτω σύνθετη πρόταση και φτιάξτε τον πίνακα αλήθειας της

$$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$$

Απάντηση

«Από τις προτάσεις P, Q η μια είναι αληθής και δεν υπάρχει περίπτωση και οι δύο να είναι αληθείς».

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \sim Q)$	$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	F

- 2) Κατασκευάστε τον πίνακα αλήθειας για την $\sim P \wedge (P \Rightarrow Q)$

P	Q	$\sim P$	$P \Rightarrow Q$	$\sim P \wedge (P \Rightarrow Q)$
T	T	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

3) Δύο πολύ γνωστοί λογικοί «νόμοι» είναι οι νόμοι του De Morgan (1806-1871)

$$1. \sim (P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q)$$

$$2. \sim (P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$$

Διαβάστε τους στη φυσική γλώσσα και αποδείξτε τους.

Απάντηση

«Αν δύο προτάσεις δεν είναι και οι δύο αληθείς, τότε σίγουρα η μια από τις δύο θα είναι ψευδής».

Φτιάχνουμε τον πίνακα αλήθειας

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim (P \wedge Q)$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Παρακάτω, παραθέτουμε κάποιες πολύ σημαντικές λογικές ισοδυναμίες

$$P \Rightarrow Q = (\sim Q) \Rightarrow (\sim P) \quad \text{— Νόμος αντιθετοαντιστροφής}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sim (P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q \\ \sim (P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q \end{array} \right\} \quad \text{— Νόμοι De Morgan}$$

$$\left. \begin{array}{l} P \wedge Q = Q \wedge P \\ P \vee Q = Q \vee P \end{array} \right\} \quad \text{— Αντιμεταθετικοί νόμοι}$$

$$\left. \begin{array}{l} P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{array} \right\} \quad \text{— Επιμεριστικοί νόμοι}$$

$$\left. \begin{array}{l} P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge R \end{array} \right\} \quad \text{— Προσεταιριστικοί νόμοι}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΙΔΕΑ

Υπάρχει μια άμεση σχέση μεταξύ των συνόλων και της λογικής.

Επιγραμματικά

Ένωση συνόλων:

$$\forall A, \forall B, \forall x, (x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B))$$

Τομή συνόλων:

$$\forall A, \forall B, \forall x, (x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))$$

Συμπλήρωμα συνόλου

$$\forall A, \forall B, \forall x, (x \in A' \Leftrightarrow \neg x \in A)$$

Σχέση εγκλεισμού (σύνολα)-Συνεπαγωγή (λογική)

$$\forall A, \forall B, (A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B))$$

Ισότητα (σύνολα)-Ισοδυναμία λογική

$$\forall A, \forall B, (A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B))$$

Εάν A είναι ένα σύνολο, τότε η πρόταση $P(x) = \langle x \in A \rangle$ είναι αληθής για στοιχεία x που ανήκουν στο A και ψευδής διαφορετικά. Αντίστροφα, αν μας δοθεί μια πρόταση $Q(x)$, μπορούμε να σχηματίσουμε ένα σύνολο που την καθιστά αληθή και το συμβολίζουμε $\{x: Q(x)\}$ ή $\{x \mid Q(x)\}$.

Μπορούμε να αποδείξουμε σχέσεις μεταξύ των συνόλων στηριζόμενοι σε κανόνες της λογικής.

Παράδειγμα 1

Έστω τα σύνολα A , B και C . Αποδείξτε ότι

- a) $A \cap B \subseteq A$,
- b) $A \subseteq A \cup B$,
- c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Απόδειξη

Έστω οι προτάσεις $P(x) = \langle x \in A \rangle$, $Q(x) = \langle x \in B \rangle$, $R(x) = \langle x \in C \rangle$.

Για να αποδείξουμε το (a), θεωρούμε ένα $a \in A \cap B$. Τότε εξ ορισμού, $P(a) \wedge Q(a)$ είναι αληθής.

Επειδή η $P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x)$ είναι ταυτολογία, η $P(a)$ είναι αληθής, ή $a \in A$. Αυτό αποδεικνύει ότι $A \cap B \subseteq A$.

Όμοια η σχέση (c) προκύπτει επειδή

$$P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x)) \Leftrightarrow (P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x)) \text{ είναι ταυτολογία.}$$

Το ίδιο και στις άλλες περιπτώσεις.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΙΔΕΑ

Οι όροι «ικανή» και «αναγκαία» συνθήκη.
Έστω δύο προτάσεις S : « X είναι θηλαστικό» και N : « X είναι σκύλος».

Η (αλήθεια της) S είναι αναγκαία συνθήκη για την (αλήθεια της) N , διότι η S ΠΡΕΠΕΙ να είναι αληθής για να είναι αληθής η N . Δηλαδή είναι αναγκαίο το ζώο να είναι θηλαστικό για να μπορέσουμε να εξετάσουμε το ενδεχόμενο να είναι σκύλος.

Όταν λέμε ότι η S είναι αναγκαία συνθήκη για την N , εννοούμε ότι αν δεν έχουμε την S δεν θα έχουμε την N . Αυτό όμως ΔΕΝ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ότι αν έχουμε την S μας διασφαλίζει ότι θα έχουμε την N .

Όταν λέμε ότι μια συνθήκη S είναι ικανή συνθήκη για την N , εννοούμε ότι αν έχουμε την S σίγουρα θα έχουμε τη N . Κάτι που δεν συμβαίνει στο παράδειγμά μας.

Στο παράδειγμά μας, η αλήθεια της S δεν είναι ικανή συνθήκη για την αλήθεια της N , δηλαδή για να ξέρουμε ότι η N είναι αληθής δεν είναι αρκετό να ξέρουμε ότι η S είναι αληθής. Δεν είναι αρκετό να ξέρουμε ότι το X είναι θηλαστικό για να είναι σκύλος. Υπάρχουν πολλά θηλαστικά που δεν είναι σκύλοι.

Αλλά η αλήθεια της N είναι ικανή συνθήκη για την S . Διότι, εάν ξέρουμε ότι το X είναι σκύλος, σίγουρα θα είναι θηλαστικό.

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη απαιτεί και τις δύο συνεπαγωγές:

$$S \Rightarrow N \text{ και } N \Rightarrow S.$$

Η πρώτη δηλώνει ότι η S είναι ικανή συνθήκη για την N και η δεύτερη ότι η S είναι αναγκαία συνθήκη για τη N .

Αυτό διατυπώνεται με την έκφραση «ικανή και αναγκαία συνθήκη» ή « S αν και μόνον αν N » ή $S \Leftrightarrow N$.

S	N	$S \Rightarrow N$	$S \Leftarrow N$	$S \Leftrightarrow N$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T