Πρόλογος

Ένα μάθημα στις διακριτές δομές (διακριτά μαθηματικά) συνέβαλε καθοριστικά στο Πρόγραμμα Σπουδών 68, που ήταν ο πρώτος οδηγός της ACM (Association for Computing Machinery) για προγράμματα σπουδών επιστήμης υπολογιστών: «Το μάθημα αυτό εισάγει τον φοιτητή σε εκείνες τις θεμελιώδεις αλγεβρικές, λογικές και συνδυαστικές έννοιες των μαθηματικών που απαιτούνται σε μαθήματα που έπονται σε ένα πρόγραμμα σπουδών της επιστήμης υπολογιστών και παρουσιάζει τις εφαρμογές των εννοιών αυτών σε διάφορες περιοχές της επιστήμης υπολογιστών».[1] Έπειτα από 45 περίπου χρόνια (παρά τη μεσολάβηση τεχνολογιών όπως φορητοί υπολογιστές, ασύρματα δικτύα, ρομποτική, εικονική πραγματικότητα, τρισδιάστατα γραφικά, το διαδίκτυο κ.λπ.), οι διακριτές δομές παραμένουν ακόμα θεμελιώδους σημασίας στον συλλογικό ACM/IEEE-CS Οδηγό Προγράμματος Σπουδών 2013 της Επιστήμης Υπολογιστών. «Το υλικό των διακριτών δομών διαχέεται στις περιοχές των δομών δεδομένων και των αλγορίθμων αλλά εμφανίζεται επίσης και σε άλλες περιοχές της επιστήμης υπολογιστών. Για παράδειγμα, η ικανότητα δημιουργίας και κατανόησης μιας απόδειξης, είτε πρόκειται για μια τυπική συμβολική απόδειξη είτε για ένα λιγότερο τυπικό αλλά μαθηματικά αυστηρό επιχείρημα, είναι σημαντική πρακτικά σε κάθε περιοχή της επιστήμης υπολογιστών, όπως (απλά για να αναφέρουμε μερικές) είναι οι τυπικές προδιαγραφές, η επαλήθευση, οι βάσεις δεδομένων και η κρυπτογραφία. Οι έννοιες της θεωρίας γραφημάτων χρησιμοποιούνται στα κυκλώματα, στα λειτουργικά συστήματα και τους μεταγλωττιστές. Οι έννοιες της θεωρίας συνόλων χρησιμοποιούνται στη μηχανική λογισμικού και στις βάσεις δεδομένων. Η θεωρία πιθανοτήτων χρησιμοποιείται στα έξυπνα συστήματα, στα δίκτυα και σε πολλές υπολογιστικές εφαρμογές.»[2]

Η παρούσα έβδομη έκδοση καθοδηγήθηκε από τον Οδηγό Προγράμματος Σπουδών του 2013 και περιλαμβάνει όλα τα θέματα των Core Tier 1 και Tier 2 για τις διακριτές δομές από εκείνο το έγγραφο. Καλύπτοντας όλα εκείνα τα θέματα μπορούμε να καλύψουμε πλήρως ένα μάθημα ενός εξαμήνου, αλλά σίγουρα υπάρχει αρκετό υλικό στην έκδοση αυτή που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για ένα αξιοπρεπές μάθημα δύο εξαμήνων.

Ωστόσο, παρόλο που εμείς οι διδάσκοντες αντιλαμβανόμαστε την αξία του εν λόγω θεμελιώδους μαθήματος, αυτό αποτελεί μια δύσκολη εμπειρία για πολλούς φοιτητές οι οποίοι συχνά το βλέπουν ως μια σειρά ασύνδετων αντικειμένων με ελάχιστη ή καθόλου εφαρμογή στα υπόλοιπα πεδία που έχουν επιλέξει. Κοιτάζοντας τη μεγάλη εικόνα, τα αντικείμενα αυτά συνδέονται μεταξύ τους με θέματα όπως

- η σημασία της λογικής σκέψης
- η ισχύς του μαθηματικού συμβολισμού
- η χρησιμότητα της αφαιρετικότητας

αλλά τέτοια θέματα γίνονται αντιληπτά εκ των υστέρων. Το να λέμε στους φοιτητές ότι «θα χρειαστείτε έννοιες από το μάθημα αυτό σε πολλά από τα επόμενα μαθήματα της επιστήμης υπολογιστών», δεν προσφέρει σπουδαίο κίνητρο. Για αυτό είναι σημαντικό να αφιερώσετε χρόνο από το πρόγραμμα σπουδών σας (είτε για ένα μάθημα ενός εξαμήνου, είτε για ένα μάθημα δύο εξαμήνων) για μερικές από τις εφαρμογές αυτού του βιβλίου. Παρακάτω δίνονται μερικά θέματα που υπάρχουν στην παρούσα έκδοση από τα οποία μπορείτε να επιλέξετε σύμφωνα με τα δικά σας ενδιαφέροντα αλλά και τα ενδιαφέροντα των φοιτητών σας. Όντως, οι φοιτητές πιθανόν να μελετήσουν πιο λεπτομερώς τα περισσότερα από τα θέματα αυτά σε μεταγενέστερα μαθήματα της επιστήμης υπολογιστών,

---

1. *Communications of the ACM*, τόμ. 11, τχ. 3 (Μάρτιος 1968), σ. 151-197.
2. Οδηγός Προγράμματος Σπουδών της Επιστήμης Υπολογιστών 2013, προέκδοση, http://cs2013.com.

όμως μια γρήγορη εισαγωγή μπορεί να διατηρήσει το ενδιαφέρον τους και να κάνει τον ισχυρισμό σας σχετικά με τη συνάφεια πιο αξιόπιστο.

Ενότητα 1.5 Λογικός προγραμματισμός

Ενότητες 1.6 και 2.3 Απόδειξη της ορθότητας αλγορίθμων

Ενότητα 3.3 Ανάλυση αλγορίθμων

Ενότητα 5.3 Σχέσεις και βάσεις δεδομένων

Ενότητα 5.6 Η ισχυρή συνάρτηση mod

Ενότητα 6.4 Κώδικες Huffman

Ενότητα 8.2 Λογικά κυκλώματα

Ενότητα 9.2 Θεωρία κωδικοποίησης

Επιπρόσθετα, σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει μια «σελίδα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος» που δίνει έμφαση σε ενδιαφέρουσες εφαρμογές που προέρχονται από τον «πραγματικό κόσμο».

ΚΑΙΝΟΥΡΓΙΑ ΣΤΗΝ ΕΒΔΟΜΗ ΕΚΔΟΣΗ

- Τα κεφάλαια 2 και 3 έχουν αναδιοργανωθεί πλέον ως κεφάλαια 2, 3 και 4 για μεγαλύτερη σαφήνεια και καλύτερη αλληλουχία της ύλης.
- Έχουν προστεθεί νέες ενότητες ή υποενότητες:
    - **Πιθανότητα**
        - Το Θεώρημα του Bayes
        - Διωνυμική κατανομή
    - **Τάξη μεγέθους (νέα ενότητα)**
        - Το Κύριο Θεώρημα
        - Απόδειξη του Κύριου Θεωρήματος
    - **Πίνακες**
        - Απαλοιφή Gauss
    - **Θεωρία κωδικοποίησης (νέα ενότητα)**
        - Εισαγωγή
        - Υπόβαθρο: Ομομορφισμοί και σύμπλοκα
        - Παράγοντας κώδικες ομάδας
        - Αποκωδικοποιώντας κώδικες ομάδας
- Έχουν εισαχθεί οι «σελίδες ιδιαίτερου ενδιαφέροντος» (μία ανά κεφάλαιο) για να προσθέσουν συνάφεια και ενδιαφέρον στο υλικό που παρουσιάζεται.
- Πλέον, οι απαντήσεις σε όλες τις ασκήσεις υπάρχουν στην ιστοσελίδα του εκδοτικού οίκου. Στην https://www.dardanosnet.gr/product/gersting/ είναι διαθέσιμες όλες οι απαντήσεις των προβλημάτων.
- Έχουν προστεθεί πολλές νέες ασκήσεις ιδιαίτερα με σκοπό τη σύζευξη των ασκήσεων περιττής αρίθμησης με παρόμοιες ασκήσεις άρτιας αρίθμησης.
- Φυσικά έχουν παραμείνει τα βοηθήματα μάθησης για τον φοιτητή όπως οι στόχοι του κάθε κεφαλαίου, τα προβλήματα εξάσκησης, οι υπενθυμίσεις, η ανασκόπηση κάθε ενότητας και η ανασκόπηση κάθε κεφαλαίου.

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ

Ιστοσελίδα για τις απαντήσεις των ασκήσεων

Για να αποκτήσετε πρόσβαση στις απαντήσεις των προβλημάτων επισκεφτείτε την ιστοσελίδα https://www.dardanosnet.gr/product/gersting/.

Διαφάνειες PowerPoint

Οι διδάσκοντες μπορούν να έχουν πρόσβαση σε διαφάνειας PowerPoint που συνοδεύουν κάθε ενότητα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Τις ευχαριστίες μου στους κριτές αυτής της έκδοσης όπως επίσης και στους κριτές των προηγούμενων εκδόσεων, των οποίων τη βοήθεια εκτιμώ ιδιαίτερα.

Elizabeth Adams, James Madison University
Charles Ashbacher, Mount Mercy College
Terry J. Bridgeman, Colorado School of Mines
Adrienne Decker, SUNY Buffalo
Mordechai S. Doodman, Dominican University
Jerrold R. Griggs, University of South Carolina
Mark Jacobson, University of Northern Iowa
Tim Lin, Cal Poly
Damian Lyons, Fordham University
Mikel D. Petty, University of Alabama in Huntsville
J. Ben Schafer, University of Northern Iowa
Shunichi Toida, Old Dominion University
Eric Westlund, Luther University
Yu Zhang, Texas A&M Corpus Christi
Kemal Akkaya, Southern Illinois University
Barnabas Bede, DigiPen Institute of Technology
David Casperson, University of Northern British Columbia
Steve Donaldson, Samford University
Michael A. Gray, American University
Joseph Hobart, Okanagan College
Lisa A. Jamba, University of Northern Florida
David Lugenbuhl, Western Carolina University
Mariana Maris, Arizona State University
Amar Raheja, Cal Poly
Ali Shaykhian, Florida Institute of Technology
William J. Weber, Southeast Missouri State University
Hua Yan, Borough of Manhattan Community College

Οι άνθρωποι στη W. H. Freeman βοήθησαν πάρα πολύ στην ολοκλήρωση αυτής της έκδοσης, ιδιαίτερα οι Penny Hull (βετεράνος πολλών προηγούμενων εκδόσεων), Terri Ward, Roland Cheyney, Liam Ferguson, Georgia Lee Hadler και Vicki Tomaselli.

Ευχαριστώ τον Russel Kackley για τα ηχητικά αρχεία στην ιστοσελίδα.

Τις βαθύτερες ευχαριστίες μου στον σύζυγό μου John, που είναι ο μεγαλύτερός μου υποστηρικτής και ο πιο αγαπημένος μου φίλος.

ΣΗΜΕΙΩΜΑ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΦΟΙΤΗΤΗ

Καθώς θα διαβάζετε αυτό το βιβλίο, θα συναντήσετε πολλούς νέους όρους και νέες έννοιες. Προσπαθήστε να διαβάζετε έχοντας μαζί σας χαρτί και μολύβι ώστε να δουλεύετε τα προβλήματα εξάσκησης καθώς τα συναντάτε. Ο σκοπός τους είναι να ενισχύσουν ή να διευκρινίσουν μια νέα ορολογία ή μια νέα μέθοδο που έχει μόλις εισαχθεί. Οι απαντήσεις δίνονται στο τέλος του βιβλίου. Δώστε επίσης προσοχή στις υπενθυμίσεις που επισημαίνουν συνήθεις παγίδες ή παρέχουν χρήσιμες υποδείξεις.

Ίσως αρχικά θεωρήσετε ότι η συλλογιστική διαδικασία που απαιτείται για τη λύση των ασκήσεων του βιβλίου είναι καινούρια και δύσκολη. Το μόνο που χρειάζεται για να τα καταφέρετε είναι να επιμείνετε. Εγώ αυτό λέω στους φοιτητές μου: «Αν δεν μπορείτε να δείτε με την πρώτη πώς θα λύσετε ένα πρόβλημα, μην τα παρατάτε, σκεφτείτε το λίγο παραπάνω, σιγουρευτείτε πως κατανοείτε την ορολογία που χρησιμοποιείται στο πρόβλημα και δοκιμάστε μερικές ιδέες. Αν δεν βρίσκετε κάποιον τρόπο, τότε αφήστε το και προσπαθήστε ξανά αργότερα. Επαναλάβετε αυτή τη διαδικασία τις επόμενες μέρες. Όταν τελικά ξυπνήσετε με κάποια ιδέα στη μέση της νύχτας, τότε θα είστε σίγουροι ότι έχετε προσπαθήστε αρκετά για αυτό το μάθημα». Τα μαθηματικά αποτελέσματα δεν ξεπηδούν πλήρως σχηματισμένα από τα κεφάλια των μαθηματικών ιδιοφυϊών. Καλά, ίσως να ισχύει για τις μαθηματικές ιδιοφυΐες, αλλά για όλους εμάς τους υπόλοιπους χρειάζεται δουλειά, υπομονή, αποτυχίες και **επιμονή**.

Απολαύστε την εμπειρία!

Πρόλογος ελληνικής έκδοσης

Τα διακριτά μαθηματικά, ως κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών, αποτελούν έναν από τους βασικούς πυλώνες της επιστήμης των υπολογιστών. Ο Edsger Dijkstra, ένας από τους θεμελιωτές του δομημένου προγραμματισμού και της θεωρίας γλωσσών προγραμματισμού, ήδη από το 1975, στην εργασία του «How do we tell truths that might hurt?» είχε διατυπώσει, μεταξύ άλλων, τη θέση «Programming is one of the most difficult branches of applied mathematics». Πρόκειται για τον κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη διακριτών συνόλων ή γενικότερα διακριτών δομών, αντικείμενα μείζονος σημασίας τόσο για την κατανόηση της θεωρίας, όσο και για την κατασκευή αλγορίθμων και δομών δεδομένων για την υλοποίηση εφαρμογών πληροφορικής. Τα διακριτά μαθηματικά παρέχουν πολύτιμα εργαλεία για την ανάλυση και τη σχεδίαση αλγορίθμων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι μεθοδολογίες συνδυαστικής απαρίθμησης που εφαρμόζονται στην ανάλυση της πολυπλοκότητας αλγορίθμων, οι επαγωγικές αποδείξεις και οι τυπικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη της ορθότητας των αλγορίθμων. Επίσης, τα διακριτά μαθηματικά παρέχουν το υπόβαθρο για την κατανόηση σύνθετων και δυναμικών δομών δεδομένων, όπως οι λίστες, οι στοίβες, οι ουρές και τα δέντρα. Αξίζει, τέλος, να σημειωθεί η συμβολή εννοιών προερχόμενων από τη θεωρία γραφημάτων, ενός από τα βασικά κεφάλαια των διακριτών μαθηματικών, στη μοντελοποίηση δικτύων, μηχανών πεπερασμένων καταστάσεων, προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης, κ.λπ.

Κεντρικό ρόλο στα διακριτά μαθηματικά κατέχει η μαθηματική λογική: ένας από τους θεμελιώδεις πυλώνες των μαθηματικών, ο οποίος, αν και ανεξάρτητος κλάδος των μαθηματικών, εντάσσεται στη διδασκαλία των διακριτών μαθηματικών, καθώς η ανάπτυξη ορθών λογικών συλλογισμών αποτελεί ζητούμενο σε οποιονδήποτε κλάδο της επιστήμης. Επιπλέον, οι τυπικές γλώσσες που κατά βάση αποτελούν αντικείμενο της μαθηματικής λογικής, παρέχουν το θεωρητικό πρότυπο για τη δημιουργία των γλωσσών προγραμματισμού. Τέλος, δεν θα μπορούσε να παραληφθεί η σύνδεση ανάμεσα σε έννοιες της μαθηματικής λογικής όπως η προσδιορισιμότητα και η πληρότητα με έννοιες από τη θεωρητική πληροφορική όπως η υπολογισιμότητα και η αποφασισιμότητα.

Οι εφαρμογές των διακριτών μαθηματικών δεν περιορίζονται στην επιστήμη των υπολογιστών. Τα διακριτά μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη βιολογία για την ανάλυση των δομών των πρωτεϊνών και την κατανόηση των γενετικών δικτύων. Στη χημεία, οι τεχνικές των διακριτών μαθηματικών εφαρμόζονται στην ανάλυση των δομών των μορίων χημικών ενώσεων και στην πρόβλεψη του αποτελέσματος χημικών αντιδράσεων. Έννοιες και τεχνικές από τα διακριτά μαθηματικά, όπως για παράδειγμα τα δίκτυα μικρόκοσμου (small-world networks), χρησιμοποιούνται στην κοινωνιολογία και στην οικονομία για την κατασκευή υποδειγμάτων και τη μελέτη ιδιοτήτων πολύπλοκων συστημάτων που αφορούν τη συμπεριφορά των καταναλωτών, των επιχειρήσεων ή τη λειτουργία των χρηματοπιστωτικών αγορών. Ακόμη και σε θεωρητικές επιστήμες όπως η γλωσσολογία, τα διακριτά μαθηματικά χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των γλωσσικών δομών και την κατανόηση των γλωσσικών μοτίβων. Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθούν οι πλέον σύγχρονες τάσεις στις επιστήμες των μηχανικών στις οποίες βρίσκουν εφαρμογή τα διακριτά μαθηματικά, όπως η μοντελοποίηση σύνθετων συστημάτων (complex systems) και η γραφο-θεωρητική επεξεργασία σήματος.

Κύριο μέλημα της επιστημονικής επιμέλειας αποτέλεσε η διασφάλιση της ακρίβειας, της σαφήνειας και της πληρότητας τόσο των μαθηματικών δομών που παρουσιάζονται, όσο και των εννοιών στις οποίες αυτές βασίζονται, καθώς επίσης και των μεθόδων με τις οποίες οι δομές αυτές οδηγούν σε εφαρμόσιμες τεχνικές επεξεργασίας διακριτών δεδομένων. Κατά τη διάρκεια της επιστημονικής επιμέλειας, καταβλήθηκε προσπάθεια για την κατά το δυνατόν πιστότερη απόδοση του ύφους του πρωτότυπου κειμένου, διατηρώντας παράλληλα την αυστηρότητα με την οποία οι επιστημονικοί όροι συνηθίζεται να αντιμετωπίζονται στην ελληνική βιβλιογραφία. Εξίσου σημαντική ήταν η προσπάθεια για τη διατήρηση του επεξηγηματικού ύφους που χαρακτηρίζει το πρωτότυπο, προκειμένου να εξυπηρετείται η κατανόηση του υλικού από τον αναγνώστη.

Παραδίδοντας αυτό το σύγγραμμα στην ελληνική κοινότητα της ανώτατης εκπαίδευσης καλούμε τους αναγνώστες να συμμετέχουν ενεργά στην αξιολόγησή του, παρέχοντας σχόλια σχετικά με την επάρκεια κατανόησης, τη σαφήνεια και την επιστημονική του ακρίβεια. Τα σχόλια αυτά είναι ευπρόσδεκτα, καθώς συμβάλλουν στη συνεχή βελτίωση του παρεχόμενου εκπαιδευτικού υλικού.

Κλείνοντας, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε όσους συμμετείχαν στην ελληνική απόδοση του συγγράμματος της Judith Gersting, και ιδιαίτερα τον εκδότη για την ευκαιρία που μας έδωσε να μελετήσουμε από τη σκοπιά της επιστημονικής επιμέλειας το αξιόλογο αυτό σύγγραμμα.

Αθήνα, Δεκέμβριος 2023

Σταύρος Αδάμ
Ευστάθιος Αντωνίου
Κωνσταντίνος Μπάρλας
Δημήτριος Παπαδόπουλος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Τυπική λογική

ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Μετά τη μελέτη αυτού του κεφαλαίου, θα είστε ικανοί να:

- Χρησιμοποιείτε τα τυπικά σύμβολα της προτασιακής λογικής.
- Βρίσκετε την τιμή αληθείας μιας έκφρασης της προτασιακής λογικής.
- Κατασκευάζετε τυπικές αποδείξεις της προτασιακής λογικής και να χρησιμοποιείτε τις αποδείξεις αυτές για να καθορίζετε την εγκυρότητα επιχειρημάτων της ελληνικής γλώσσας.
- Χρησιμοποιείτε τα τυπικά σύμβολα της κατηγορηματικής λογικής.
- Βρίσκετε την τιμή αληθείας σε κάποια ερμηνεία μιας έκφρασης της κατηγορηματικής λογικής.
- Χρησιμοποιείτε την κατηγορηματική λογική για να αναπαριστάτε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας.
- Κατασκευάζετε τυπικές αποδείξεις της κατηγορηματικής λογικής και να χρησιμοποιείτε τις αποδείξεις αυτές για να προσδιορίζετε την εγκυρότητα επιχειρημάτων της ελληνικής γλώσσας.
- Κατανοείτε πώς η γλώσσα προγραμματισμού Prolog χτίζεται πάνω στην κατηγορηματική λογική.
- Αποδεικνύετε με μαθηματικό τρόπο την ορθότητα προγραμμάτων που χρησιμοποιούν προτάσεις εκχώρησης και υπό συνθήκη προτάσεις.

Έχετε επιλεγεί ως ένορκος σε μια υπόθεση εγκλήματος. Ο δικηγόρος υπεράσπισης επιχειρηματολογεί ως εξής:

Αν ο πελάτης μου είναι ένοχος, τότε το μαχαίρι βρισκόταν στο συρτάρι. Είτε το μαχαίρι δεν βρισκόταν στο συρτάρι είτε ο Jason Pritchard είδε το μαχαίρι. Αν το μαχαίρι δεν βρισκόταν εκεί στις 10 Οκτωβρίου, έπεται ότι ο Jason Pritchard δεν είδε το μαχαίρι. Επιπλέον, αν το μαχαίρι βρισκόταν εκεί στις 10 Οκτωβρίου, τότε το μαχαίρι βρισκόταν στο συρτάρι και επίσης το σφυρί βρισκόταν στην αποθήκη. Όμως, όλοι γνωρίζουμε ότι το σφυρί δεν βρισκόταν στην αποθήκη. Επομένως, κυρίες και κύριοι ένορκοι, ο πελάτης μου είναι αθώος.

Ερώτημα: Πώς σας φαίνεται το επιχείρημα του δικηγόρου; Πώς θα ψηφίζατε;

Είναι πολύ πιο εύκολο να απαντήσουμε αυτή την ερώτηση αν επαναδιατυπώσουμε το επιχείρημα χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της τυπικής λογικής. Η τυπική λογική αφαιρεί την πολυλογία που προκαλεί σύγχυση και μας επιτρέπει να επικεντρωθούμε στον υποκείμενο συλλογισμό. Στην πραγματικότητα, η τυπική λογική, που είναι το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου, παρέχει τη θεμελίωση για την προσεκτική, οργανωμένη μέθοδο συλλογισμού που χαρακτηρίζει κάθε αιτιολογημένη δραστηριότητα όπως είναι η διερεύνηση ενός εγκλήματος, ένα επιστημονικό πείραμα, μια κοινωνιολογική μελέτη. Επιπλέον, η τυπική λογική έχει άμεσες εφαρμογές στην επιστήμη υπολογιστών. Οι δύο τελευταίες ενότητες αυτού του κεφαλαίου εξερευνούν μια γλώσσα προγραμματισμού βασισμένη στη λογική και στη χρήση της τυπικής λογικής για την επαλήθευση της ορθότητας των προγραμμάτων υπολογιστών. Επίσης, η λογική κυκλωμάτων (η λογική που κυριαρχεί στα κυκλώματα υπολογιστών) βρίσκεται σε ευθεία αναλογία με την προτασιακή λογική αυτού του κεφαλαίου. Θα μελετήσουμε τη λογική κυκλωμάτων στο Κεφάλαιο 8.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1 Προτάσεις, συμβολική αναπαράσταση και ταυτολογίες

Η τυπική λογική μπορεί να αναπαραστήσει τις προτάσεις που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή γλώσσα για να μεταδώσει γεγονότα ή πληροφορίες. Μια **πρόταση** είναι μια φράση που είναι είτε αληθής είτε ψευδής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Θεωρήστε τις ακόλουθες φράσεις:

α) Το δέκα είναι μικρότερο από το επτά.
β) Η Τσεγιέν είναι η πρωτεύουσα του Ουαϊόμινγκ.
γ) Αυτή είναι πολύ ταλαντούχα.
δ) Υπάρχουν μορφές ζωής σε άλλους πλανήτες του σύμπαντος.

Η φράση (α) είναι μια πρόταση επειδή είναι ψευδής. Η φράση (β) είναι μια πρόταση επειδή είναι αληθής. Η φράση (γ) δεν είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής επειδή δεν έχει καθοριστεί ποια είναι «αυτή». Άρα η φράση (γ) δεν είναι πρόταση. Η φράση (δ) είναι μια πρόταση επειδή είναι είτε αληθής είτε ψευδής (δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τι από τα δύο).

Σύνδεσμοι και τιμές αληθείας

Στην ελληνική γλώσσα, απλές προτάσεις συνδυάζονται με συνδετικές λέξεις, όπως το *και,* για να σχηματίσουν πιο ενδιαφέρουσες σύνθετες προτάσεις. Η τιμή αληθείας μιας σύνθετης πρότασης εξαρτάται από τις τιμές αληθείας των συνιστωσών της και τις συνδετικές λέξεις που χρησιμοποιούνται. Αν συνδυάσουμε τις δύο αληθείς προτάσεις «Οι ελέφαντες είναι μεγάλοι» και «Οι μπάλες του μπέιζμπολ είναι στρογγυλές», θα θεωρήσουμε την πρόταση «Οι ελέφαντες είναι μεγάλοι και οι μπάλες του μπέιζμπολ είναι στρογγυλές» να είναι αληθής. Σε αυτό το βιβλίο, όπως και σε πολλά βιβλία λογικής, τα κεφαλαία γράμματα που βρίσκονται στην αρχή του αλφαβήτου, όπως τα A, B και Γ, χρησιμοποιούνται για να αναπαριστούν προτάσεις και λέγονται **προτασιακές μεταβλητές**. Το σύμβολο $\wedge$ είναι ένας **λογικός σύνδεσμος** που αναπαριστά το *και*. Συμφωνούμε ότι αν η πρόταση A είναι αληθής και η πρόταση B είναι αληθής, η πρόταση $A \wedge B$ (που διαβάζεται «A και B») πρέπει να θεωρείται αληθής.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ 1[1]

α. Αν η A είναι αληθής και η B είναι ψευδής, ποια τιμή αληθείας θα εκχωρούσατε στην $A \wedge B$;
β. Αν η A είναι ψευδής και η B είναι αληθής, ποια τιμή αληθείας θα εκχωρούσατε στην $A \wedge B$;
γ. Αν οι A και B είναι και οι δύο ψευδείς, ποια τιμή αληθείας θα εκχωρούσατε στην $A \wedge B$;

Η έκφραση $A \wedge B$ λέγεται **σύζευξη** των A και B, ενώ οι προτάσεις A και B είναι οι **συζευκτέοι** αυτής της έκφρασης. Ο Πίνακας 1.1 συνοψίζει την τιμή αληθείας της για όλες τις δυνατές τιμές αληθείας των A και B. Κάθε γραμμή του πίνακα αναπαριστά μια συγκεκριμένη εκχώρηση τιμών αληθείας στις προτασιακές μεταβλητές και παρουσιάζει την τιμή αληθείας που προκύπτει για τη σύνθετη έκφραση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

A	B	$A \wedge B$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2

A	B	$A \vee B$
Α	Α	Α
Α	Ψ	
Ψ	Α	
Ψ	Ψ	

Ένας ακόμα σύνδεσμος είναι η λέξη *ή* που δηλώνεται με το σύμβολο $\vee$. Η έκφραση $A \vee B$ (που διαβάζεται «A ή B») λέγεται **διάζευξη** των A και B, ενώ οι προτάσεις A και B είναι οι **διαζευκτέοι** αυτής της έκφρασης. Αν οι A και B είναι και οι δύο αληθείς, τότε η $A \vee B$ θα θεωρείται αληθής, όπως παρουσιάζεται στην πρώτη γραμμή του πίνακα για τη διάζευξη (Πίνακας 1.2).

1. Οι απαντήσεις για τα προβλήματα εξάσκησης βρίσκονται στον ιστότοπο του εκδοτικού οίκου (https://www.dardanosnet.gr/).

ΕΞΑΣΚΗΣΗ 2

Χρησιμοποιήστε την αντίληψή σας για τη λέξη *ή* ώστε να συμπληρώσετε τον πίνακα αληθείας για τη διάζευξη (Πίνακας 1.2).

Οι προτάσεις μπορεί να συνδυάζονται στη μορφή «αν πρόταση 1, τότε πρόταση 2». Αν το γράμμα A δηλώνει την πρόταση 1 και το B δηλώνει την πρόταση 2, η σύνθετη πρόταση δηλώνεται $A \rightarrow B$ και διαβάζεται «A συνεπάγεται B». Ο λογικός σύνδεσμος εδώ είναι η **συνεπαγωγή** και σημαίνει ότι η αλήθεια της συνεπάγεται την αλήθεια της A ή οδηγεί στην αλήθεια της B. Στη συνεπαγωγή $A \rightarrow B$, το γράμμα A δηλώνει την **υπόθεση** και το B δηλώνει το **συμπέρασμα**.

Ο πίνακας αληθείας για τη συνεπαγωγή είναι λιγότερο προφανής απ' ό,τι για τη σύζευξη ή τη διάζευξη. Για να καταλάβετε τον ορισμό της, υποθέστε ότι ένας φίλος σας λέει: «Αν περάσω το τεστ στο μάθημα των οικονομικών, τότε θα πάω να δω την ταινία την Παρασκευή». Αν ο φίλος σας περάσει το τεστ και πάει να δει την ταινία, η πρόταση ήταν αληθής. Αν ο φίλος σας περάσει το τεστ αλλά δεν πάει να δει την ταινία, η πρόταση ήταν ψευδής. Αν ο φίλος σας δεν περάσει το τεστ, τότε (είτε πάει να δει την ταινία είτε όχι) δεν μπορείτε να ισχυριστείτε ότι η πρόταση ήταν ψευδής. Πιθανότατα θα θέλατε να δώσετε το πλεονέκτημα της αμφιβολίας και να πείτε ότι η πρόταση ήταν αληθής. Κατά σύμβαση, λοιπόν, αν η υπόθεση $A \rightarrow B$ είναι ψευδής, η συνεπαγωγή A θεωρείται αληθής ανεξάρτητα από την τιμή αληθείας του συμπεράσματος B.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ 3

Συνοψίστε την παραπάνω συζήτηση κατασκευάζοντας τον πίνακα αληθείας για τη συνεπαγωγή $A \rightarrow B$.

Ο σύνδεσμος της **ισοδυναμίας** συμβολίζεται με $\leftrightarrow$. Σε αντίθεση με τη σύζευξη, τη διάζευξη και τη συνεπαγωγή, ο σύνδεσμος της ισοδυναμίας δεν είναι στην πραγματικότητα ένας θεμελιώδης σύνδεσμος αλλά μια βολική συντόμευση. Η έκφραση $A \leftrightarrow B$ σημαίνει $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow B)$. Μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα αληθείας για την ισοδυναμία κατασκευάζοντας (κομμάτι-κομμάτι) έναν πίνακα για την $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, όπως στον Πίνακα 1.3. Όπως προκύπτει από τον πίνακα αυτόν, η ισοδυναμία είναι αληθής ακριβώς όταν οι A και B έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Οι σύνδεσμοι που έχουμε δει μέχρι τώρα λέγονται **διμελείς σύνδεσμοι** επειδή ενώνουν δύο εκφράσεις για να παραγάγουν μια τρίτη έκφραση. Ας θεωρήσουμε, τώρα, έναν **μονομελή σύνδεσμο,** έναν σύνδεσμο που δρα σε μια έκφραση για να παραγάγει μια δεύτερη έκφραση. Η **άρνηση** είναι ένας μονομελής σύνδεσμος. Η άρνηση της πρότασης A συμβολίζεται με A' και διαβάζεται «όχι A».

ΕΞΑΣΚΗΣΗ 4

Κατασκευάστε τον πίνακα αληθείας για την A'. (Απαιτεί μόνο δύο γραμμές.)

Ο Πίνακας 1.4 συνοψίζει τις τιμές αληθείας για όλους τους λογικούς συνδέσμους. Η πληροφορία αυτή είναι κρίσιμη για την κατανόηση του λογικού συλλογισμού.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.4

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	A'
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	

Λόγω του πλούτου της ελληνικής γλώσσας, υπάρχουν λέξεις που έχουν διαφορετικές νοηματικές αποχρώσεις, αλλά παρ' όλα αυτά αναπαρίστανται από τον ίδιο λογικό σύνδεσμο. Ο Πίνακας 1.5 παρουσιάζει διάφορες λέξεις και εκφράσεις που σχετίζονται με τους λογικούς συνδέσμους.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.5

Λέξη ή έκφραση	Λογικός σύνδεσμος	Λογική έκφραση
και, αλλά, επίσης, επιπρόσθετα, επιπλέον	Σύζευξη	$A \wedge B$
ή, είτε	Διάζευξη	$A \vee B$
Αν A, τότε B. A συνεπάγεται B. A, επομένως B. A μόνο αν B. η B έπεται από την A. η A είναι ικανή συνθήκη για τη B. η B είναι αναγκαία συνθήκη για την A.	Συνεπαγωγή	$A \to B$
A αν και μόνο αν B. η A είναι ικανή και αναγκαία για τη B.	Ισοδυναμία	$A \leftrightarrow B$
όχι A είναι ψευδές ότι A ... δεν είναι αλήθεια ότι A ...	Άρνηση	A'

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

A μόνο αν *B* σημαίνει $A \to B$.

Υποθέστε ότι η $A \to B$ είναι αληθής. Τότε, σύμφωνα με τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής, το συμπέρασμα B μπορεί να είναι αληθές παρόλο που η υπόθεση A είναι ψευδής. Έτσι, παρόλο που η αλήθεια της A οδηγεί (συνεπάγεται) στην αλήθεια της B, η αλήθεια της A δεν συνεπάγεται την αλήθεια της B. Η φράση «η B είναι αναγκαία συνθήκη για την A» που περιγράφει την $A \to B$ σημαίνει απλά ότι αν η A είναι αληθής, τότε η B επίσης είναι αναγκαστικά αληθής. Η φράση «A μόνο αν B» περιγράφει το ίδιο πράγμα, ότι η συνεπάγεται τη B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Η πρόταση «η ύπαρξη φωτιάς είναι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη καπνού» μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής: «Αν υπάρχει καπνός, τότε υπάρχει φωτιά». Η υπόθεση είναι «υπάρχει καπνός» και το συμπέρασμα είναι «υπάρχει φωτιά».

ΕΞΑΣΚΗΣΗ 5

Προσδιορίστε την υπόθεση και το συμπέρασμα σε καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις. (*Υπόδειξη*: Γράψτε κάθε πρόταση στην μορφή αν – τότε.)

α. Αν συνεχίσει να βρέχει, τότε το ποτάμι θα πλημμυρίσει.
β. Μια ικανή συνθήκη για τη μη λειτουργία ενός δικτύου είναι η πτώση του κεντρικού διακόπτη.
γ. Τα αβοκάντο είναι ώριμα μόνο αν είναι σκούρα και απαλά.
δ. Η καλή διατροφή είναι μια αναγκαία συνθήκη για μια υγιή γάτα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Η έκφραση της άρνησης μιας πρότασης πρέπει να γίνεται με προσοχή, ειδικά για μια σύνθετη πρόταση. Ο Πίνακας 1.6 δίνει μερικά παραδείγματα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.6

Πρόταση	Σωστή άρνηση	Λανθασμένη άρνηση
Θα βρέξει αύριο.	Είναι ψευδές ότι θα βρέξει αύριο. Δεν θα βρέξει αύριο.	
Ο Πέτρος είναι ψηλός και αδύνατος.	Είναι ψευδές ότι ο Πέτρος είναι ψηλός και αδύνατος. Ο Πέτρος δεν είναι ψηλός ή δεν είναι αδύνατος. Ο Πέτρος είναι κοντός ή χοντρός.	Ο Πέτρος είναι κοντός και χοντρός. Πολύ ισχυρή πρόταση. Ο Πέτρος δεν έχει και τις δύο ιδιότητες (ψηλός και αδύνατος) αλλά μπορεί να έχει τη μία από αυτές.
Το ποτάμι είναι ρηχό ή μολυσμένο.	Είναι ψευδές ότι το ποτάμι είναι ρηχό ή μολυσμένο. Το ποτάμι δεν είναι ούτε ρηχό ούτε μολυσμένο. Το ποτάμι είναι βαθύ και αμόλυντο.	Το ποτάμι δεν είναι ρηχό ή αμόλυντο. Πολύ αδύναμη πρόταση. Το ποτάμι δεν έχει καμία από τις δύο ιδιότητες, όχι ότι απλά δεν έχει τη μία ιδιότητα.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ 6

Αν A είναι η πρόταση «Στην Julie αρέσει το βούτυρο αλλά απεχθάνεται την κρέμα», ποια από τις ακόλουθες προτάσεις αναπαριστά την A';

α. Η Julie απεχθάνεται το βούτυρο και την κρέμα.
β. Στην Julie δεν αρέσει το βούτυρο ή η κρέμα.
γ. Στην Julie δεν αρέσει το βούτυρο αλλά αγαπά την κρέμα.
δ. Η Julie απεχθάνεται το βούτυρο ή της αρέσει η κρέμα.

Μπορούμε να βάλουμε στη σειρά προτασιακές μεταβλητές, συνδέσμους και παρενθέσεις (ή αγκύλες) για να σχηματίσουμε νέες εκφράσεις, όπως η

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

Φυσικά, όπως συμβαίνει και σε μια γλώσσα προγραμματισμού, ισχύουν συγκεκριμένοι συντακτικοί κανόνες (κανόνες σύμφωνα με τους οποίους οι συμβολοσειρές είναι νόμιμες). Για παράδειγμα, η συμβολοσειρά

$$A\ ))\ \wedge\wedge \to BC$$

δεν θεωρείται νόμιμη. Μια έκφραση που αποτελεί μια νόμιμη συμβολοσειρά λέγεται **ορθά σχηματισμένος τύπος** ή απλά **ο.σ.τ.** Για να μειώσουμε τον αριθμό των παρενθέσεων που απαιτούνται σε έναν ο.σ.τ., συμφωνούμε στη σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι σύνδεσμοι. Αυτή η *σειρά προτεραιότητας* είναι

1. Σύνδεσμοι εντός παρενθέσεων, πρώτα οι εσωτερικές παρενθέσεις.
2. Άρνηση $'$
3. Σύζευξη $\wedge$, διάζευξη $\vee$
4. Συνεπαγωγή $\to$
5. Ισοδυναμία $\leftrightarrow$

Έτσι, η έκφραση $A \vee B'$ σημαίνει $A \vee (B')$ και όχι $(A \vee B)'$. Ομοίως, η $A \vee B \to \Gamma$ σημαίνει $(A \vee B) \to \Gamma$ και όχι $A \vee (B \to \Gamma)$. Ωστόσο, συχνά χρησιμοποιούμε παρενθέσεις απλώς για να είμαστε σίγουροι ότι δεν θα υπάρξει σύγχυση.

Σε έναν ο.σ.τ. που περιλαμβάνει αρκετούς συνδέσμους, ο σύνδεσμος που εφαρμόζεται τελευταίος είναι ο **κύριος σύνδεσμος**. Στον ο.σ.τ.

$$A \wedge (B \to \Gamma)'$$

ο κύριος σύνδεσμος είναι η $\wedge$. Στον ο.σ.τ.

$$((A \vee B) \wedge \Gamma) \rightarrow (B \vee \Gamma')$$

ο κύριος σύνδεσμος είναι η $\rightarrow$. Τα κεφαλαία γράμματα που βρίσκονται προς το τέλος του λατινικού αλφαβήτου, όπως τα P, Q, R και S, χρησιμοποιούνται για να αναπαριστούν ο.σ.τ. Επομένως, το P μπορεί να αναπαριστά μια μεμονωμένη προτασιακή μεταβλητή, που είναι το απλούστερο είδος ο.σ.τ., ή έναν πιο πολύπλοκο ο.σ.τ. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον ο.σ.τ.

$$((A \vee B) \wedge \Gamma) \rightarrow (B \vee \Gamma')$$

ως

$$P \rightarrow Q$$

αν προς το παρόν θέλουμε να κρύψουμε κάποιες λεπτομέρειες και να επικεντρωθούμε μόνο στον κύριο σύνδεσμο.

Οι τιμές αληθείας των ο.σ.τ. που συντίθενται από προτασιακές μεταβλητές και συνδέσμους εξαρτώνται από τις τιμές αληθείας που εκχωρούνται στις προτασιακές τους μεταβλητές. Για κάθε ο.σ.τ., συμπληρώνουμε τον πίνακα αληθείας κατασκευάζοντας τις συνιστώσες από τις οποίες αποτελείται, όπως ακριβώς κάναμε για τον τύπο $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Ο κύριος σύνδεσμος παρουσιάζεται στην τελευταία στήλη του πίνακα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

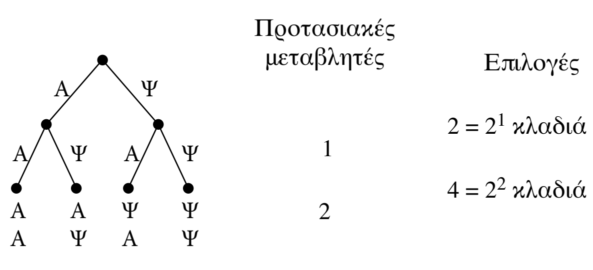
Ο πίνακας αληθείας για τον ο.σ.τ. $A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$ δίνεται στον Πίνακα 1.7. Ο κύριος σύνδεσμος, σύμφωνα με τους κανόνες προτεραιότητας, είναι η συνεπαγωγή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.7

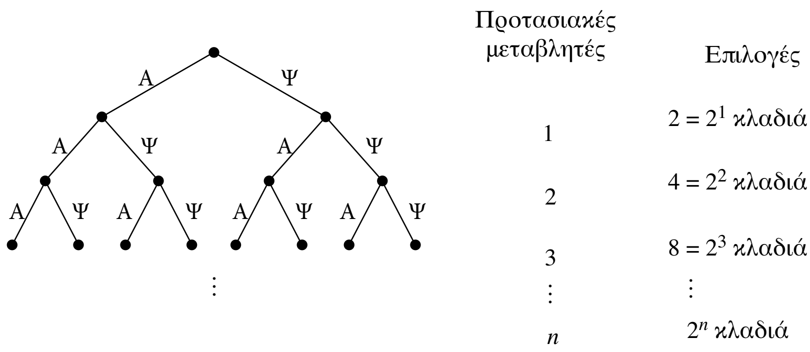
A	B	B'	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Αν πρόκειται να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας για έναν ο.σ.τ. που περιέχει n διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές, πόσες γραμμές θα έχει αυτός; Από τους πίνακες αληθείας που έχουμε δει ως τώρα, γνωρίζουμε ότι για έναν ο.σ.τ. με μία μόνο προτασιακή μεταβλητή ο πίνακας αληθείας έχει δύο γραμμές, ενώ για έναν ο.σ.τ. με δύο προτασιακές μεταβλητές ο πίνακας αληθείας έχει τέσσερις γραμμές. Ο αριθμός των γραμμών ισούται με τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών αληθής-ψευδής μεταξύ των προτασιακών μεταβλητών. Η πρώτη προτασιακή μεταβλητή έχει δύο δυνατές τιμές, Α και Ψ. Για κάθε μία από αυτές τις τιμές, η δεύτερη προτασιακή μεταβλητή έχει δύο δυνατές τιμές. Η Εικόνα 1.1 απεικονίζει αυτή την κατάσταση σαν ένα «δέντρο» δύο επιπέδων με τέσσερα κλαδιά δείχνοντας τους τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς των τιμών Α και Ψ για δύο προτασιακές μεταβλητές. Για n προτασιακές μεταβλητές, επεκτείνουμε το δέντρο σε n επίπεδα όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.1β. Τότε, ο συνολικός αριθμός των κλαδιών ισούται με 2^n. Ο συνολικός αριθμός γραμμών σε έναν πίνακα αληθείας με n προτασιακές μεταβλητές είναι επίσης 2^n.

Εικόνα 1.1



(α)



(β)

Η δομή αυτού του δέντρου μάς δείχνει επίσης πώς να απαριθμήσουμε όλους τους συνδυασμούς μεταξύ των προτασιακών μεταβλητών όταν κατασκευάζουμε έναν πίνακα αληθείας. Αν διαβάσουμε κάθε επίπεδο του δέντρου από κάτω προς τα πάνω, βλέπουμε ότι για τη n-οστή προτασιακή μεταβλητή (η οποία θα αποτελέσει την τελευταία στήλη του πίνακα αληθείας) οι τιμές Α – Ψ εναλλάσσονται, για την προτασιακή μεταβλητή $n – 1$ εναλλάσσονται κάθε δύο τιμές, για την προτασιακή μεταβλητή $n – 2$ εναλλάσσονται κάθε τέσσερις τιμές, και ούτω καθεξής. Επομένως, ένας πίνακας αληθείας για τρεις προτασιακές μεταβλητές θα ξεκινούσε όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.8. Οι τιμές για την προτασιακή μεταβλητή *Γ* εναλλάσσονται, για την προτασιακή μεταβλητή *Β* οι τιμές εναλλάσσονται σε ομάδες των δύο και για την προτασιακή μεταβλητή *Α* εναλλάσσονται σε ομάδες των τεσσάρων, καταλήγοντας σαν μια πλάγια εκδοχή του δέντρου. (Διαβάζοντας τις γραμμές από κάτω προς τα πάνω και χρησιμοποιώντας το 1 για Α και το 0 για Ψ, αυτό μας δείχνει ότι μετράμε από το μηδέν και προς τα πάνω σε δυαδικούς αριθμούς.)

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.8

Α	*Β*	*Γ*
Α	Α	Α
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ

ΕΞΑΣΚΗΣΗ 7

Κατασκευάστε τους πίνακες αληθείας για τους ακόλουθους τύπους.

α. $(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$ (Θυμηθείτε ότι η ισοδυναμία $Γ \leftrightarrow Δ$ είναι αληθής όταν οι *Γ* και *Δ* έχουν την ίδια τιμή αληθείας.)

β. $(A \vee A') \to (B \wedge B')$

γ. $[(A \vee B') \to Γ']'$

δ. $(A \to B) \leftrightarrow (B' \to A')$

Ταυτολογίες

Ένας ο.σ.τ., όπως ο (δ) της Εξάσκησης 7, του οποίου οι τιμές αληθείας είναι πάντοτε αληθείς, λέγεται **ταυτολογία**. Μια ταυτολογία είναι «εγγενώς αληθής» λόγω της δομής της. Είναι αληθής για οποιεσδήποτε τιμές αληθείας κι αν εκχωρηθούν στις προτασιακές της μεταβλητές. Ένα απλό παράδειγμα ταυτολογίας είναι ο ο.σ.τ. $A \vee A'$. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την πρόταση «Σήμερα ο ήλιος θα λάμπει ή σήμερα ο ήλιος δεν θα λάμπει», η οποία είναι πάντοτε αληθής, αφού είτε το ένα είτε το άλλο από αυτά πρέπει να συμβεί. Ένας ο.σ.τ. όπως ο (β) της Εξάσκησης 7, του οποίου οι τιμές αληθείας είναι πάντοτε ψευδείς, λέγεται **αντίφαση**. Μια αντίφαση είναι «εγγενώς ψευδής» λόγω της δομής της. Ένα απλό παράδειγμα αντίφασης είναι ο ο.σ.τ. $A \wedge A'$. Θεωρήστε την πρόταση «Σήμερα είναι Τρίτη και σήμερα δεν είναι Τρίτη», η οποία είναι ψευδής ανεξαρτήτως ποια μέρα της εβδομάδας είναι.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Τα γράμματα *Α*, *Β*, *Γ* συμβολίζουν προτασιακές μεταβλητές, ενώ τα *P*, *Q*, *R*, *S* συμβολίζουν ο.σ.τ.

Υποθέστε ότι P, Q αναπαριστούν δύο ο.σ.τ. και ότι ο ο.σ.τ. $P \leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία. Αν κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας χρησιμοποιώντας τις προτασιακές μεταβλητές των P και Q, τότε οι τιμές αληθείας των ο.σ.τ. P και Q θα συμφωνούν σε κάθε γραμμή του πίνακα. Στην περίπτωση αυτή, οι P και Q είναι **ισοδύναμοι ο.σ.τ.**, και αυτό συμβολίζεται ως $P \Leftrightarrow Q$. Επομένως, ο συμβολισμός $P \Leftrightarrow Q$ δηλώνει ένα γεγονός, ότι ο συγκεκριμένος ο.σ.τ. $P \leftrightarrow Q$ είναι μια ταυτολογία. Ο ο.σ.τ. (δ) της Εξάσκησης 7 έχει τη μορφή $P \leftrightarrow Q$, όπου P είναι ο ο.σ.τ. $(A \rightarrow B)$ και είναι ο ο.σ.τ. $(B' \rightarrow A')$ και επίσης ο $P \leftrightarrow Q$ αποδείχθηκε ότι είναι ταυτολογία. Επομένως, $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \rightarrow A')$.

Θα καταγράψουμε μερικές βασικές ισοδυναμίες, θα αποδείξουμε δύο από αυτές κατασκευάζοντας τους πίνακες αληθείας και θα αφήσουμε τις υπόλοιπες ως ασκήσεις. Αναπαριστούμε κάθε αντίφαση με το 0 και κάθε ταυτολογία με το 1.

Μερικές ταυτολογικές ισοδυναμίες

1α. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	1β. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	(αντιμεταθετικές ιδιότητες)
2α. $(A \vee B) \vee \Gamma \Leftrightarrow A \vee (B \vee \Gamma)$	2β. $(A \wedge B) \wedge \Gamma \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge \Gamma)$	(προσεταιριστικές ιδιότητες)
3α. $A \vee (B \wedge \Gamma) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma)$	3β. $A \wedge (B \vee \Gamma) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge \Gamma)$	(επιμεριστικές ιδιότητες)
4α. $A \vee 0 \Leftrightarrow A$	4β. $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	(ταυτοτικές ιδιότητες)
5α. $A \vee A' \Leftrightarrow 1$	5β. $A \wedge A' \Leftrightarrow 0$	(ιδιότητες του συμπληρώματος)

Σημειώστε ότι η ιδιότητα 2α μάς επιτρέπει να γράφουμε $A \vee B \vee \Gamma$ χωρίς την ανάγκη χρήσης των παρενθέσεων επειδή η ομαδοποίηση δεν έχει σημασία. Ομοίως, η ιδιότητα 2β μάς επιτρέπει να γράφουμε $A \wedge B \wedge \Gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Ο πίνακας αληθείας στον Πίνακα 1.9α επαληθεύει την ισοδυναμία 1α (αντιμεταθετική ιδιότητα για τη διάζευξη) και αυτός του Πίνακα 1.9β επαληθεύει την ιδιότητα 4β (ταυτοτική ιδιότητα για τη σύζευξη). Σημειώστε ότι στον Πίνακα 1.9β απαιτούνται δύο μόνο γραμμές επειδή μια ταυτολογία (το 1) δεν μπορεί να πάρει ψευδείς τιμές αληθείας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.9

(α)

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

(β)

A	1	$A \wedge 1$	$A \wedge 1 \leftrightarrow A$
Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α

ΕΞΑΣΚΗΣΗ 8

Επαληθεύστε την ισοδυναμία 5α.

Οι ισοδυναμίες της παραπάνω λίστας είναι ομαδοποιημένες σε 5 ζεύγη. Σε κάθε ζεύγος, η κάθε ισοδυναμία μπορεί να προκύψει από την άλλη αντικαθιστώντας το $\wedge$ με το $\vee$, το $\vee$ με το $\wedge$, το 0 με το 1 ή το 1 με το 0. Σε κάθε ζεύγος, η κάθε ισοδυναμία είναι η **δυϊκή** της άλλης. Επομένως, οι 1α και 1β (αντιμεταθετική ιδιότητα της διάζευξης και αντιμεταθετική ιδιότητα της σύζευξης) είναι δυϊκές η μία της άλλης. Αυτή η λίστα των ισοδυναμιών εμφανίζεται ξανά στο Κεφάλαιο 8 σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Δύο ακόμα ισοδυναμίες που είναι πολύ χρήσιμες είναι οι **Νόμοι του De Morgan**, που διατυπώθηκαν για πρώτη φορά και πήραν το όνομά τους από τον Βρετανό μαθηματικό του 19ου αιώνα Augustus De Morgan. Το ακόλουθο θεώρημα είναι εύκολο να αποδειχθεί (δείτε τις Ασκήσεις 26(ε) και 26(στ)).

ΘΕΩΡΗΜΑ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ DE MORGAN

$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$ και $(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B$

Κάθε ο.σ.τ. είναι ο δυϊκός του άλλου. Οι Νόμοι του De Morgan μάς βοηθούν να εκφράσουμε την άρνηση μιας σύνθετης πρότασης, όπως στην Εξάσκηση 6.

Θεωρήστε τις παραπάνω ταυτολογικές ισοδυναμίες ως πρότυπα. Για να χρησιμοποιήσετε κάποια από αυτές, πρέπει να ταιριάξετε ακριβώς το πρότυπό της. Για παράδειγμα, δεν μπορείτε να γράψετε $(A \wedge B) \vee \Gamma \Leftrightarrow A \wedge (B \vee \Gamma)$ επικαλούμενοι την προσεταιριστική ιδιότητα, επειδή καμία από τις δύο ιδιότητες δεν χρησιμοποιεί αμφότερες τη σύζευξη και τη διάζευξη.

Υποθέστε ότι P και Q είναι δύο ισοδύναμοι ο.σ.τ. Τότε, σε κάθε ο.σ.τ. στον οποίο εμφανίζεται ο P, αυτός μπορεί να αντικατασταθεί με τον Q χωρίς να υπάρξει κάποια αλλαγή στις συνολικές τιμές αληθείας. Είναι σαν να αντικαθιστάτε στο πορτοφόλι σας ένα χαρτονόμισμα των 20 € με δύο χαρτονομίσματα των 10 €. Η συνολική αξία των χρημάτων σας δεν έχει αλλάξει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Από την Εξάσκηση 7(δ), η συνεπαγωγή $A \to B$ είναι ισοδύναμη με τη $B' \to A'$. Άρα, ο ο.σ.τ. $(A \to B) \to B$ θα πρέπει να είναι ισοδύναμος με τον $(B' \to A)' \to A$. Η ισοδυναμία αυτή επαληθεύεται από τους Πίνακες 1.10α και 1.10β.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.10

(α)

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ

(β)

A	B	A'	B'	$B' \to A'$	$(B' \to A') \to B$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ

Λογικοί σύνδεσμοι στον πραγματικό κόσμο

Οι διαδικτυακές μηχανές αναζήτησης επιτρέπουν την εξερεύνηση των απέραντων πηγών που είναι διαθέσιμες στο ίντερνετ, αλλά με μια μικρή προσοχή στην ερώτησή σας μπορείτε να συγκεντρώσετε τις απαντήσεις πιο γρήγορα. Για παράδειγμα, αν πληκτρολογήσετε

μεταχειρισμένα αυτοκίνητα

σε μια μηχανή αναζήτησης, θα λάβετε παραπομπές σε οποιαδήποτε ιστοσελίδα περιέχει είτε τη λέξη *μεταχειρισμένα* είτε τη λέξη *αυτοκίνητα*. Αυτές θα μπορούσαν να περιλαμβάνουν ιστοσελίδες που πωλούν αντίκες και ιστοσελίδες για τα πιο πρόσφατα αποτελέσματα αγώνων αυτοκινήτου. Πληκτρολογώντας τη φράση

«μεταχειρισμένα αυτοκίνητα»

σε εισαγωγικά, τότε στις περισσότερες μηχανές αναζήτησης η αναζήτηση περιορίζεται σε ιστοσελίδες που περιλαμβάνουν αυτή την ακριβή φράση. Επίσης, οι περισσότερες μηχανές αναζήτησης σας επιτρέπουν να πληκτρολογήσετε στην ερώτηση αναζήτησης μια έκφραση που χρησιμοποιεί λογικούς συνδέσμους, κάτι που κάνει την ερώτησή σας ακόμα πιο συγκεκριμένη. Προκειμένου η αναζήτησή σας για τα μεταχειρισμένα αυτοκίνητα να γίνει ακόμα πιο εστιασμένη, θα μπορούσατε για παράδειγμα να πληκτρολογήσετε

«μεταχειρισμένα αυτοκίνητα» AND (Ford OR Buick)

Αυτό θα περιορίσει την αναζήτησή σας σε ιστοσελίδες που αναφέρουν συγκεκριμένες μόνο μάρκες μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, παρόλο που θα μπορούσατε να καταλήξετε και σε έναν σύνδεσμο προς την Jim Bob Ford’s Loan Shark Agency, η οποία θα σας δανείσει χρήματα για ένα οποιοδήποτε μεταχειρισμένο αυτοκίνητο. Η ερώτηση

«μεταχειρισμένα αυτοκίνητα» AND (Ford OR Buick) AND NOT φορτηγά

θα εξαφάνιζε τις ιστοσελίδες που αναφέρονται σε φορτηγά. Πολλές μηχανές αναζήτησης χρησιμοποιούν το $+$ (σύμβολο της πρόσθεσης) στη θέση του AND, και το $-$ (σύμβολο της αφαίρεσης) στη θέση του AND NOT.

Οι λογικοί σύνδεσμοι AND, OR και NOT είναι επίσης διαθέσιμοι σε πολλές γλώσσες προγραμματισμού, όπως και σε προγραμματιζόμενες αριθμομηχανές γραφικών. Οι σύνδεσμοι αυτοί, σε συμφωνία με τους πίνακες αληθείας που έχουμε ορίσει, δρουν πάνω σε συνδυασμούς αληθών και ψευδών εκφράσεων για να παράγουν μια συνολική τιμή αληθείας. Αυτές οι τιμές αληθείας παρέχουν τις δυνατότητες για τη λήψη απόφασης κάτι που είναι θεμελιώδες στη ροή ελέγχου των προγραμμάτων υπολογιστών. Έτσι, σε έναν υπό συνθήκη κλάδο ενός προγράμματος, αν η τιμή αληθείας της συνθήκης είναι αληθής, το πρόγραμμα στη συνέχεια θα εκτελέσει μια ενότητα του κώδικα. Αν η τιμή είναι ψευδής, το πρόγραμμα στη συνέχεια θα εκτελέσει μια διαφορετική ενότητα του κώδικα. Αν η συνθήκη αντικατασταθεί από μια απλούστερη ισοδύναμη έκφραση, η τιμή αληθείας της έκφρασης και επομένως η ροή ελέγχου του προγράμματος δεν επηρεάζεται, αλλά ο νέος κώδικας είναι πιο εύκολος στην κατανόηση και μπορεί να εκτελείται ταχύτερα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Θεωρήστε μια πρόταση ενός προγράμματος υπολογιστή που έχει τη μορφή

αν ((εκροή $>$ εισροή) **και όχι** ((εκροή $>$ εισροή) **και** (πίεση $<$ 1000)))
  κάνε κάτι
αλλιώς
  κάνε κάτι άλλο.

Εδώ η συνθήκη έχει τη μορφή

$$A \wedge (A \wedge B)'$$

όπου A είναι «εκροή $>$ εισροή» και B είναι «πίεση $<$ 1000». Αυτή η έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί αντικαθιστώντας κάποιους τύπους με άλλους ισοδύναμους.

$$\begin{aligned}
A \wedge (A \wedge B)' &\Leftrightarrow A \wedge (A' \vee B') && \text{(Νόμοι του De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (A \wedge A') \vee (A \wedge B') && \text{(ταυτολογία 3β)}\\
&\Leftrightarrow 0 \vee (A \wedge B') && \text{(ταυτολογία 5β)}\\
&\Leftrightarrow (A \wedge B') \vee 0 && \text{(ταυτολογία 1α)}\\
&\Leftrightarrow A \wedge B' && \text{(ταυτολογία 4α)}
\end{aligned}$$

Επομένως, η μορφή της πρότασης μπορεί να γραφεί ξανά ως εξής:

αν ((εκροή $>$ εισροή) **και όχι** (πίεση $<$ 1000))
  κάνε κάτι
αλλιώς
  κάνε κάτι άλλο.

Τέλος, οι πίνακες αληθείας για τη σύζευξη, τη διάζευξη και την άρνηση εφαρμόζονται από ηλεκτρονικές συσκευές που ονομάζονται «πύλες» (πύλη AND, πύλη OR, αντιστροφέας, αντίστοιχα) που αποτελούν θεμελιώδη κατασκευαστικά κομμάτια των κυκλωμάτων υπολογιστών. Θα δούμε στο Κεφάλαιο 8 (Άλγεβρα Boole και λογική υπολογιστών) πώς να συνδυάζουμε αυτές τις πύλες σε πιο σύνθετα λογικά κυκλώματα για να εκτελέσουμε συγκεκριμένες εργασίες.

Ένας αλγόριθμος

Για να ελέγξουμε αν ένας ο.σ.τ. είναι ταυτολογία, μπορούμε πάντοτε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας του. Για n προτασιακές μεταβλητές, θα χρειαστούμε 2^n γραμμές για τον πίνακα αληθείας. Υποθέστε, ωστόσο, ότι ο ο.σ.τ. έχει ως κύριο σύνδεσμο τη συνεπαγωγή, δηλαδή έχει τη μορφή $P \to Q$, όπου P και Q είναι και αυτοί ο.σ.τ. Τότε, για να καθορίσουμε αν ο ο.σ.τ. $P \to Q$ είναι ταυτολογία, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια πιο γρήγορη διαδικασία από την κατασκευή του πίνακα αληθείας. Υποθέτουμε ότι ο ο.σ.τ. $P \to Q$ *δεν* είναι ταυτολογία και ελέγχουμε αν αυτό οδηγεί σε μια αντίφαση. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η υπόθεση ότι ο ο.σ.τ. δεν είναι ταυτολογία αποτελεί επίσης αντίφαση. Έτσι, μετά από όλα αυτά, ο ο.σ.τ. $P \to Q$ πρέπει να είναι ταυτολογία.

Η υπόθεση ότι ο ο.σ.τ. $P \to Q$ δεν είναι ταυτολογία σημαίνει ότι μπορεί να πάρει ψευδείς τιμές και, από τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής, ο $P \to Q$ είναι ψευδής μόνο όταν ο P είναι αληθής και ο Q είναι ψευδής. Θέτοντας τον P αληθή και τον Q ψευδή, καθορίζουμε πιθανές τιμές αληθείας για τους ο.σ.τ. που απαρτίζουν τους P και Q. Συνεχίζουμε την εκχώρηση των τιμών αληθείας που καθορίστηκαν με αυτόν τον τρόπο έως ότου όλες οι εμφανίσεις των προτασιακών μεταβλητών να έχουν μία τιμή αληθείας. Αν, με τη διαδικασία αυτή, σε κάποια προτασιακή μεταβλητή έχουν εκχωρηθεί και η αληθής και η ψευδής τιμή αληθείας, τότε έχουμε μια αντίφαση, οπότε ο $P \to Q$ πρέπει να είναι ταυτολογία. Αλλιώς, έχουμε βρει έναν τρόπο να κάνουμε τον $P \to Q$ ψευδή, οπότε δεν είναι ταυτολογία.

Αυτό που περιγράψαμε πιο πάνω είναι ένα σύνολο εντολών (μια διαδικασία) για να προσδιορίσουμε αν ο ο.σ.τ. $P \to Q$ είναι ταυτολογία. Η διαδικασία αυτή μπορεί να εκτελεστεί ακολουθώντας μηχανικά τις εντολές, οπότε σε πεπερασμένο χρόνο θα έχουμε βρει την απάντηση. Με όρους της επιστήμης υπολογιστών, η διαδικασία αυτή είναι ένας *αλγόριθμος*.

ΟΡΙΣΜΟΣ *ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ*

Ένας **αλγόριθμος** είναι ένα σύνολο εντολών που μπορούν να εκτελεστούν μηχανικά σε πεπερασμένο χρόνο ώστε να λύσουν κάποιο πρόβλημα.

Οι αλγόριθμοι αποτελούν την καρδιά της επιστήμης υπολογιστών και θα έχουμε να πούμε πολλά για αυτούς κατά τη διάρκεια του βιβλίου. Πιθανόν να γνωρίζετε ήδη ότι η πιο σημαντική εργασία στη συγγραφή ενός προγράμματος υπολογιστών για τη λύση ενός προβλήματος είναι η επινόηση ενός αλγορίθμου (μιας διαδικασίας) που να παράγει τη λύση του προβλήματος.

Οι αλγόριθμοι συνήθως γράφονται σε μια μορφή που είναι μεταξύ μιας αμιγώς λεκτικής περιγραφής σε μία παράγραφο (όπως αυτός που αποφασίζει αν ο $P \to Q$ είναι ταυτολογία) και ενός προγράμματος υπολογιστή γραμμένου σε γλώσσα προγραμματισμού (το οποίο, όταν εκτελείται ουσιαστικά εκτελεί τα βήματα του αλγορίθμου). Η μορφή αυτή στην οποία γράφουμε τους αλγορίθμους λέγεται **ψευδοκώδικας**. Ένας αλγόριθμος γραμμένος σε ψευδοκώδικα μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητός ακόμα κι αν δεν γνωρίζετε τίποτα σχετικά με τον προγραμματισμό. Το μόνο που πρέπει να σημειώσουμε σχετικά με τον ψευδοκώδικα που χρησιμοποιείται σε αυτό το βιβλίο είναι ότι οι γραμμές που ξεκινούν με διπλό slash (//) είναι επεξηγηματικά σχόλια και όχι μέρος αυτού καθεαυτού του αλγορίθμου.

Ακολουθεί ο αλγόριθμος που αποφασίζει αν ο ο.σ.τ. $P \to Q$ είναι ταυτολογία σε μορφή ψευδοκώδικα.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ *TAUTOLOGYTEST (ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑΣ)*

TautologyTest (ο.σ.τ. P, ο.σ.τ. Q)
// Δοθέντων των ο.σ.τ. P και Q, αποφαίνεται αν ο ο.σ.τ. $P \to Q$ είναι ταυτολογία.

    // Υποθέστε ότι ο $P \to Q$ δεν είναι ταυτολογία
    P = αληθής   // εκχωρείστε την τιμή Α στον P
    Q = ψευδής   // εκχωρείστε την τιμή Ψ στον Q

    επανάλαβε
        για κάθε σύνθετο ο.σ.τ. στον οποίο έχει ήδη εκχωρηθεί μια τιμή αληθείας,
        εκχώρησε σε κάθε συνιστώσα του την τιμή αληθείας που προσδιορίζεται.
    έως ότου όλες οι εμφανίσεις των προτασιακών μεταβλητών έχουν τιμές αληθείας

    αν κάποια μεταβλητή έχει δύο τιμές αληθείας
    τότε //αντίφαση, ψευδής υπόθεση
        γράψε («ο ο.σ.τ. $P \to Q$ είναι ταυτολογία.»)
    αλλιώς //βρέθηκε τρόπος για να γίνει ο ψευδής
        γράψε («ο ο.σ.τ. $P \to Q$ δεν είναι ταυτολογία.»)
    τέλος αν
τέλος *TautologyTest*

Ο αλγόριθμος αρχικά εκχωρεί τις τιμές αληθείας «αληθής» στον P και «ψευδής» στον Q, όντας συνεπής με την υπόθεση ότι ο ο.σ.τ. $P \to Q$ δεν είναι ταυτολογία. Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος μπαίνει σε έναν βρόχο, όπου επαναλαμβάνει μια ακολουθία βημάτων έως ότου ικανοποιηθεί κάποια συνθήκη. Εντός του βρόχου, συνεχίζουν να γίνονται εκχωρήσεις τιμών αληθείας σε ολοένα και μικρότερες συνιστώσες των αρχικών ο.σ.τ. P και Q έως ότου όλες οι εμφανίσεις των μεμονωμένων προτασιακών μεταβλητών να έχουν τιμές αληθείας. Τότε, ο αλγόριθμος ελέγχει αν έχει προκύψει κάποια αντίφαση και καταγράφει το αποτέλεσμα σχετικά με το αν ο ο.σ.τ. $P \to Q$ είναι ταυτολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Θεωρήστε τον ο.σ.τ. $(A \to B) \to (B' \to A')$. Αυτός έχει τη μορφή που απαιτείται ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο *TautologyTest*, δηλαδή είναι της μορφής $P \to Q$, όπου P είναι ο ο.σ.τ. $A \to B$ και Q είναι ο ο.σ.τ. $B' \to A'$. Εκτελώντας τον αλγόριθμο, αρχικά εκχωρούμε τις τιμές αληθείας

$$A \to B \text{ αληθής και } B' \to A' \text{ ψευδής.}$$

Προχωρώντας στον βρόχο, η εκχώρηση της ψευδούς τιμής στη σύνθετη πρόταση $B' \to A'$ καθορίζει τις περαιτέρω εκχωρήσεις

$$B' \text{ αληθής και } A' \text{ ψευδής}$$

δηλαδή

$$B \text{ ψευδής και } A \text{ αληθής.}$$

Δουλεύοντας τώρα με τον P, οι τιμές A αληθής και $A \to B$ αληθής καθορίζουν την εκχώρηση

$$B \text{ αληθής.}$$

Στο σημείο αυτό, όλες οι εμφανίσεις των προτασιακών μεταβλητών έχουν τιμές αληθείας:

$$\begin{array}{ccc} A\text{–Α} \quad B\text{–Α} & & B\text{–Ψ} \quad A\text{–Α} \\ \underbrace{(A \to B)}_{\text{Α}} & \to & \underbrace{(B' \to A')}_{\text{Ψ}} \end{array}$$

Αυτό τερματίζει τον βρόχο. Στο τελικό βήμα του αλγορίθμου, στον B έχουν πλέον εκχωρηθεί αμφότερες οι τιμές *Α* και *Ψ*, οπότε ο αλγόριθμος αποφαίνεται ότι ο ο.σ.τ. $(A \to B) \to (B' \to A')$ είναι ταυτολογία. Πράγματι, αυτό το είδαμε και νωρίτερα (στην Εξάσκηση 7(δ)) κατασκευάζοντας τον πίνακα αληθείας.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Ο αλγόριθμος *TautologyTest* εφαρμόζεται μόνο όταν ο κύριος σύνδεσμος είναι η συνεπαγωγή (→).

Ο αλγόριθμος *TautologyTest* αποφαίνεται αν οι ο.σ.τ. που έχουν συγκεκριμένη μορφή, δηλαδή αυτοί των οποίων ο κύριος σύνδεσμος είναι η συνεπαγωγή (→), είναι ταυτολογίες. Ωστόσο, η διαδικασία όπου κατασκευάζουμε έναν πίνακα αληθείας και στη συνέχεια εξετάζουμε όλες τις τιμές αληθείας στην τελευταία στήλη αποτελεί έναν αλγόριθμο για να αποφασίζουμε αν ένας οποιοσδήποτε ο.σ.τ. είναι ταυτολογία. Ο δεύτερος αυτός αλγόριθμος είναι πιο ισχυρός αφού επιλύει ένα πιο γενικό πρόβλημα, αλλά ο αλγόριθμος *TautologyTest* είναι συνήθως πιο γρήγορος για τους ο.σ.τ. που εφαρμόζεται.

Μπορεί το «ΚΑΙ» κάποτε να γίνει «Ή»

Το 2003, η εταιρεία OfficeMax μήνυσε την κυβέρνηση των Ηνωμένων Πολιτειών (την Υπηρεσία Εσωτερικού Εισοδήματος) για μια επιστροφή του ειδικού φόρου κατανάλωσης τον οποίο η OfficeMax είχε πληρώσει για τηλεφωνικές υπηρεσίες. Αυτή δεν ήταν μια τετριμμένη οικονομική υπόθεση, καθώς η OfficeMax είχε πληρώσει 380.000 δολάρια ως ειδικό φόρο κατανάλωσης για τηλεφωνικές υπηρεσίες. Για να καταλάβουμε τη φύση της αντιδικίας, χρειαζόμαστε μια σύντομη ανασκόπηση του ομοσπονδιακού φόρου για τις τηλεφωνικές υπηρεσίες.

Ο φόρος για τις τηλεφωνικές υπηρεσίες θεσπίστηκε για πρώτη φορά από το Κογκρέσο το 1898 (22 χρόνια μετά την ανακάλυψη του τηλεφώνου από τον Alexander Graham Bell). Ο φόρος αυτός προοριζόταν για να βοηθήσει στην αποπληρωμή του ομοσπονδιακού χρέους που προέκυψε από τον πόλεμο Ισπανίας και Αμερικής και καταργήθηκε, όπως είχε σχεδιαστεί, το 1902. Τα επόμενα χρόνια, ο φόρος για τις τηλεφωνικές υπηρεσίες κυμαινόταν σε διάφορα ποσοστά όσο η κυβέρνηση υφίστατο χρέος. Ο φόρος επανήλθε ξανά το 1932 και από τότε, είτε με τη μια μορφή είτε με την άλλη, είναι σε ισχύ μέχρι σήμερα. Το Κογκρέσο όρισε δύο κατηγορίες φορολογήσιμων υπηρεσιών, την τοπική τηλεφωνική υπηρεσία και την «τηλεφωνική υπηρεσία με χρέωση» (κλήσεις μεγάλων αποστάσεων), και όρισε τον φόρο σε ποσοστό 3%. Ενδιαφέρον σε αυτή τη συζήτηση έχει ο ορισμός που έδωσε το Κογκρέσο εκείνη την εποχή στον όρο «τηλεφωνική υπηρεσία με χρέωση». Σύμφωνα με αυτόν, είναι «μια τηλεφωνική ποιοτική επικοινωνία για την οποία υπάρχει χρέωση που ποικίλλει ανάλογα με την απόσταση και τη διάρκεια μετάδοσης κάθε μεμονωμένης επικοινωνίας». Σημειώστε ότι το 1965 υπήρχε ουσιαστικά ένας και μοναδικός πάροχος τηλεφωνικών υπηρεσιών στις Ηνωμένες Πολιτείες, με το όνομα AT&T, και εκείνη την εποχή οι χρεώσεις της AT&T βασιζόταν και στη διάρκεια και στην απόσταση κάθε κλήσης. Γύρω στο 1990, η AT&T είχε χρεοκοπήσει και υπήρχαν αρκετές ανταγωνιστικές τηλεφωνικές εταιρείες. Επιπλέον, οι τηλεφωνικές εταιρείες ξεκίνησαν να χρεώνουν μια πάγια τιμή ανά λεπτό για εθνικές κλήσεις μεγάλων αποστάσεων. Οι τηλεφωνικές εταιρείες εισέπρατταν από τους πελάτες τους τον ομοσπονδιακό φόρο κατανάλωσης και τον απέδιδαν στην ομοσπονδιακή κυβέρνηση.

Η OfficeMax χρησιμοποίησε την MCI ως τηλεφωνικό πάροχο από το 1999 έως το 2002, διάστημα κατά το οποίο η MCI εισέπραττε τον ειδικό φόρο κατανάλωσης από την OfficeMax. Το 2003, η OfficeMax μήνυσε την ομοσπονδιακή κυβέρνηση ζητώντας την επιστροφή του ειδικού φόρου που είχε εισπράξει η MCI για τον λόγο ότι η MCI δεν παρείχε «τηλεφωνικές υπηρεσίες με χρέωση», όπως είχε οριστεί από το Κογκρέσο το 1965, κι αυτό επειδή η MCI χρέωνε μια τιμή βασισμένη όχι στον χρόνο και στην απόσταση αλλά μόνο στον χρόνο. Εδώ βρίσκεται το ζήτημα: Ποια είναι ακριβώς η σημασία της λέξης «και» στην πρόταση «ποικίλλει ανάλογα με την απόσταση *και* τη διάρκεια μετάδοσης κάθε μεμονωμένης επικοινωνίας»;

Το επιχείρημα της OfficeMax ήταν ότι η λέξη «και» έχει τη σημασία του συζευκτικού «και», όπως ακριβώς ορίζεται ο πίνακας αληθείας για το «και» στην τυπική λογική. Για να εφαρμοστεί ο φόρος θα έπρεπε η τηλεφωνική εταιρεία να χρεώνει τους πελάτες της μια τιμή βασισμένη και στον χρόνο και στην απόσταση.

Το επιχείρημα της Υπηρεσίας Εσωτερικού Εισοδήματος ήταν: σε άλλο σημείο της ίδιας νομοθεσίας, το Κογκρέσο χρησιμοποίησε το «και» με μια διαζευκτική έννοια όταν όρισε τις «υπηρεσίες επικοινωνίας» ως «τοπική τηλεφωνική υπηρεσία, τηλεφωνική υπηρεσία με χρέωση και υπηρεσία ανταλλαγής μέσω τηλετύπου». Εφόσον αυτές οι τρεις υπηρεσίες είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες, το «και» εδώ δεν θα μπορούσε να έχει τη σημασία της σύζευξης.

Η γνώμη της πλειοψηφίας στο Εφετείο των Ηνωμένων Πολιτειών το 2005 συμφώνησε με την OfficeMax. Η επιχειρηματολογία της ήταν: (1) οι ορισμοί των λεξικών, οι νομικοί οδηγοί χρήσης και η νομολογία ισχυρίζονται ότι το «και» έχει γενικώς την έννοια της σύζευξης, (2) η χρήση του «και» με την έννοια της σύζευξης είναι συμβατή με τον μηχανισμό χρέωσης που χρησιμοποιήθηκε από τη μοναδική τηλεφωνική εταιρεία που υπήρχε την εποχή που γράφτηκε ο νόμος, (3) η διαζευκτική ερμηνεία θα επέτρεπε μια τηλεφωνική χρέωση βασισμένη μόνο στην απόσταση, η οποία είναι μια γελοία ιδέα και σίγουρα το Κογκρέσο δεν σκόπευε σε κάτι τέτοιο και (4) τα κατώτερα δικαστήρια είχαν υποστηρίξει την OfficeMax. Εν συντομία, η Υπηρεσία Εσωτερικού Εισοδήματος έχασε την υπόθεση, καθώς και αρκετές παρόμοιες υποθέσεις, και το 2006 ανακοίνωσε ότι η τηλεφωνική υπηρεσία που χρεώνεται βάσει του χρόνου και όχι της απόστασης δεν είναι φορολογήσιμη. (Ο ειδικός φόρος κατανάλωσης 3% στην τοπική τηλεφωνική υπηρεσία είναι ακόμα σε ισχύ.)

Ωστόσο, πρέπει να εκτιμήσουμε το χιούμορ της αντίθετης άποψης στην υπόθεση της OfficeMax: «Ένας οικοδεσπότης ρώτησε δύο υποψήφιους καλεσμένους τι θα ήθελαν να πιουν. Ο ένας είπε «Μου αρέσει το ουίσκι με νερό». Ο άλλος είπε «Μου αρέσει η μπύρα και το κρασί». Όταν ο δεύτερος καλεσμένος έφτασε στην εκδήλωση, ο οικοδεσπότης τού σέρβιρε ένα ποτήρι μπύρα αναμεμειγμένη με κρασί. «Τι είναι αυτό το απαίσιο ποτό;» αναρωτήθηκε ο καλεσμένος, στον οποίο ο οικοδεσπότης απάντησε: «Είπατε ότι σας αρέσει η μπύρα και το κρασί». Μερικές φορές όντως χρησιμοποιούμε το «και» με μια διαζευκτική έννοια. Έτσι, λοιπόν, αυτή είναι μια νομική (και οικονομική) υπόθεση που εξαρτήθηκε από τον πίνακα αληθείας του λογικού συνδέσμου ΚΑΙ. Πόσο φοβερό είναι αυτό;

OFFICEMAX, INC., Ενάγων, ΗΝΩΜΕΝΕΣ ΠΟΛΙΤΕΙΕΣ ΑΜΕΡΙΚΗΣ, Εναγόμενος, Νο. 04-4009, Εφετείο των Ηνωμένων Πολιτειών, Έκτος γύρος, Συζητήθηκε: 29 Ιουλίου 2005, Αποφασίστηκε και κατατέθηκε: 2 Νοεμβρίου 2005, 428 F.3d583. Διαδικτυακά στο http://law.justia.com/cases/federal/appelate-courts/F3/428/583/565375/.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1 Ανασκόπηση

ΤΕΧΝΙΚΕΣ

- Κατασκευή πινάκων αληθείας για σύνθετους ο.σ.τ.
- Αναγνώριση ταυτολογιών και αντιφάσεων.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ

- Οι ο.σ.τ. είναι συμβολικές αναπαραστάσεις των προτάσεων.
- Οι τιμές αληθείας για σύνθετους ο.σ.τ. εξαρτώνται από τις τιμές αληθείας των συνιστωσών τους και το είδος των συνδέσμων που χρησιμοποιούνται.
- Οι ταυτολογίες είναι «εγγενώς αληθείς» ο.σ.τ., δηλαδή αληθείς για όλες τις τιμές αληθείας των μεταβλητών τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

1. Ποιες από τις ακόλουθες φράσεις είναι προτάσεις;
   α. Το φεγγάρι είναι φτιαγμένο από πράσινο τυρί.
   β. Αυτός είναι σίγουρα ένας ψηλός άνδρας.
   γ. Το 2 είναι πρώτος αριθμός.
   δ. Ο αγώνας θα έχει τελειώσει μέχρι τις 4:00.
   ε. Την επόμενη χρονιά τα επιτόκια θα αυξηθούν.
   στ. Την επόμενη χρονιά τα επιτόκια θα μειωθούν.
   ζ. $x^2 - 4 = 0$
2. Ποια είναι η τιμή αληθείας για κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις;
   α. Το 8 είναι άρτιος ή το 6 είναι περιττός.
   β. Το 8 είναι άρτιος και το 6 είναι περιττός.
   γ. Το 8 είναι περιττός ή το 6 είναι περιττός.
   δ. Το 8 είναι περιττός και το 6 είναι περιττός.
   ε. Αν το 8 είναι περιττός, τότε το 6 είναι περιττός.
   στ. Αν το 8 είναι άρτιος, τότε το 6 είναι περιττός.
   ζ. Αν το 8 είναι περιττός, τότε το 6 είναι άρτιος.
   η. Αν το 8 είναι περιττός και το 6 είναι άρτιος, τότε $8 < 6$.
3. Δοθεισών των τιμών αληθείας A αληθής, B ψευδής και Γ αληθής, ποια είναι η τιμή αληθείας για καθέναν από τους ακόλουθους τύπους;
   α. $A \wedge (B \vee \Gamma)$ β. $(A \wedge B) \vee \Gamma)$ γ. $(A \wedge B)' \vee \Gamma$ δ. $A' \vee (B' \vee \Gamma)'$
4. Δοθεισών των τιμών αληθείας A ψευδής, B αληθής και Γ αληθής, ποια είναι η τιμή αληθείας για καθέναν από τους ακόλουθους τύπους;
   α. $A \rightarrow (B \vee \Gamma)$ β. $(A \vee B) \rightarrow \Gamma)$ γ. $\Gamma \rightarrow (A' \vee B')$ δ. $A \vee (B' \rightarrow \Gamma)$
5. Γράψτε ξανά καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις στη μορφή «Αν A, τότε B».
   α. Η υγιής ανάπτυξη των φυτών προκύπτει από την επάρκεια νερού.
   β. Η αυξημένη διαθεσιμότητα πληροφοριών είναι μια αναγκαία συνθήκη για τις περαιτέρω τεχνολογικές εξελίξεις.
   γ. Τα σφάλματα εμφανίζονταν μόνο αν υπήρχε τροποποίηση του προγράμματος.