

9

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΠΟΛΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- 9.1 Παραμετρικές εξισώσεις
- 9.2 Εφαπτόμενες ευθείες
- 9.3 Μήκος τόξου–Εμβαδόν επιφάνειας στερεού εκ περιστροφής
- 9.4 Πολικές συντεταγμένες
- 9.5 Πολικές εξισώσεις–Παραμετρικές εξισώσεις πολικής εξίσωσης–Μήκος τόξου σε πολικές εξισώσεις
- 9.6 Εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες
- 9.7 Πολική εξίσωση κωνικής τομής
 - Σύνοψη κεφαλαίου
 - Εργασία κεφαλαίου



ΕΡΓΑΣΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στην εργασία του κεφαλαίου εξετάζουμε τον σχεδιασμό αρκετών διαφορετικών μικροφώνων και της κατεύθυνσης από την οποία προέρχεται ο ήχος τον οποίο ενισχύουν.

Γραφικές παραστάσεις με πολικές συντεταγμένες και μικρόφωνα

Αν έχετε φτάσει αρκετά νωρίς σε κάποια συναυλία ή κάποια παράσταση κι έχετε παρακολουθήσει τους τεχνικούς να στήνουν το ηχητικό σύστημα, θα έχετε αντιληφθεί κάποια πράγματα που αφορούν την επίτευξη της βέλτιστης ηχητικής ποιότητας. Έχουν σχεδιαστεί διαφορετικά μικρόφωνα για να λαμβάνουν τον ήχο από διαφορετικές κατευθύνσεις και οι τεχνικοί ήχου γνωρίζουν ότι η επιλογή και η τοποθέτηση των μικροφώνων και των μόνιτορ (ηχεία που απευθύνονται στους μουσικούς ώστε να ακούν τον εαυτό τους και τα υπόλοιπα όργανα) προσαρμόζεται ανάλογα με τον συγκεκριμένο σκοπό και τον χώρο εκδηλώσεων. Οι ίδιοι παράγοντες επιλογής παίζουν ρόλο και στην κατασκευή των κινητών τηλεφώνων και των συσκευών Bluetooth, οι οποίες πρέπει να ενισχύουν τον ήχο που προέρχεται από το στόμα μας και να ελαχιστοποιούν τους περιβαλλοντικούς ήχους: σκύλοι που γαβγίζουν, θορυβώδη φορτηγά και τυχαίοι διάλογοι που πραγματοποιούνται γύρω μας.

Η επιλογή και η τοποθέτηση του κατάλληλου μικροφώνου και του κατάλληλου ηχείου ώστε να επιτευχθεί ένας συγκεκριμένος στόχος απαιτεί την κατανόηση της κατεύθυνσης του ήχου και του σημείου από το οποίο προέρχεται.

Μέχρι τώρα έχουμε εργαστεί κυρίως με αυστηρά ορισμένες συναρτήσεις $y = f(x)$, όπου τα x και y αντιστοιχούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Εφόσον οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών ικανοποιούν το κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας, διάφορες άλλες γραφικές παραστάσεις, όπως π.χ. οι κύκλοι, δεν μπορούν να αναπαρασταθούν χρησιμοποιώντας μία μόνο αυστηρά ορισμένη συνάρτηση. Για να αντιμετωπίσουμε το ζήτημα αυτό, εισάγουμε τις *παραμετρικές εξισώσεις*, έναν τρόπο να παριστούμε γραφικές παραστάσεις που δεν αντιστοιχούν αναγκαστικά σε συναρτήσεις. Επιπλέον, οι παραμετρικές εξισώσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες εφόσον μας επιτρέπουν να μοντελοποιήσουμε την κίνηση πάνω σε μια καμπύλη και να προσδιορίσουμε όχι μόνο τη θέση ενός αντικειμένου (ενός σημείου) αλλά και τη χρονική στιγμή στην οποία βρίσκεται εκεί.

Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου θα εξετάσουμε ένα εναλλακτικό σύστημα συντεταγμένων, τις *πολικές συντεταγμένες*. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, μπορούμε να παραστήσουμε γραφικές παραστάσεις τις οποίες θα ήταν εξαιρετικά περίπλοκο, ίσως ακόμα και αδύνατο, να παραστήσουμε με καρτεσιανές συντεταγμένες.

9.1 Παραμετρικές εξισώσεις

ΣΤΟΧΟΙ Όταν ολοκληρώσετε αυτή την ενότητα, θα πρέπει να μπορείτε:

1. Να σχεδιάζετε τη γραφική παράσταση παραμετρικών εξισώσεων (σ. 2)
2. Να βρίσκετε μια καρτεσιανή εξίσωση για μια καμπύλη που παριστάνεται παραμετρικά (σ. 3)
3. Να χρησιμοποιείτε τον χρόνο ως παράμετρο σε παραμετρικές εξισώσεις (σ. 7)
4. Να μετατρέπετε μια καρτεσιανή εξίσωση σε παραμετρικές εξισώσεις (σ. 7)

Η γραφική παράσταση μιας εξίσωσης της μορφής $y = f(x)$, όπου η f είναι μια συνάρτηση, δεν τέμνεται περισσότερες από μία φορές με μια κατακόρυφη γραμμή. Υπάρχουν ωστόσο πολλές γραφικές παραστάσεις, όπως οι κύκλοι και κάποιες παραβολές, που δεν ικανοποιούν το κριτήριο της κατακόρυφης γραμμής. Για να μελετήσουμε αυτές τις γραφικές παραστάσεις, χρειαζόμαστε ένα διαφορετικό μοντέλο. Ένα από τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιεί ένα ζεύγος εξισώσεων και μια τρίτη μεταβλητή, η οποία ονομάζεται *παράμετρος*.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Υποθέτουμε ότι οι $x = x(t)$ και $y = y(t)$ είναι δύο συναρτήσεις μιας τρίτης μεταβλητής, t , που ονομάζεται *παράμετρος*, και οι οποίες ορίζονται στο ίδιο διάστημα I . Τότε οι εξισώσεις:

$$\boxed{x = x(t) \quad y = y(t)}$$

όπου το t ανήκει στο I , ονομάζονται *παραμετρικές εξισώσεις* και η γραφική παράσταση των σημείων που ορίζονται από την:

$$\boxed{(x, y) = (x(t), y(t))}$$

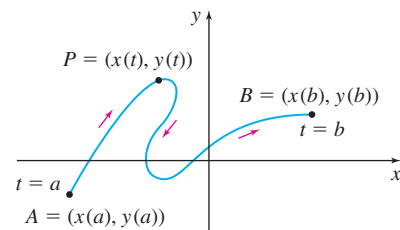
ονομάζεται *επίπεδη καμπύλη*.

1. Σχεδίαση της γραφικής παράστασης παραμετρικών εξισώσεων

Οι παραμετρικές εξισώσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην περιγραφή της κίνησης πάνω σε μια καμπύλη. Υποθέτουμε ότι ένα σώμα κινείται πάνω σε μια καμπύλη η οποία παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

όπου η κάθε συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα $a \leq t \leq b$. Για μια δοσμένη τιμή του t , η τιμή της $x = x(t)$ μαζί με την τιμή της $y = y(t)$ προσδιορίζουν ένα σημείο (x, y) πάνω στην καμπύλη. Στην πραγματικότητα, καθώς το t μεταβάλλεται στο διάστημα από το $t = a$ μέχρι το $t = b$, οι διαδοχικές τιμές του t προσδιορίζουν την κίνηση του σώματος που κινείται πάνω στην καμπύλη. Δείτε το Σχήμα 1. Το βέλος δείχνει την κατεύθυνση, δηλαδή τον προσανατολισμό, του σώματος καθώς κινείται από το σημείο A προς το σημείο B .



Σχήμα 1 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Σχεδίαση μιας επίπεδης καμπύλης

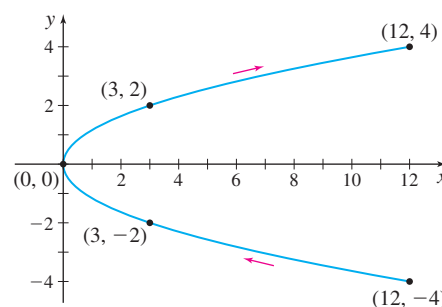
Σχεδιάστε την επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x(t) = 3t^2 \quad y(t) = 2t \quad -2 \leq t \leq 2$$

Υποδείξτε τον προσανατολισμό της καμπύλης.

Λύση Σε κάθε αριθμό t , με $-2 \leq t \leq 2$, αντιστοιχεί ένας αριθμός x και ένας αριθμός y που είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου (x, y) πάνω στην καμπύλη. Στον Πίνακα 1 καταχωρούμε διάφορες επιλογές της παραμέτρου t και των αντίστοιχων τιμών των x και y .

Η κίνηση αρχίζει όταν είναι $t = -2$ στο σημείο $(12, -4)$ και σταματά όταν είναι $t = 2$ στο σημείο $(12, 4)$. Στο Σχήμα 2 βλέπουμε την επίπεδη καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 3t^2$ και $y(t) = 2t$. Τα βέλη υποδεικνύουν τον προσανατολισμό της επίπεδης καμπύλης καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου t .



Σχήμα 2 $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t$, $-2 \leq t \leq 2$

Πίνακας 1

t	$x(t) = 3t^2$	$y(t) = 2t$	(x, y)
-2	12	-4	(12, -4)
-1	3	-2	(3, -2)
0	0	0	(0, 0)
1	3	2	(3, 2)
2	12	4	(12, 4)

2. Εύρεση καρτεσιανής εξίσωσης για καμπύλη που παριστάνεται παραμετρικά

Πρέπει να είστε εξοικειωμένοι με την επίπεδη καμπύλη στο Σχήμα 2. Για να την αναγνωρίσουμε, θα βρούμε την αντίστοιχη καρτεσιανή εξίσωση εξαλείφοντας την παράμετρο t από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x(t) = 3t^2 \quad y(t) = 2t \quad -2 \leq t \leq 2$$

Αρχικά λύνουμε την $y = 2t$ ως προς t και βρίσκουμε $t = \frac{y}{2}$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το $t = \frac{y}{2}$ στην εξίσωση $x = 3t^2$.

$$x = 3t^2 = 3 \left(\frac{y}{2} \right)^2 = \frac{3y^2}{4}$$

Η εξίσωση $x = \frac{3y^2}{4}$ αντιστοιχεί σε μια παραβολή της οποίας η κορυφή της βρίσκεται στην αρχή των αξόνων κι έχει ως άξονα συμμετρίας των άξονα των x . Ονομάζουμε την εξίσωση αυτή **καρτεσιανή εξίσωση** της καμπύλης για να τη διακρίνουμε από τις παραμετρικές εξισώσεις.

Παρατηρήστε ότι η επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t$, με $-2 \leq t \leq 2$, είναι ένα τμήμα μόνο της παραβολής $x = \frac{3y^2}{4}$. Γενικά, η γραφική παράσταση της καρτεσιανής εξίσωσης την οποία βρίσκουμε εξαλείφοντας τις παραμέτρους περιλαμβάνει περισσότερα σημεία από την επίπεδη καμπύλη που ορίζεται χρησιμοποιώντας παραμετρικές εξισώσεις. Συνεπώς, όταν σχεδιάζουμε μια επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από μια καρτεσιανή εξίσωση, ίσως πρέπει να βάλουμε περιορισμούς στη γραφική παράσταση ώστε να αντιστοιχεί στις παραμετρικές εξισώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Καρτεσιανή εξίσωση για επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται παραμετρικά

Βρείτε μια καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x(t) = R \cos t \quad y(t) = R \sin t$$

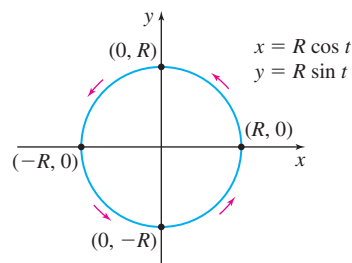
όπου το $R > 0$ είναι σταθερά. Σχεδιάστε την επίπεδη καμπύλη και δείξτε τον προσανατολισμό της.

Λύση Η παρουσία των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο στις παραμετρικές εξισώσεις υποδεικνύουν τη χρήση της Πυθαγόρειας ταυτότητας, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Τότε είναι:

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1 \quad \cos t = \frac{x}{R}, \quad \sin t = \frac{y}{R}$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Η γραφική παράσταση της καρτεσιανής εξίσωσης είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R . Στις παραμετρικές εξισώσεις, καθώς αυξάνεται η παράμετρος t , τα σημεία (x, y) χαράσσονται πάνω στον κύκλο αριστερόστροφα, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3 Ο προσανατολισμός είναι αριστερόστροφος.

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 9, 15.

Προσέξτε ότι, κατά την ανάλυση των παραμετρικών εξισώσεων στο Παράδειγμα 2, δεν υπάρχουν περιορισμοί για το t , οπότε το t παίρνει τιμές από το $-\infty$ μέχρι το ∞ . Ως αποτέλεσμα, ο κύκλος επαναλαμβάνεται κάθε φορά που το t αυξάνεται κατά 2π .

Αν θέλουμε να περιγράψουμε μια καμπύλη που να περιλαμβάνει ακριβώς μία περιστροφή με αριστερόστροφη φορά, τότε πρέπει να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού σε ένα διάστημα με μήκος 2π . Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις:

$$x(t) = R \cos t \quad y(t) = R \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Τώρα πλέον η επίπεδη καμπύλη αρχίζει όταν $t = 0$ στο $(R, 0)$ και σταματά όταν $t = 2\pi$ στο $(R, 0)$.

Αν θέλαμε η καμπύλη να περιλαμβάνει ακριβώς τρεις περιστροφές με αριστερόστροφη φορά, τότε πρέπει να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού σε ένα διάστημα με μήκος 6π . Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις $x(t) = R \cos t$, $y(t) = R \sin t$, με $-2\pi \leq t \leq 4\pi$ ή $0 \leq t \leq 6\pi$ ή $2\pi \leq t \leq 8\pi$, ή οποιοδήποτε τυχαίο διάστημα μήκους 6π .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Καρτεσιανή εξίσωση για επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται παραμετρικά

Βρείτε τις καρτεσιανές εξισώσεις για τις επίπεδες καμπύλες που παριστάνονται από τις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις. Σχεδιάστε κάθε καμπύλη και δείξτε τον προσανατολισμό της.

α) $x(t) = R \cos t$ $y(t) = R \sin t$, με $0 \leq t \leq \pi$ και $R > 0$

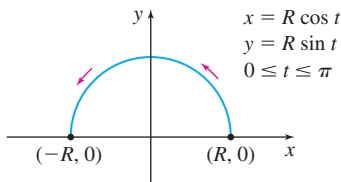
β) $x(t) = R \sin t$ $y(t) = R \cos t$, με $0 \leq t \leq \pi$ και $R > 0$

Λύση α) Απαλείφουμε την παράμετρο t χρησιμοποιώντας την Πυθαγόρεια ταυτότητα.

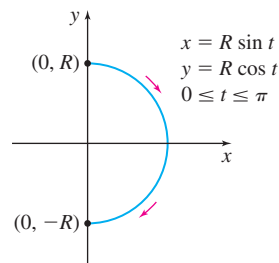
$$\begin{aligned} \cos^2 t + \sin^2 t &= 1 \\ \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 &= 1 \quad \cos t = \frac{x}{R}, \quad \sin t = \frac{y}{R} \\ x^2 + y^2 &= R^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Η καρτεσιανή εξίσωση παριστάνει ένα κύκλο με ακτίνα R και κέντρο την αρχή των αξόνων. Στις παραμετρικές εξισώσεις είναι $0 \leq t \leq \pi$, οπότε η καμπύλη αρχίζει όταν $t = 0$ στο σημείο $(R, 0)$, περνάει από το σημείο $(0, R)$ όταν $t = \frac{\pi}{2}$, και σταματάει όταν $t = \pi$ στο σημείο $(-R, 0)$. Η καμπύλη είναι ένα άνω ημικύκλιο με ακτίνα R με *αριστερόστροφο* προσανατολισμό, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 4. Αν λύσουμε την εξίσωση (1) ως προς y , βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση του ημικυκλίου:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{όπου } -R \leq x \leq R$$



Σχήμα 4 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$



Σχήμα 5 $x = \sqrt{R^2 - y^2}$, $-R \leq y \leq R$

β) Απαλείφουμε την παράμετρο t όπως στο ερώτημα α), και βρίσκουμε:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (2)$$

Η καρτεσιανή εξίσωση παριστάνει ένα κύκλο με ακτίνα R και κέντρο την αρχή των αξόνων. Στις παραμετρικές εξισώσεις είναι $0 \leq t \leq \pi$, οπότε η καμπύλη αρχίζει όταν $t = 0$ στο σημείο $(R, 0)$, περνάει από το σημείο $(0, R)$ όταν $t = \frac{\pi}{2}$ και σταματάει όταν $t = \pi$ στο σημείο $(-R, 0)$. Η καμπύλη είναι ένα δεξί ημικύκλιο με ακτίνα R με *δεξιόστροφο* προσανατολισμό, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 5. Αν λύσουμε τη σχέση (2) ως προς y , βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση του ημικυκλίου:

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} \quad \text{όπου } -R \leq y \leq R$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις δεν είναι μοναδικές. Δηλαδή, διαφορετικές παραμετρικές εξισώσεις μπορεί να αντιστοιχούν στην ίδια γραφική παράσταση. Να άλλα δύο παραδείγματα παραμετρικών εξισώσεων που αντιστοιχούν στο Σχήμα 5:

- $x(t) = R \sin t$ $y(t) = -R \cos(\pi - t)$ $0 \leq t \leq \pi$
- $x(t) = R \sin(3t)$ $y(t) = R \cos(3t)$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Στο Παράδειγμα 3α εκφράσαμε την καρτεσιανή εξίσωση ως συνάρτηση $y = f(x)$ και στο β) την εκφράσαμε ως συνάρτηση $x = g(y)$.

Φυσικά υπάρχουν και άλλα τέτοια παραδείγματα.

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 17.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Καρτεσιανή εξίσωση για επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται παραμετρικά

α) Βρείτε μια καρτεσιανή εξίσωση της επίπεδης καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x(t) = \cos(2t) \quad y(t) = \sin t \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της καρτεσιανής εξίσωσης.

γ) Προσδιορίστε τους περιορισμούς για τα x και y ώστε η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στην καρτεσιανή εξίσωση να είναι ίδια με την επίπεδη καμπύλη που περιγράφεται από τις:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

δ) Σχεδιάστε την επίπεδη καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = \cos(2t) \quad y = \sin t \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

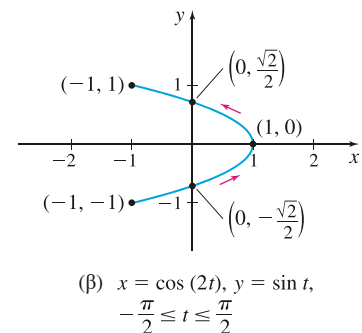
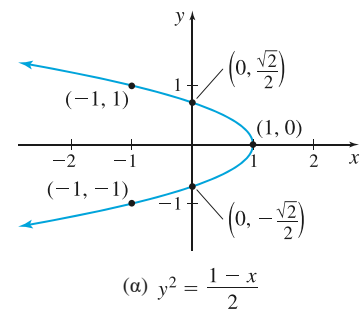
Λύση α) Εδώ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πυθαγόρεια ταυτότητα ώστε να εξαλείψουμε την παράμετρο t εφόσον τα $\cos(2t)$ και $\sin t$ έχουν διαφορετικά ορίσματα. Χρησιμοποιούμε όμως μια τριγωνομετρική ταυτότητα που περιλαμβάνει τα $\cos(2t)$ και $\sin t$, δηλαδή την $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{array}{ccc} y^2 = \sin^2 t & = & \frac{1 - \cos(2t)}{2} = \frac{1 - x}{2} \\ \uparrow & & \uparrow \\ y(t) = \sin t & & x(t) = \cos(2t) \end{array}$$

β) Η καμπύλη που παριστάνεται από την καρτεσιανή εξίσωση $y^2 = \frac{1-x}{2}$ είναι η παραβολή που βλέπουμε στο Σχήμα 6α).

γ) Η επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις δεν περιλαμβάνει όλα τα σημεία της παραβολής. Εφόσον είναι $x(t) = \cos(2t)$ και $-1 \leq \cos(2t) \leq 1$, τότε $-1 \leq x \leq 1$. Επίσης, εφόσον $y(t) = \sin t$, τότε είναι $-1 \leq y \leq 1$. Τέλος, η καμπύλη χαράσσεται ακριβώς μία φορά με αριστερόστροφη φορά από το σημείο $(-1, -1)$ (όταν $t = -\frac{\pi}{2}$) μέχρι το σημείο $(-1, 1)$ (όταν $t = \frac{\pi}{2}$).

δ) Η επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις δοσμένες παραμετρικές εξισώσεις είναι τμήμα της παραβολής που βλέπουμε στο Σχήμα 6β).



Σχήμα 6

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 21.

3. Χρήση του χρόνου ως παραμέτρου σε παραμετρικές εξισώσεις

Αν η παράμετρος t αντιπροσωπεύει τον χρόνο, τότε οι παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται με τον χρόνο οι συντεταγμένες x και y ενός σώματος που κινείται. Η κίνηση αυτή γενικά ονομάζεται **καμπυλόγραμμη κίνηση**. Η περιγραφή της καμπυλόγραμμης κίνησης με τη χρήση παραμετρικών εξισώσεων δεν καθορίζει μόνο το *που* βρίσκεται το σώμα, δηλαδή τη θέση του (x, y) , αλλά επίσης το *πότε* βρίσκεται εκεί, δηλαδή τον χρόνο t . Μια καρτεσιανή εξίσωση μας δίνει μόνο τη θέση του σώματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Χρήση του χρόνου ως παραμέτρου σε παραμετρικές εξισώσεις

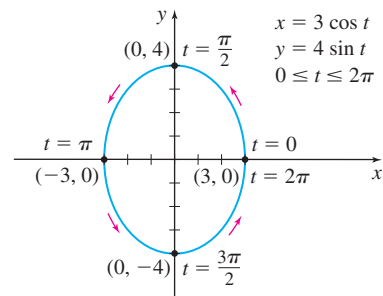
Περιγράψτε την κίνηση ενός σώματος που κινείται πάνω σε μια καμπύλη και τη χρονική στιγμή t έχει συντεταγμένες:

$$x(t) = 3 \cos t \quad y(t) = 4 \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Λύση Απαλείφουμε την παράμετρο t χρησιμοποιώντας την Πυθαγόρεια ταυτότητα: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \cos t = \frac{x}{3}, \quad \sin t = \frac{y}{4}$$

Η επίπεδη καμπύλη είναι η έλλειψη που βλέπουμε στο Σχήμα 7. Όταν $t = 0$, το σώμα βρίσκεται στο σημείο $(3, 0)$. Όταν αυξάνεται το t , το σώμα κινείται πάνω στην έλλειψη με αριστερόστροφη φορά και φτάνει στο σημείο $(0, 4)$ όταν $t = \frac{\pi}{2}$, στο σημείο $(-3, 0)$ όταν $t = \pi$, στο σημείο $(0, -4)$ όταν $t = \frac{3\pi}{2}$ και επιστρέφει στο αρχικό σημείο $(3, 0)$ όταν $t = 2\pi$.



Σχήμα 7 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 41.

4. Μετατροπή μιας καρτεσιανής εξίσωσης σε παραμετρικές εξισώσεις

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την καρτεσιανή εξίσωση που αντιστοιχεί σε μια καμπύλη. Τότε μπορούμε να παραστήσουμε την καμπύλη αυτή με διάφορες παραμετρικές εξισώσεις.

Για παράδειγμα, αν η καμπύλη ορίζεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$, ένας τρόπος να βρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις είναι να θέσουμε $x = t$. Τότε είναι $y = f(t)$ και οι:

$$x(t) = t \quad y(t) = f(t)$$

όπου το t ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Εύρεση παραμετρικών εξισώσεων για μια καμπύλη που παριστάνεται από καρτεσιανή εξίσωση

Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις που να αντιστοιχούν στην εξίσωση $y = x^2 - 4$.

Λύση Θέτουμε $x = t$. Τότε οι παραμετρικές εξισώσεις είναι οι εξής:

$$x(t) = t \quad y(t) = t^2 - 4 \quad -\infty < t < \infty$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε παραμετρικές για την $y = x^2 - 4$ θέτοντας $x = t^3$. Τότε οι παραμετρικές εξισώσεις είναι οι εξής:

$$x(t) = t^3 \quad y(t) = t^6 - 4 \quad -\infty < t < \infty$$

Παρόλο που η επιλογή για το x μπορεί να φαίνεται αυθαίρετη, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν επιλέγουμε με τι θα αντικαταστήσουμε το x . Η αντικατάσταση πρέπει να είναι μια συνάρτηση που να επιτρέπει στο x να πάρει όλες τις τιμές στο πεδίο ορισμού της f . Για παράδειγμα, αν θέσουμε $x(t) = t^2$, τότε $y(t) = t^4 - 4$. Αλλά οι $x(t) = t^2$, $y(t) = t^4 - 4$ δεν είναι παραμετρικές εξισώσεις για ολόκληρη την $y = x^2 - 4$, εφόσον παίρνουμε μόνο τα σημεία για τα οποία ισχύει ότι $x \geq 0$.

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 47.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Εύρεση παραμετρικών εξισώσεων για ένα σώμα που κινείται

Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις που περιγράφουν την εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, όπου η παράμετρος t είναι ο χρόνος σε s και:

- Η κίνηση πάνω στην έλλειψη έχει αριστερόστροφη φορά, αρχίζει στο σημείο $(2, 0)$ και απαιτείται 1 s για μια πλήρη περιστροφή.
- Η κίνηση πάνω στην έλλειψη έχει δεξιόστροφη φορά, αρχίζει στο σημείο $(0, 1)$ και απαιτούνται 2 s για μια πλήρη περιστροφή.

Λύση α) Στο Σχήμα 8 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Η επιλογή για τα $x = x(t)$ και $y = y(t)$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ όπως και την προϋπόθεση ότι, όταν $t = 0$, τότε $x = 2$ και $y = 0$. Οπότε θέτουμε:

$$x(t) = 2 \cos(\omega t) \quad \text{και} \quad y(t) = \sin(\omega t)$$

για κάποιο σταθερό ω .

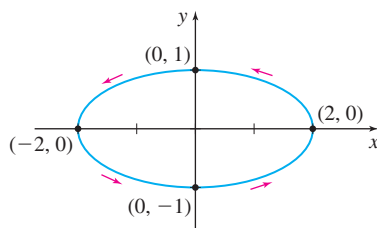
Για να είναι αριστερόστροφη η κίνηση καθώς το t αυξάνεται από το 0, η τιμή του x πρέπει να μειώνεται ενώ η τιμή του y να αυξάνεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει $\omega > 0$. [Αντιλαμβάνεστε τον λόγο; Αν $\omega > 0$, τότε το $x = 2 \cos(\omega t)$ μειώνεται όταν το $t > 0$ βρίσκεται κοντά στο μηδέν, ενώ το $y = \sin(\omega t)$ αυξάνεται όταν το $t > 0$ βρίσκεται κοντά στο μηδέν.]

Τέλος, εφόσον η μία περιστροφή απαιτεί 1 s, η περίοδος είναι $\frac{2\pi}{\omega} = 1$, οπότε $\omega = 2\pi$. Οι παραμετρικές εξισώσεις που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις που δίνονται στο α) είναι οι εξής:

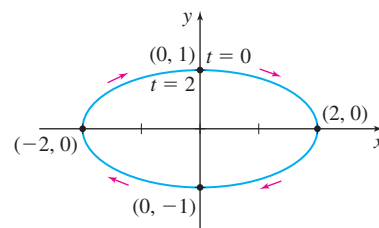
$$x(t) = 2 \cos(2\pi t) \quad y(t) = \sin(2\pi t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;

Η περίοδος της ημιτονοειδούς γραφικής παράστασης συζητάται στην Ενότητα Ρ.6.



Σχήμα 8 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$



Σχήμα 9 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

β) Στο Σχήμα 9 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Η επιλογή για τα $x = x(t)$ και $y = y(t)$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ όπως και την προϋπόθεση ότι, όταν $t = 0$, τότε $x = 0$ και $y = 1$. Οπότε θέτουμε:

$$x(t) = 2 \sin(\omega t) \quad \text{και} \quad y(t) = \cos(\omega t)$$

για κάποιο σταθερό ω .

Για να είναι αριστερόστροφη η κίνηση καθώς το t αυξάνεται από το 0, η τιμή του x πρέπει να αυξάνεται, ενώ η τιμή του y να μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει $\omega > 0$.

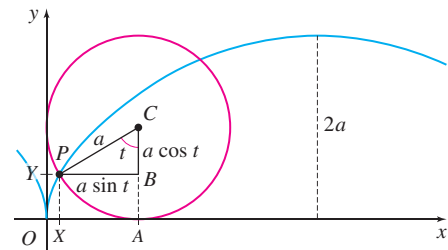
Τέλος, εφόσον η μία περιστροφή απαιτεί 2 s, η περίοδος είναι $\frac{2\pi}{\omega} = 2$, οπότε $\omega = \pi$. Οι παραμετρικές εξισώσεις που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις που δίνονται στο β) είναι οι εξής:

$$x(t) = 2 \sin(\pi t) \quad y(t) = \cos(\pi t) \quad 0 \leq t \leq 2$$

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 55.

Το κυκλοειδές

Υποθέτουμε ότι ένας κύκλος κυλάει πάνω σε μια οριζόντια ευθεία χωρίς να ολισθαίνει. Καθώς ο κύκλος κυλάει πάνω στην ευθεία, ένα σημείο P που βρίσκεται πάνω στον κύκλο χαράσσει (διαγράφει) μια καμπύλη που ονομάζεται **κυκλοειδής**, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 10. Είναι δύσκολο να βρούμε μια εξίσωση του κυκλοειδούς με καρτεσιανές συντεταγμένες, είναι όμως σχετικά εύκολο να βρούμε μια εξίσωση με παραμετρικές εξισώσεις.



Σχήμα 10

Αρχικά έχουμε έναν κύκλο ακτίνας a . Υποθέτουμε ότι η σταθερή ευθεία πάνω στην οποία κυλάει ο κύκλος είναι ο άξονας των x . Έστω ότι ένα από τα σημεία του άξονα των x με τα οποία έρχεται σε επαφή το σημείο P είναι και η αρχή των αξόνων. Στο Σχήμα 10 βλέπουμε τη θέση του σημείου P όταν ο κύκλος έχει διανύσει κυλώντας μια μικρή απόσταση. Η γωνία t (σε ακτίνια) μετράει τη γωνία κατά την οποία έχει κυλήσει ο κύκλος. Εφόσον ο κύκλος δεν ολισθαίνει, συνεπάγεται ότι:

Μήκος τόξου $AP = d(O, A)$

Το μήκος του τόξου AP ισούται με:

$$at = d(O, A) \quad s = r\theta, \quad r = a, \quad \theta = t$$

Η τετμημένη x του σημείου $P = (x, y)$ ισούται με:

$$x = d(O, X) = d(O, A) - d(X, A) = at - a \sin t = a(t - \sin t)$$

Η τεταγμένη y του σημείου P ισούται με:

$$y = d(O, Y) = d(A, C) - d(B, C) = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$$

ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;

Για έναν κύκλο ακτίνας r , μια κεντρική γωνία θ ακτινίων βαίνει σε τόξο μήκους s το οποίο ισούται με $s = r \theta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Παραμετρικές εξισώσεις κυκλοειδούς

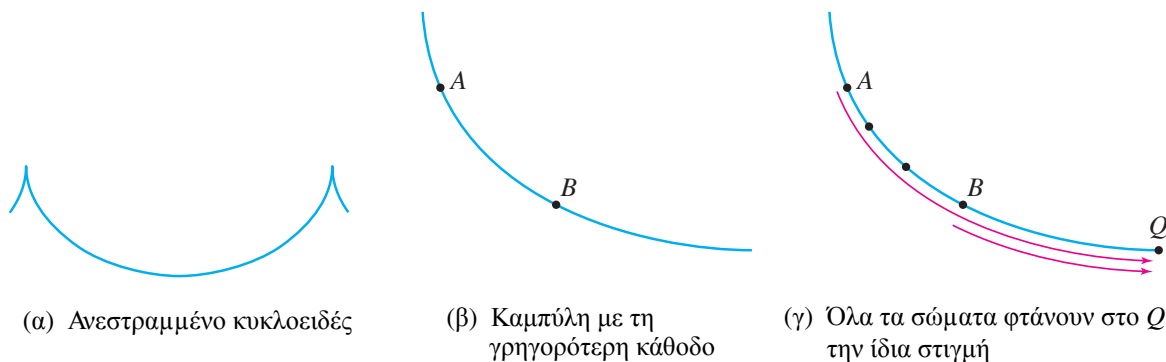
Οι παραμετρικές εξισώσεις ενός κυκλοειδούς είναι οι εξής:

$$\overline{x(t) = a(t - \sin t) \quad y(t) = a(1 - \cos t) \quad -\infty < t < \infty}$$

Εφαρμογές στη Μηχανική

Αν στις παραμετρικές εξισώσεις του κυκλοειδούς είναι $a < 0$, το αποτέλεσμα είναι ένα ανεστραμμένο κυκλοειδές, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 11α. Το ανεστραμμένο κυκλοειδές προκύπτει ως αποτέλεσμα κάποιων αξιοσημείωτων εφαρμογών στο πεδίο της Μηχανικής. Θα εξετάσουμε δύο από αυτές: το *βραχυστόχρονο* και το *ταυτόχρονο*.

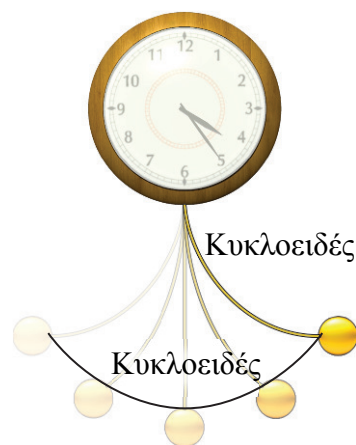
ΣΗΜΕΙΩΣΗ Με τον όρο *βραχυστόχρονο* εννοούμε ότι έχει τη «μικρότερη διάρκεια» και με τον όρο *ταυτόχρονο* ότι έχει την «ίδια διάρκεια».



Σχήμα 11

Βραχυστόχρονη ονομάζεται η καμπύλη με τη γρηγορότερη κάθοδο. Αν ένα αντικείμενο πρόκειται να ακολουθήσει μια προκαθορισμένη διαδρομή από ένα σημείο A σε ένα σημείο B που βρίσκεται χαμηλότερα (τα οποία δεν ανήκουν στην ίδια κατακόρυφη ευθεία) και πάνω του ασκείται μόνο η δύναμη της βαρύτητας, ο χρόνος που απαιτείται για να πραγματοποιήσει την κάθοδο ελαχιστοποιείται αν η διαδρομή είναι ένα ανεστραμμένο κυκλοειδές. Δείτε το Σχήμα 11β. Για παράδειγμα, αν φορτώνονται κιβώτια από μια αποβάθρα σε κάποιο πλοίο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια ράμπα στο σχήμα ενός ανεστραμμένου κυκλοειδούς ώστε τα κιβώτια να μπαίνουν στο πλοίο στο μικρότερο δυνατό χρονικό διάστημα. Η ανακάλυψη αυτή, η οποία αποδίδεται σε πολλούς διάσημους μαθηματικούς (περιλαμβανομένων των Johann Bernoulli και Blaise Pascal), ήταν ένα σημαντικό βήμα για τη δημιουργία του κλάδου των μαθηματικών που ονομάζεται *λογισμός των μεταβολών*.

Υποθέτουμε ότι Q είναι το χαμηλότερο σημείο ενός ανεστραμμένου κυκλοειδούς. Αν τοποθετήσουμε αντικείμενα σε διάφορα σημεία σε ένα ανεστραμμένο κυκλοειδές και τα αφήσουμε να γλιστρήσουν στο κυκλοειδές προς τα κάτω, τότε θα φτάσουν στο σημείο Q την ίδια χρονική στιγμή, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 11γ. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *ιδιότητα του ταυτόχρονου* του κυκλοειδούς. Τη χρησιμοποίησε ο Ολλανδός μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος Christian Huygens (1629–1695) για να κατασκευάσει ένα ρολόι εκκρεμές με ένα βαρίδι, το οποίο ταλαντευόταν κατά μήκος ενός ανεστραμμένου κυκλοειδούς, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 12. Στο ρολόι του ο Huygens είχεβάλει το βαρίδι να ταλαντεύεται κατά μήκος του ανεστραμμένου κυκλοειδούς καθώς το είχε κρεμάσει από ένα λεπτό σύρμα που ήταν περιορισμένο από δύο πλάκες σε σχήμα κυκλοειδούς. Σε ένα ρολόι με αυτή τη σχεδίαση, η περίοδος του εκκρεμούς είναι ανεξάρτητη από το πλάτος της ταλάντωσής του.



Σχήμα 12

9.1 Αξιολόγηση κατανόησης

Έννοιες και λεξιλόγιο

1. Έστω $x = x(t)$ και $y = y(t)$ δύο συναρτήσεις που έχουν κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα I . Το σύνολο των σημείων του επιπέδου $(x, y) = (x(t), y(t))$ ονομάζεται _____. Η μεταβλητή t ονομάζεται _____.
2. Πολλαπλής επιλογής Οι παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 2 \sin t$ και $y(t) = 3 \cos t$ ορίζουν μια [α] ευθεία β) υπερβολή γ) έλλειψη δ) παραβολή].
3. Πολλαπλής επιλογής Οι παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = a \sin t$ και $y(t) = a \cos t$, με $a > 0$, ορίζουν [α] μια ευθεία β) μια υπερβολή γ) μια παραβολή δ) έναν κύκλο].
4. Αν ένας κύκλος κυλάει πάνω σε μια οριζόντια ευθεία χωρίς να ολισθαίνει, ένα σημείο P του κύκλου διαγράφει μια καμπύλη που ονομάζεται _____.
5. Σωστό ή λάθος Οι παραμετρικές εξισώσεις που ορίζουν μια καμπύλη είναι μοναδικές.
6. Σωστό ή λάθος Οι επίπεδες καμπύλες που παριστάνονται χρησιμοποιώντας παραμετρικές εξισώσεις έχουν συγκεκριμένο προσανατολισμό.

Αποκτώντας ευχέρεια

Στα Προβλήματα 7-20:

- α) Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση κάθε επίπεδης καμπύλης με τις δοσμένες παραμετρικές εξισώσεις.
 - β) Σχεδιάστε τις επίπεδες καμπύλες που παριστάνονται από τις παραμετρικές εξισώσεις και δείξτε τον προσανατολισμό τους.
7. $x(t) = 2t + 1, y(t) = t + 2, -\infty < t < \infty$
 8. $x(t) = t - 2, y(t) = 3t + 1, -\infty < t < \infty$
 9. $x(t) = 2t + 1, y(t) = t + 2, 0 \leq t \leq 2$
 10. $x(t) = t - 2, y(t) = 3t + 1, 0 \leq t \leq 2$
 11. $x(t) = e^t, y(t) = t, -\infty < t < \infty$
 12. $x(t) = t, y(t) = \frac{1}{t}, -\infty < t < \infty, t \neq 0$
 13. $x(t) = \sin t, y(t) = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$
 14. $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$

$$15. x(t) = 2 \sin t, y(t) = 3 \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$16. x(t) = 4 \cos t, y(t) = 3 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$17. x(t) = 2 \sin t - 3, y(t) = 2 \cos t + 1; 0 \leq t \leq \pi$$

$$18. x(t) = 4 \cos t + 1, y(t) = 4 \sin t - 3, 0 \leq t \leq \pi$$

$$19. x(t) = t^2, y(t) = 2t, -\infty < t < \infty$$

$$20. x(t) = 4t + 1, y(t) = 2t, -\infty < t < \infty$$

Στα Προβλήματα 21-36:

- α) Βρείτε μια καρτεσιανή εξίσωση για κάθε επίπεδη καμπύλη με τις δοσμένες παραμετρικές εξισώσεις.
- β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση των καρτεσιανών εξισώσεων.
- γ) Προσδιορίστε τους περιορισμούς για τα x και y έτσι ώστε η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στην καρτεσιανή εξίσωση να είναι ίδια με την επίπεδη καμπύλη.
- δ) Σχεδιάστε τις επίπεδες καμπύλες που παριστάνονται από τις παραμετρικές εξισώσεις.

$$21. x(t) = 2t, y(t) = t^2 + 4, t > 0$$

$$22. x(t) = t + 3, y(t) = t^3, -4 \leq t \leq 4$$

$$23. x(t) = t + 5, y(t) = \sqrt{t}, t \geq 0$$

$$24. x(t) = 2t^2, y(t) = 2t^3, 0 \leq t \leq 3$$

$$25. x(t) = t^{1/2} + 1, y(t) = t^{3/2}, t \geq 1$$

$$26. x(t) = 2e^t, y(t) = 1 - e^t, t \geq 0$$

$$27. x(t) = \sec t, y(t) = \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$28. x(t) = 3 \sinh t, y(t) = 2 \cosh t, -\infty < t < \infty$$

$$29. x(t) = t^4, y(t) = t^2$$

$$30. x(t) = t^2, y(t) = t^4$$

$$31. x(t) = t^2, y(t) = 2t - 1$$

$$32. x(t) = e^{2t}, y(t) = 2e^t - 1$$

$$33. x(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^2, y(t) = \frac{2}{t} - 1$$

$$34. x(t) = t^4, y(t) = 2t^2 - 1$$

$$35. x(t) = 3 \sin^2 t - 2, y(t) = 2 \cos t, 0 \leq t \leq \pi$$

$$36. x(t) = 1 + 2 \sin^2 t, y(t) = 2 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Χρήση του χρόνου ως παραμέτρου Στα Προβλήματα 37-42 περιγράψτε την κίνηση ενός σώματος που κινείται πάνω σε μια καμπύλη έτσι ώστε τη χρονική στιγμή t να έχει συντεταγμένες $(x(t), y(t))$.

37. $x(t) = \frac{1}{t^2}, y(t) = \frac{2}{t^2 + 1}, t > 0$

38. $x(t) = \frac{3t}{\sqrt{t^2 + 1}}, y(t) = \frac{3}{\sqrt{t^2 + 1}}$

39. $x(t) = \frac{4}{\sqrt{4 - t^2}}, y(t) = \frac{4t}{\sqrt{4 - t^2}}, 0 \leq t < 2$

40. $x(t) = \sqrt{t - 3}, y(t) = \sqrt{t + 1}, t \geq 3$

41. $x(t) = \sin t - 2, y(t) = 4 - 2 \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$

42. $x(t) = 2 + \tan t, y(t) = 3 - 2 \sec t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

Στα Προβλήματα 43-50 βρείτε δύο διαφορετικά ζεύγη παραμετρικών εξισώσεων που να αντιστοιχούν στην κάθε καρτεσιανή εξίσωση.

43. $y = 4x - 2$

44. $y = -8x + 3$

45. $y = -2x^2 + 1$

46. $y = x^2 + 1$

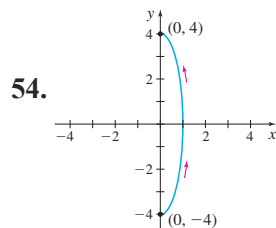
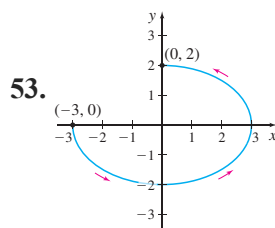
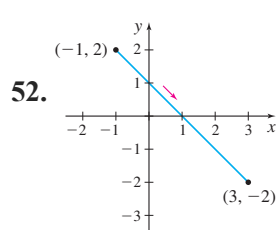
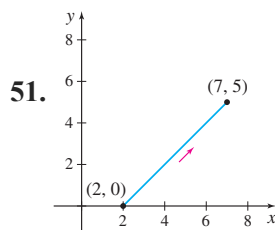
47. $y = 4x^3$

48. $y = 2x^2$

49. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y} - 3$

50. $x = y^{3/2}$

Στα Προβλήματα 51-54 βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις που παριστάνουν τις αντίστοιχες επίπεδες καμπύλες.



Κίνηση σώματος Στα Προβλήματα 55-58 βρείτε παραμετρικές εξισώσεις για ένα σώμα που κινείται πάνω στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, όπου παράμετρος είναι ο χρόνος (σε s) αν:

55. Η κίνηση αρχίζει στο σημείο $(3, 0)$, έχει αριστερόστροφη φορά και χρειάζεται 3 s για μια πλήρη περιστροφή.

56. Η κίνηση αρχίζει στο σημείο $(3, 0)$, έχει δεξιόστροφη φορά και χρειάζεται 3 s για μια πλήρη περιστροφή.

57. Η κίνηση αρχίζει στο σημείο $(0, 2)$, έχει δεξιόστροφη φορά και χρειάζεται 2 s για μια πλήρη περιστροφή.

58. Η κίνηση αρχίζει στο σημείο $(0, 2)$, έχει αριστερόστροφη φορά και χρειάζεται 1 s για μια πλήρη περιστροφή.

Στα Προβλήματα 59 και 60 δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις για τέσσερις επίπεδες καμπύλες. Σχεδιάστε την κάθε καμπύλη, δείξτε τον προσανατολισμό της και συγκρίνετε τις γραφικές παραστάσεις.

59. α) $x(t) = t, y(t) = t^2, -4 \leq t \leq 4$

β) $x(t) = \sqrt{t}, y(t) = t, 0 \leq t \leq 16$

γ) $x(t) = e^t, y(t) = e^{2t}, 0 \leq t \leq \ln 4$

δ) $x(t) = \cos t, y(t) = 1 - \sin^2 t, 0 \leq t \leq \pi$

60. α) $x(t) = t, y(t) = \sqrt{1 - t^2}, -1 \leq t \leq 1$

β) $x(t) = \sin t, y(t) = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$

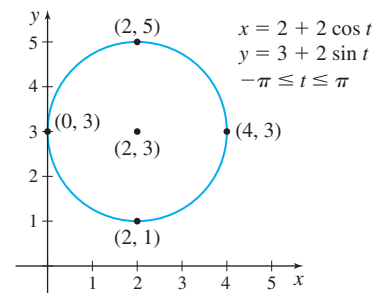
γ) $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

δ) $x(t) = \sqrt{1 - t^2}, y(t) = t, -1 \leq t \leq 1$

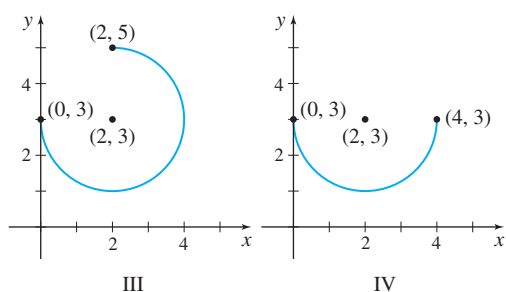
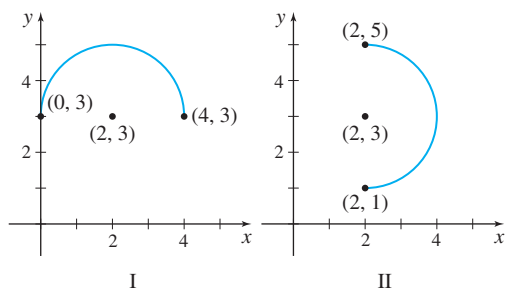
Εφαρμογές και προεκτάσεις

Στα Προβλήματα 61-64 δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις μιας επίπεδης καμπύλης και η γραφική της παράστασή. Αντιστοιχίστε την κάθε γραφική παράσταση στα I-IV με τα περιορισμένα πεδία ορισμού που δίνονται στα α)-δ). Επίσης, δείξτε τον προσανατολισμό κάθε γραφικής παράστασης.

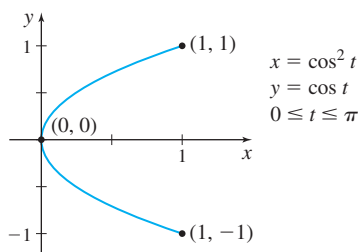
61.



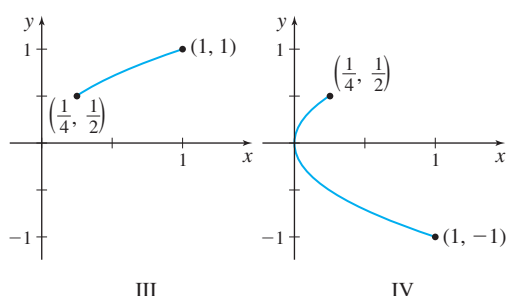
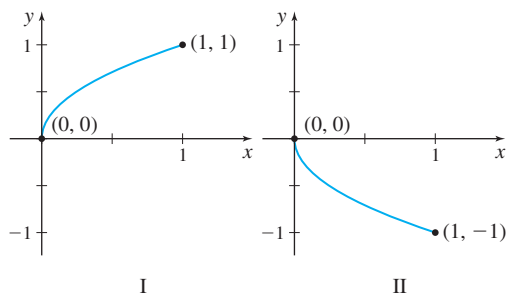
α) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ β) $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ γ) $[-\pi, 0]$ δ) $[0, \pi]$



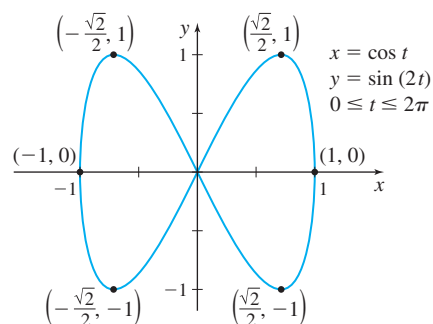
62.



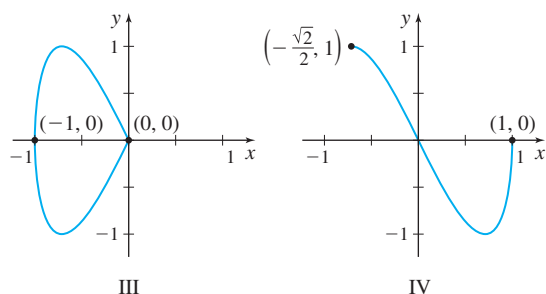
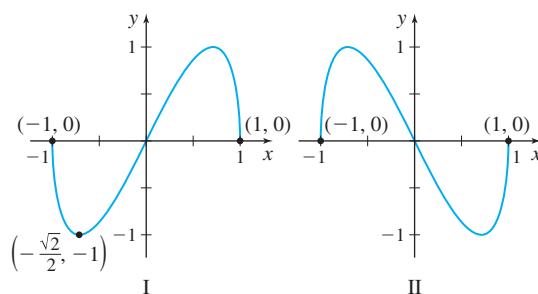
α) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ β) $[0, \frac{\pi}{3}]$ γ) $[0, \frac{\pi}{2}]$ δ) $[\frac{\pi}{3}, \pi]$



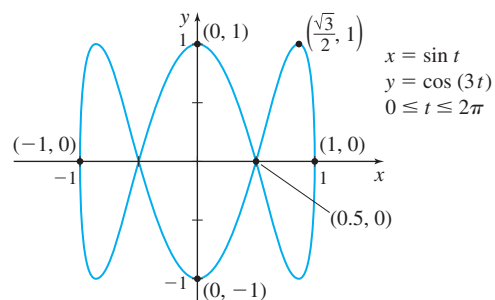
63.



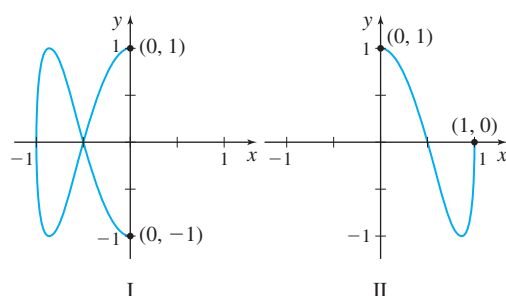
α) $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ β) $[\pi, 2\pi]$ γ) $[0, \pi]$ δ) $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$

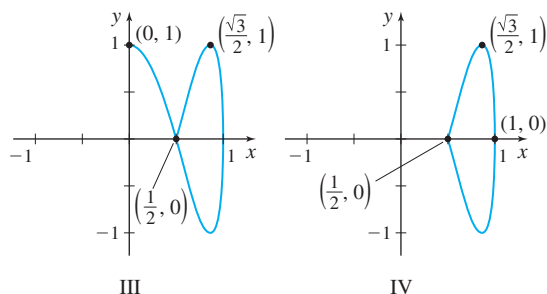


64.



α) $[0, \frac{5\pi}{6}]$ β) $[\pi, 2\pi]$ γ) $[0, \frac{\pi}{2}]$ δ) $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$



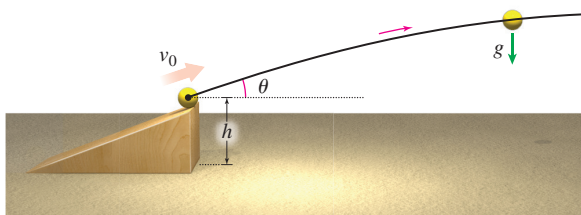


65. α) Σχεδιάστε την επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 7(t - \sin t)$, $y(t) = 7(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
β) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου (x, y) πάνω στην καμπύλη όταν $t = 2.1$.
66. α) Σχεδιάστε την επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = t - e^t$, $y(t) = 2e^{t/2}$, $-8 \leq t \leq 2$.
β) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου (x, y) πάνω στην καμπύλη όταν $t = 1.5$.
67. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις για την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
68. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις για την υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Τα Προβλήματα 69-71 αφορούν την κίνηση βλήματος. Όταν ένα σώμα εκτοξεύεται προς τα πάνω υπό κλίση θ με την οριζόντια ευθεία με αρχική ταχύτητα v_0 , η κίνηση που προκύπτει ονομάζεται κίνηση βλήματος. Δείτε το Σχήμα. Οι παραμετρικές εξισώσεις που μοντελοποιούν τη διαδρομή του βλήματος, αγνοώντας την αντίσταση του αέρα, είναι οι εξής:

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + h$$

όπου t είναι ο χρόνος, g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (κατά προσέγγιση 32 ft/s^2 ή 9.8 m/s^2) και h είναι το ύψος από το οποίο εκτοξεύεται το βλήμα.



69. **Τροχιά μπάλας του μπέιζμπολ** Μια μπάλα του μπέιζμπολ δέχεται χτύπημα με αρχική ταχύτητα 125 ft/s υπό γωνία 40° με την οριζόντια ευθεία. Η μπάλα δέχεται το χτύπημα σε ύψος 3 ft πάνω από το έδαφος.

- α) Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις που να μοντελοποιούν τη θέση της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου t σε s .
β) Σε ποιο ύψος βρίσκεται η μπάλα του μπέιζμπολ μετά από 2 s ;
γ) Ποια οριζόντια απόσταση x έχει διανύσει η μπάλα μετά από 2 s ;
δ) Πόσον χρόνο χρειάζεται η μπάλα για να διανύσει απόσταση $x = 300 \text{ ft}$;
ε) Σε ποιο ύψος βρίσκεται η μπάλα τη χρονική στιγμή που βρήκατε στο ερώτημα δ);
στ) Για πόσον χρόνο παραμένει η μπάλα στον αέρα πριν χτυπήσει το έδαφος;
ζ) Ποια οριζόντια απόσταση έχει διανύσει η μπάλα μέχρι να χτυπήσει το έδαφος;

70. **Τροχιά μπάλας του μπέιζμπολ** Ένας παίκτης ρίχνει μια μπάλα του μπέιζμπολ με αρχική ταχύτητα 145 ft/s υπό γωνία 20° με την οριζόντια ευθεία. Η μπάλα φεύγει από το χέρι του σε ύψος 5 ft .

- α) Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις που να μοντελοποιούν τη θέση της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου t σε s .
β) Σε ποιο ύψος βρίσκεται η μπάλα μετά από 0.5 s ;
γ) Ποια οριζόντια απόσταση x έχει διανύσει η μπάλα μετά από 0.5 s ;
δ) Πόσον χρόνο χρειάζεται η μπάλα για να διανύσει απόσταση $x = 60 \text{ ft}$;
ε) Σε ποιο ύψος βρίσκεται η μπάλα τη χρονική στιγμή που βρήκατε στο ερώτημα δ);

71. **Τροχιά μπάλας αμερικάνικου ποδοσφαίρου** Ένας επιθετικός ρίχνει μια μπάλα με αρχική ταχύτητα 80 ft/s υπό γωνία 35° με την οριζόντια ευθεία. Η μπάλα φεύγει από το χέρι του επιθετικού σε ύψος 6 ft .

- α) Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις που να μοντελοποιούν τη θέση της μπάλας ως συνάρτηση του χρόνου t σε s .
β) Σε ποιο ύψος βρίσκεται η μπάλα μετά από 1 s ;
γ) Ποια οριζόντια απόσταση x έχει διανύσει η μπάλα μετά από 1 s ;

- δ) Πόσον χρόνο χρειάζεται η μπάλα για να διανύσει απόσταση $x = 120$ ft;
 ε) Σε ποιο ύψος βρίσκεται η μπάλα τη χρονική στιγμή που βρήκατε στο ερώτημα δ);

72. Η επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ και η επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = t^2$, $y(t) = t^4$ (όπου και στις δύο περιπτώσεις ο χρόνος t είναι η παράμετρος) μοιάζουν να είναι ίδιες, έχουν όμως μια σημαντική διαφορά. Βρείτε τη διαφορά αυτή κι εξηγήστε τη σημασία της.

73. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ μπορεί να παρασταθεί από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(\theta) = 2 \cos \theta$, $y(\theta) = 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ή από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(\theta) = 2 \sin \theta$, $y(\theta) = 2 \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Οι επίπεδες καμπύλες που παριστάνονται όμως από το κάθε ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων διαφέρουν μεταξύ τους. Βρείτε τη διαφορά αυτή κι εξηγήστε τη σημασία της.

74. **Ομοιόμορφη κίνηση** Ένα τρένο φεύγει από τον σταθμό στις 7:15 π.μ. κι επιταχύνει με ρυθμό 3 mi/h^2 . Η Μαίρη, που μπορεί να τρέξει με ταχύτητα 6 mi/h , φτάνει στον σταθμό 2 s μετά την αναχώρηση του τρένου. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις που να περιγράφουν την κίνηση του τρένου και της Μαίρης ως συνάρτηση του χρόνου. *Υπόδειξη:* Η θέση s τη χρονική στιγμή t ενός σώματος που κινείται με επιτάχυνση a ισούται με $s = \frac{1}{2}at^2$.

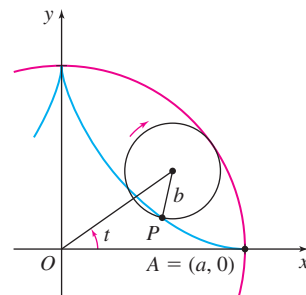
Προβλήματα πρόκλησης

75. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις για τον κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ χρησιμοποιώντας ως παράμετρο την κλίση m της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(-R, 0)$ και το γενικό σημείο $P = (x, y)$ του κύκλου.
 76. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις για την παραβολή $y = x^2$ χρησιμοποιώντας ως παράμετρο την κλίση m της ευθείας που συνδέει το σημείο $(1, 1)$ με το γενικό σημείο $P = (x, y)$ της παραβολής.

77. **Υποκυκλοειδές** Έστω ότι ένας κύκλος ακτίνας b κυλάει χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό ενός σταθερού κύκλου ακτίνας a , όπου $a > b$. Ένα σταθερό σημείο P στον κύκλο ακτίνας b διαγράφει μια καμπύλη, η οποία ονομάζεται **υποκυκλοειδές**, όπως βλέπουμε στο Σχήμα. Αν $A = (a, 0)$ είναι η αρχική θέση του σημείου P και το t συμβολίζει τη γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στον θετικό ημιάξονα των x και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την αρχή των αξόνων με το κέντρο του κύκλου, δείξτε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις του υποκυκλοειδούς είναι οι εξής:

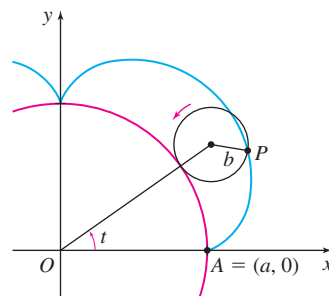
$$x(t) = (a - b) \cos t + b \cos \left(\frac{a - b}{b} t \right)$$

$$y(t) = (a - b) \sin t - b \sin \left(\frac{a - b}{b} t \right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



78. **Υποκυκλοειδές** Δείξτε ότι η καρτεσιανή εξίσωση ενός υποκυκλοειδούς με $a = 4b$ είναι η $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

79. **Επικυκλοειδές** Υποθέτουμε ότι ένας κύκλος ακτίνας b κυλάει στο εξωτερικό ενός δεύτερου κύκλου, όπως βλέπουμε στο Σχήμ. Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης που διαγράφεται από το σημείο P και ονομάζεται **επικυκλοειδές**.



9.2 Εφαπτόμενες ευθείες

ΣΤΟΧΟΙ Όταν ολοκληρώσετε αυτή την ενότητα, θα πρέπει να μπορείτε:

1. Να βρίσκετε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται σε ένα σημείο μιας επίπεδης καμπύλης (σ. 17)

Θυμηθείτε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε η παράγωγος $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ισούται με την κλίση της ευθείας που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f σε ένα σημείο (x, y) . Για να βρούμε έναν τύπο για την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας σε μια καμπύλη όταν παριστάνεται από παραμετρικές εξισώσεις, τις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ με $a \leq t \leq b$, πρέπει η καμπύλη να είναι *λεία*.

ΟΡΙΣΜΟΣ Λεία καμπύλη

Έστω C μια επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

Υποθέτουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο ανοιχτό διάστημα (a, b) . Αν οι $\frac{dx}{dt}$ και $\frac{dy}{dt}$ είναι συνεχείς και δεν ισούνται ταυτόχρονα με το 0 στο (a, b) , τότε η C ονομάζεται **λεία καμπύλη** στο $[a, b]$.

Μια λεία καμπύλη $x = x(t)$, $y = y(t)$, για την οποία η $\frac{dx}{dt}$ δεν ισούται ποτέ με το 0, μπορεί να αναπαρασταθεί με την καρτεσιανή εξίσωση $y = F(x)$, όπου η F είναι παραγωγίσιμη. (Η απόδειξη θα σας ζητηθεί στο Πρόβλημα 33.) Τότε:

$$\begin{aligned} y &= F(x) \\ y(t) &= F(x(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} && \text{Κανόνας αλυσίδας} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} && \text{Διαίρεση κατά μέλη με το } \frac{dx}{dt} \neq 0 \end{aligned}$$

Εφόσον το $\frac{dy}{dx}$ είναι η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $y = F(x)$, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Κλίση ευθείας που εφάπτεται σε λεία καμπύλη

Για μια λεία καμπύλη C που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ με $a \leq t \leq b$, η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στη C στο σημείο (x, y) δίνεται ως εξής:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}} \quad (1)$$

με δεδομένο ότι $\frac{dx}{dt} \neq 0$.

- Σε έναν αριθμό t όπου $\frac{dx}{dt} = 0$, αλλά $\frac{dy}{dt} \neq 0$, μια λεία καμπύλη C έχει **κατακόρυφη εφαπτόμενη ευθεία**.
- Σε έναν αριθμό t όπου $\frac{dy}{dt} = 0$, αλλά $\frac{dx}{dt} \neq 0$, μια λεία καμπύλη C έχει **οριζόντια εφαπτόμενη ευθεία**.

1. Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας που εφάπτεται σε ένα σημείο μιας επίπεδης καμπύλης

Τώρα που γνωρίζουμε έναν τρόπο να βρίσκουμε την κλίση της ευθείας που εφάπτεται σε ένα σημείο της C , μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας χρησιμοποιώντας τη μορφή της εξίσωσης όταν γνωρίζουμε ένα σημείο και την κλίση της.

ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;
Μελετήσαμε τις εξισώσεις για τις εφαπτόμενες ευθείες στην Ενότητα 2.1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας που εφάπτεται σε μια λεία καμπύλη

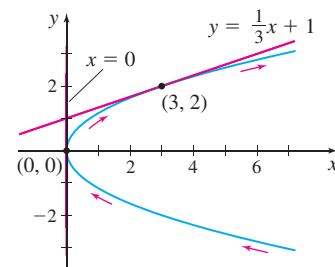
- α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται σε μια επίπεδη καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t$, όταν $t = 1$.
- β) Βρείτε όλα τα σημεία της επίπεδης καμπύλης στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι κατακόρυφη.

Λύση α) Η καμπύλη είναι λεία (είναι $\frac{dy}{dt} = 2$, άρα δεν είναι ποτέ μηδέν). Εφόσον η $\frac{dx}{dt} = 6t$ δεν ισούται με το 0 στο $t = 1$, η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη είναι η εξής:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(2t)}{\frac{d}{dt}(3t^2)} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}$$

Όταν $t = 1$, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας ισούται με $\frac{1}{3}$. Εφόσον $x(1) = 3$ και $y(1) = 2$, μια εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η εξής:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{1}{3}(x - 3) & y - y_1 &= m(x - x_1), & x_1 &= 3, y_1 = 2, m = \frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$



Σχήμα 13 $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t$

- β) Κατακόρυφη εφαπτόμενη ευθεία προκύπτει όταν $\frac{dx}{dt} = 0$ και $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

Εφόσον $\frac{dx}{dt} = 6t = 0$ και $\frac{dy}{dt} = 2$ όταν $t = 0$, τότε υπάρχει κατακόρυφη ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο $(0, 0)$.

Στο Σχήμα 13 βλέπουμε τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 1.

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 15.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Εύρεση της κλίσης της ευθείας που εφάπτεται σε κυκλοειδές

Δίνεται το κυκλοειδές: $x(t) = a(t - \sin t)$ $y(t) = a(1 - \cos t)$ $0 < t < 2\pi$ $a > 0$.

- α) Δείξτε ότι η κλίση οποιασδήποτε ευθείας εφάπτεται στο κυκλοειδές ισούται με $\frac{\sin t}{1 - \cos t}$.

β) Βρείτε τα σημεία όπου η ευθεία που εφάπτεται στο κυκλοειδές είναι οριζόντια.

γ) Βρείτε μια εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο κυκλοειδές στο σημείο (ή στα σημεία) που βρήκατε στο ερώτημα β).

Λύση α)

$$x(t) = at - a \sin t \quad y(t) = a - a \cos t$$

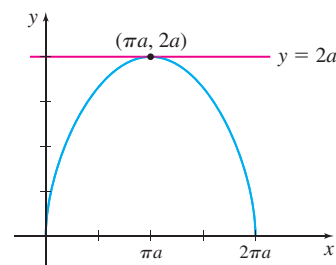
$$\frac{dx}{dt} = a - a \cos t \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

Για $0 < t < 2\pi$ είναι $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \neq 0$, οπότε το κυκλοειδές είναι λεία καμπύλη. Τότε η κλίση οποιασδήποτε εφαπτόμενης ευθείας ισούται με:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

β) Το κυκλοειδές έχει οριζόντια εφαπτόμενη ευθεία όταν $\frac{dy}{dt} = a \sin t = 0$, αλλά $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Για $0 < t < 2\pi$, έχουμε $a \sin t = 0$ όταν $t = \pi$. Εφόσον $\frac{dx}{dt} \neq 0$ για $0 < t < 2\pi$, το κυκλοειδές έχει οριζόντια εφαπτόμενη ευθεία όταν $t = \pi$, στο σημείο $(\pi a, 2a)$.

γ) Μια εξίσωση για την οριζόντια εφαπτόμενη ευθεία όταν $t = \pi$ είναι η $y = 2a$. Δείτε το Σχήμα 14.



Σχήμα 14 $x(t) = a(t - \sin t)$,
 $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 < t < 2\pi$

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 27.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Εύρεση της εξίσωσης μιας ευθείας που εφάπτεται σε λεία καμπύλη

Η επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = t^3 - 4t$, $y(t) = t^2$ τέμνεται με τον εαυτό της στο σημείο $(0, 4)$, συνεπώς έχει δύο εφαπτόμενες ευθείες στο σημείο αυτό, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 15. Βρείτε τις εξισώσεις αυτών των εφαπτόμενων ευθειών.

Λύση Εφόσον είναι $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 4 = 0$ μόνο όταν $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ή $t = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{dy}{dt} = 2t = 0$ μόνο όταν $t = 0$, δεν υπάρχει t για το οποίο τα $\frac{dx}{dt}$ και $\frac{dy}{dt}$ να είναι ταυτόχρονα 0. Οπότε η επίπεδη καμπύλη είναι λεία.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τους αριθμούς t που αντιστοιχούν στο σημείο $(0, 4)$.

$$\begin{aligned} x &= 0 & y &= 4 \\ t^3 - 4t &= 0 & t^2 &= 4 \\ t(t^2 - 4) &= 0 & t &= -2 \text{ ή } 2 \\ t &= 0, -2, \text{ ή } 2 \end{aligned}$$

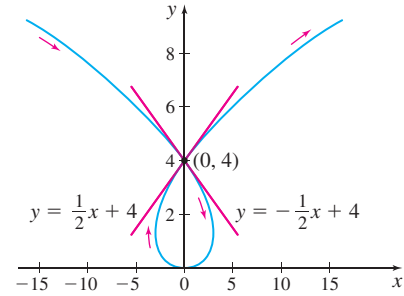
Αποκλείουμε το $t = 0$ εφόσον, αν $t = 0$, τότε $y \neq 4$. Οπότε θα εξετάσουμε μόνο τα $t = -2$ και $t = 2$.

Εφόσον είναι $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 4 \neq 0$ όταν $t = -2$ ή $t = 2$, η κλίση των εφαπτόμενων ευθειών δίνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(t^2)}{\frac{d}{dt}(t^3 - 4t)} = \frac{2t}{3t^2 - 4}$$

Όταν $t = -2$, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας ισούται με:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(-2)}{3(-2)^2 - 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$



Σχήμα 15 $x(t) = t^3 - 4t$, $y(t) = t^2$

και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(0, 4)$ ισούται με:

$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{1}{2}(x - 0) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 4 \end{aligned}$$

Όταν $t = 2$, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(0, 4)$ ισούται με: $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2^2 - 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(0, 4)$ είναι η:

$$\begin{aligned} y - 4 &= \frac{1}{2}(x - 0) \\ y &= \frac{1}{2}x + 4 \end{aligned}$$

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 31.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Κίνηση βλήματος

Ένα βλήμα εκτοξεύεται υπό γωνία θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ως προς το οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα v_0 m/s. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα, η θέση του βλήματος μετά από t s δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = (v_0 \cos \theta)t$, $y(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$, $t \geq 0$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

- α) Εκφράστε την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην τροχιά της κίνησης του βλήματος συναρτήσει του t .
β) Σε ποια χρονική στιγμή t βρίσκεται το βλήμα στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του;

Λύση α) Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από την $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{d}{dt} \left[(v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \right]}{\frac{d}{dt} [(v_0 \cos \theta)t]} = \frac{v_0 \sin \theta - gt}{v_0 \cos \theta}$$

β) Το βλήμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος όταν η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας ισούται με 0. Δηλαδή όταν:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{v_0 \sin \theta - gt}{v_0 \cos \theta} &= 0 \\ v_0 \sin \theta - gt &= 0 \\ t &= \frac{v_0 \sin \theta}{g} \end{aligned}$$

9.2 Αξιολόγηση κατανόησης

Έννοιες και λεξιλόγιο

1. Πολλαπλής επιλογής Έστω C μια επίπεδη καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, με $a \leq t \leq b$, όπου οι συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο ανοιχτό διάστημα (a, b) . Αν οι $\frac{dx}{dt}$ και $\frac{dy}{dt}$ είναι συνεχείς και δεν ισούνται ταυτόχρονα με το 0 στο (a, b) , τότε η C ονομάζεται [α) λεία β) παραγωγίσιμη γ) παραμετρική καμπύλη].
2. Σωστό ή λάθος Αν η C είναι μια λεία καμπύλη που παριστάνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, με $a \leq t \leq b$, τότε η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στη C στο

σημείο (x, y) δίνεται από τον τύπο: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, με

δεδομένο ότι $\frac{dx}{dt} \neq 0$.

3. Αν στον τύπο της κλίσης μιας εφαπτόμενης ευθείας είναι $\frac{dy}{dt} = 0$, αλλά $\frac{dx}{dt} \neq 0$, τότε η καμπύλη έχει _____ εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x(t), y(t))$. Αν $\frac{dx}{dt} = 0$, αλλά $\frac{dy}{dt} \neq 0$, τότε η καμπύλη έχει _____ εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x(t), y(t))$.
4. Σωστό ή λάθος Μια λεία καμπύλη $x = x(t)$ και $y = y(t)$, με $a \leq t \leq b$, μπορεί να αναπαρσταθεί με μια καρτεσιανή εξίσωση $y = F(x)$ αν το $\frac{dy}{dt}$ δεν είναι ποτέ 0 στο διάστημα (a, b) .

Αποκτώντας ευχέρεια

Στα Προβλήματα 5-12 βρείτε το $\frac{dy}{dx}$. Υποθέστε ότι $\frac{dx}{dt} \neq 0$.

5. $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$
6. $x(t) = 1 + e^{-t}$, $y(t) = e^{3t}$

7. $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = 4 + t$
8. $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t - \frac{1}{t}$
9. $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$
10. $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$
11. $x(t) = \cot^2 t$, $y(t) = \cot t$
12. $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sec^2 t$

Στα Προβλήματα 13-26 για κάθε ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων:

- α) Βρείτε μια εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη στον δοσμένο αριθμό.
- β) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της καμπύλης και της εφαπτόμενης ευθείας.

13. $x(t) = 2t^2$, $y(t) = t$ στο $t = 2$.
14. $x(t) = t$, $y(t) = 3t^2$ στο $t = -2$.
15. $x(t) = 3t$, $y(t) = 2t^2 - 1$ στο $t = 1$.
16. $x(t) = 2t$, $y(t) = t^2 - 2$ στο $t = 2$.
17. $x(t) = \sqrt{t}$, $y(t) = \frac{1}{t}$ στο $t = 4$.
18. $x(t) = \frac{2}{t^2}$, $y(t) = \frac{1}{t}$ στο $t = 1$.
19. $x(t) = \frac{t}{t+2}$, $y(t) = \frac{4}{t+2}$ στο $t = 0$.
20. $x(t) = \frac{t^2}{1+t}$, $y(t) = \frac{1}{1+t}$ στο $t = 0$.
21. $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-t}$ στο $t = 0$.
22. $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = e^t$ στο $t = 0$.
23. $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$ στο $t = \frac{\pi}{4}$.
24. $x(t) = \sin^2 t$, $y(t) = \cos t$ στο $t = \frac{\pi}{4}$.
25. $x(t) = 4 \sin t$, $y(t) = 3 \cos t$ στο $t = \frac{\pi}{3}$.
26. $x(t) = 2 \sin t - 1$, $y(t) = \cos t + 2$ στο $t = \frac{\pi}{6}$.

Στα Προβλήματα 27-30 για κάθε λεία καμπύλη βρείτε τα σημεία όπου η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια ή κατακόρυφη.

27. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 - 4t$
28. $x(t) = t^3 - 9t$, $y(t) = t^2$