

# ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

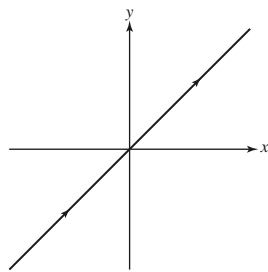
## Κεφάλαιο 11

### Ενότητα 11.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

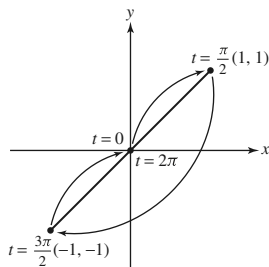
- Κύκλος ακτίνας 3 με κέντρο στην αρχή των αξόνων.
- Το κέντρο είναι στο  $(4, 5)$ .
- Μέγιστο ύψος: 4
- Ναι, όχι
- (α) Η ευθεία  $y = x$  που διανύεται από αριστερά προς τα δεξιά. (β) Η ίδια διαδρομή διανυόμενη από αριστερά προς τα δεξιά με τη διπλάσια ταχύτητα.
- Πιθανή απάντηση:  $c_1(t) = (t, t^3)$ ,  $c_2(t) = (\sqrt[3]{t}, t)$ ,  $c_3(t) = (t^3, t^9)$

### Ενότητα 11.1 Ασκήσεις

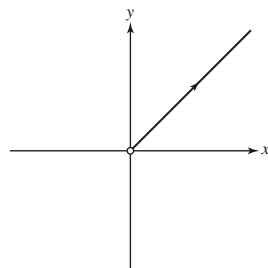
- $(t = 0)(1, 9)$ ,  $(t = 2)(9, -3)$ ,  $(t = 4)(65, -39)$
- $y = 2.5x - 0.000766x^2$
- (α)



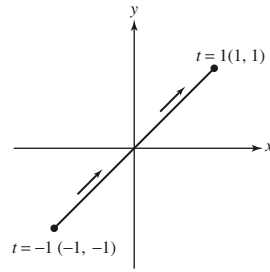
(β)



(γ)

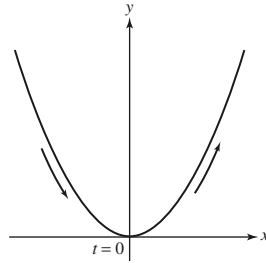


(δ)

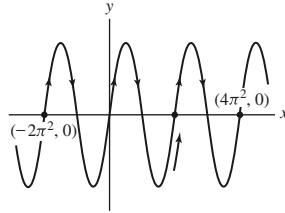


7.  $y = 4x - 12$     9.  $y = (x + 1)^{2/3} + 1$     11.  $y = \frac{6}{x^2}$  (όπου  $x > 0$ )    13.  $y = 2 - e^x$

15.



17.



19. (α) ↔ (iv) (β) ↔ (ii) (γ) ↔ (iii) (δ) ↔ (i)

21. (α)  $y_{\max} = 100$  cm (β) προσγειώνεται στα  $x = 2040$  cm από την αρχή των αξόνων, όταν  $t = 20$  s.

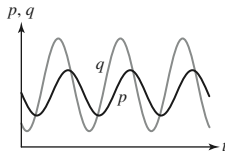
23.  $c(t) = (t, 9 - 4t)$     25.  $c(t) = \left(\frac{5+t^2}{4}, t\right)$     27.  $c(t) = (-9 + 7 \cos t, 4 + 7 \sin t)$     29.  $c(t) = (-4 + t, 9 + 8t)$

31.  $c(t) = (3 - 8t, 1 + 3t)$     33.  $c(t) = (1 + t, 1 + 2t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ )    35.  $c(t) = (3 + 4 \cos t, 9 + 4 \sin t)$

37.  $c(t) = (-4 + t, -8 + t^2)$     39.  $c(t) = (2 + t, 2 + 3t)$     41.  $c(t) = (3 + t, (3 + t)^2)$

43.  $x = -5 \cos t, y = 2\sqrt{5} \sin t$ , για  $0 \leq t \leq \pi$     45.  $y = \sqrt{x^2 - 1}$  ( $1 \leq x < \infty$ )    47. Διάγραμμα III

49. (α) Στο σημείο  $C$  τα θηράματα είναι κοντά στο ελάχιστο. Εφόσον οι πόροι για τους θηρευτές είναι λίγοι, περιμένουμε ότι ο πληθυσμός των θηρευτών μειώνεται. Στο σημείο  $D$  της καμπύλης ο πληθυσμός των θηρευτών είναι κοντά στην ελάχιστη τιμή του. Οι συνθήκες τότε είναι ευνοϊκές για τα θηράματα και περιμένουμε να αυξάνεται ο πληθυσμός τους. Και οι δύο αυτές καταστάσεις υποστηρίζουν το συμπέρασμα ότι η καμπύλη διαγράφεται αριστερόστροφα. (β)



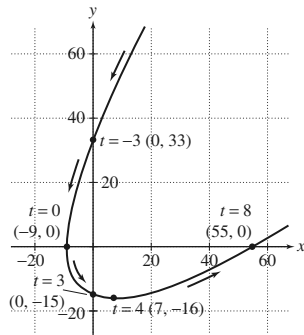
(γ) Οι θηρευτές εμφανίζουν το μέγιστό τους λίγο μετά τα θηράματα. Αυτό είναι λογικό διότι όταν ο πληθυσμός των θηρευτών είναι μεγάλος, ο πληθυσμός των θηραμάτων θα πρέπει να αυξάνεται λόγω της αφθονίας θηραμάτων. Αφού τα θηράματα φτάσουν στο μέγιστό τους και αρχίσουν να φθίνουν, οι θηρευτές θα φτάσουν σύντομα στο μέγιστό τους και θα αρχίσουν να μειώνονται ως αντίδραση στη μείωση των διαθέσιμων θηραμάτων.

51.  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-4} = -\frac{1}{6}$     53.  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{s=-1} = -\frac{3}{4}$     55.  $-\frac{2}{3}$     57.  $-4$     59.  $y = -\frac{9}{2}x + \frac{11}{2}, \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{2}$

61.  $y = x^2 + x^{-1}$ ,  $\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{x^2}$     63.  $y = \ln(1-x) - 1$ , so  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1-x}$ . Από την Εξ. (6)  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e^t}$

65. (0, 0), (96, 180)

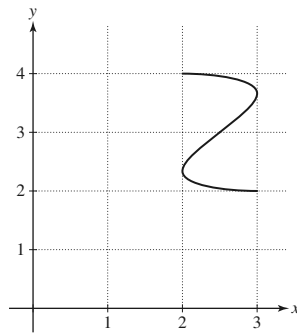
67.



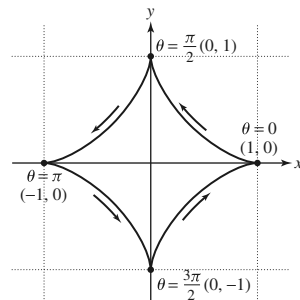
Η γραφική παράσταση είναι στο τεταρτημόριο i για  $t < -3$  ή  $t > 8$ , στο τεταρτημόριο ii για  $-3 < t < 0$ , στο τεταρτημόριο iii για  $0 < t < 3$  και στο τεταρτημόριο iv για  $3 < t < 8$ .

69. (55, 0)    71. Οι συντεταγμένες του  $P$ ,  $(R \cos \theta, r \sin \theta)$ , παριστάνουν μια έλλειψη για  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

75.  $c(t) = (3 - 9t + 24t^2 - 16t^3, 2 + 6t^2 - 4t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$



79.  $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$



81.  $((2k-1)\pi, 2)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$     91.  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=2} = -\frac{21}{512}$     93.  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=-3} = 0$     95. Κυρτή:  $t > 0$

97.  $\frac{1}{3}$     99.  $\frac{2}{5}$     101.  $\frac{2}{3}$

## Ενότητα 11.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

2. Όχι. Είναι ίσα όταν η καμπύλη που διαγράφεται από τη  $c(t)$  είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα από το αρχικό προς το τελικό σημείο και η  $c(t)$  είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα.

3. Η ταχύτητα τη χρονική στιγμή  $t$     4. Μετατόπιση: 5, όχι    5.  $L = 180 \text{ cm}$     6.  $4\pi$

### Ενότητα 11.2 Ασκήσεις

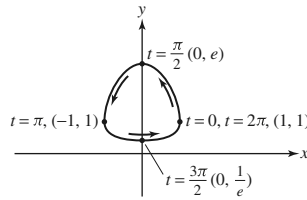
1.  $\int_0^5 \sqrt{3^2 + (-2)^2} dt = \int_0^5 \sqrt{13} dt = 5\sqrt{13}$ . Η διαδρομή είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα από το  $(-1, 2)$  ως το  $(14, -8)$  και το μήκος του τμήματος είναι  $\sqrt{(14 - (-1))^2 + ((-8) - 2)^2} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$ .

3.  $S = 16\sqrt{13}$     5.  $S = \frac{1}{2}(65^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 256.43$     7.  $S = 3\pi$     9.  $S = -8 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \approx 2.34$

13.  $S = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1.479$     15.  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=2} = 4\sqrt{10} \approx 12.65 \text{ m/s}$     17.  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=9} = \sqrt{41} \approx 6.4 \text{ m/s}$

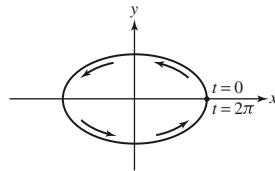
19.  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 1 \text{ m/s}$     21.  $\left( \frac{ds}{dt} \right)_{\min} \approx \sqrt{4.89} \approx 2.21$     23.  $\frac{ds}{dt} = 8$

25.



$M_{10} = 6.903734, M_{20} = 6.915035, M_{30} = 6.914949, M_{50} = 6.914951$

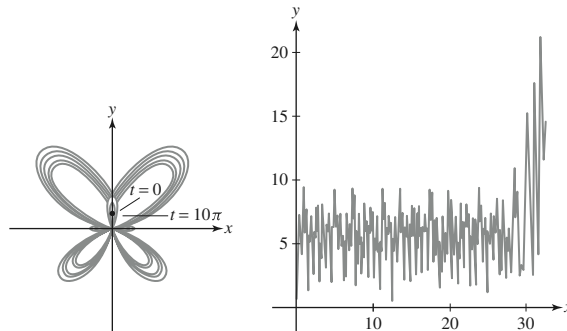
27.



$M_{10} = 25.528309, M_{20} = 25.526999, M_{30} = 25.526999, M_{50} = 25.526999$     29.  $s = 2\pi^2 R$

31.  $S = \pi mA^2 \sqrt{1 + m^2}$     33.  $S = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$     35.  $S = \pi\sqrt{2}$     37.  $S = 64\frac{\pi}{3}$     39.  $\approx 8.886$

41. (α)



(β)  $L \approx 212.096$

### Ενότητα 11.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) 2. Θετικό:  $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{2})$  αρνητικό:  $(r, \theta) = (-1, \frac{3\pi}{2})$

3. (α) Εξίσωση κύκλου με ακτίνα 2 και κέντρο στην αρχή των αξόνων

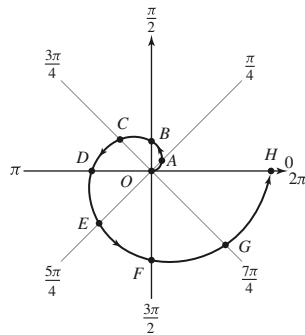
(β) Εξίσωση κύκλου με ακτίνα  $\sqrt{2}$  και κέντρο στην αρχή των αξόνων

(γ) Εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $(2, 0)$

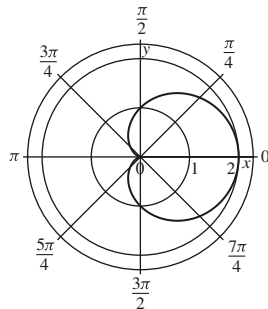
4. (α)

Ενότητα 11.3 Ασκήσεις

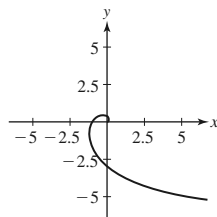
1. (A):  $(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ , (B):  $(3, \pi)$ , (Γ):  $(\sqrt{5}, \pi + 0.46) \approx (\sqrt{5}, 3.60)$ , (Δ):  $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ , (E):  $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ,  
 (ΣΤ):  $(4, \frac{\pi}{6})$ , (Ζ):  $(4, \frac{11\pi}{6})$   
 3. (α)  $(1, 0)$  (β)  $(\sqrt{12}, \frac{\pi}{6})$  (γ)  $(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4})$  (δ)  $(2, \frac{2\pi}{3})$   
 5. (α)  $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$  (β)  $(-\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{2}})$  (γ)  $(0, 0)$  (δ)  $(0, -5)$   
 7. (A):  $0 \leq r \leq 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi$ , (B):  $0 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , (Γ):  $3 \leq r \leq 5, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$   
 9.  $\theta = \frac{\pi}{6}$  11.  $m = \tan \frac{3\pi}{5} \approx -3.1$  13.  $x^2 + y^2 = 7^2$  15.  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  17.  $y = x - 1$   
 19.  $r = \sqrt{5}$  21.  $r = \tan \theta \sec \theta$  23.  $e^r = 1$   
 25. (α) ↔ (iii), (β) ↔ (iv), (γ) ↔ (i), (δ) ↔ (ii)  
 27. A:  $\theta = 0, \pi, 2\pi$ , B:  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  Γ:  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ , Δ:  $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$   
 (α) άνω ημικύκλιο (β) κάτω ημικύκλιο (γ) άνω ημικύκλιο  
 29.  $r \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = d$   
 31.



33.



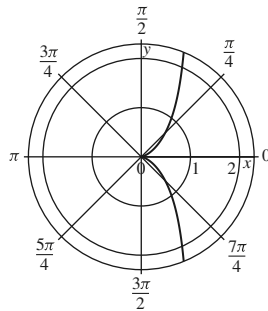
35. (α) A,  $\theta = 0, r = 0$ , B,  $\theta = \frac{\pi}{4}, r = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ , Γ,  $\theta = \frac{\pi}{2}, r = 0$ , Δ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}, r = \sin \frac{2 \cdot 3\pi}{4} = -1$ ,  
 E,  $\theta = \pi, r = 0$ , ΣΤ,  $\theta = \frac{5\pi}{4}, r = 1$ , Ζ,  $\theta = \frac{3\pi}{2}, r = 0$ , Η,  $\theta = \frac{7\pi}{4}, r = -1$ , Θ,  $\theta = 2\pi, r = 0$   
 (β) Η  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Η  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο.  
 Η  $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$  βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο. Η  $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$  βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο.  
 37. (α)



- (β)  $\lim_{\theta \rightarrow 2\pi^-} r \cos \theta = \infty$  και  $\lim_{\theta \rightarrow 2\pi^-} r \sin \theta = -2\pi$

(γ) Καθώς η  $\theta$  τείνει στο  $2\pi$  από αριστερά, το  $x$  τείνει στο  $\infty$  και το  $y$  τείνει στο  $-2\pi$ . Επομένως, η  $y = -2\pi$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

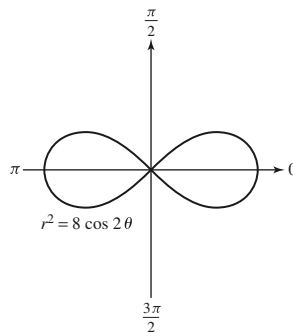
39.



41.  $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$ ,  $r = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ , με κέντρο στο σημείο  $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

43.  $r^2 = \sec 2\theta$  45.  $(x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3y^2x$  47.  $r = 2 \sec(\theta - \frac{\pi}{9})$  49.  $r = 2\sqrt{10} \sec(\theta - 4.39)$

53.  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$



57.  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $m = -\frac{2}{\pi}$ ,  $\theta = \pi$ ,  $m = \pi$

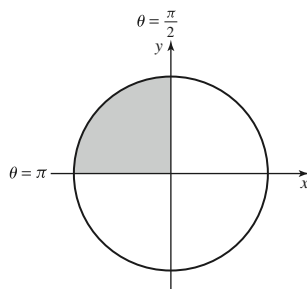
59.  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6})$ ,  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{6})$ ,  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{6})$ ,  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{11\pi}{6})$  61. A:  $m = 1$ , B:  $m = -1$ , Γ:  $m = 1$

#### Ενότητα 11.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (β) 2. Ναι 3. (γ)

#### Ενότητα 11.4 Ασκήσεις

1.  $A = \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} r^2 d\theta = \frac{25\pi}{4}$

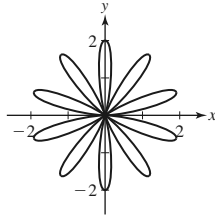


3.  $A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\theta = 4\pi$  5.  $A = \frac{\pi^5}{320} + \frac{\pi^4}{16} + \frac{\pi^3}{3}$  7.  $A = \frac{3\pi}{2}$  9.  $A = \frac{\pi}{8} \approx 0.39$  11. Εμβαδόν  $= \frac{1}{2}(\pi - 2) \approx 0.571$

$$13. A = \frac{\sqrt{15}}{2} + 7 \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 11.163 \quad 15. A = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0.54 \quad 17. A = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \approx 0.14$$

$$19. A = 4\pi \quad 21. A = \frac{9\pi}{2} - 4\sqrt{2}$$

23. (α)



(β) Εμβαδόν =  $\frac{3\pi}{2}$  (γ)  $r_n(0) = 0$ . Καθώς η  $\theta$  πηγαίνει από το 0 στο  $\frac{\pi}{n}$  και στο  $\frac{2\pi}{n}$ , η  $r_n(\theta)$  αυξάνεται από το 0 στο 2 και έπειτα μειώνεται πάλι στο 0. Επομένως, ένα πέταλο διαγράφεται καθώς η  $\theta$  πηγαίνει από το 0 στο  $\frac{2\pi}{n}$ . Αυτό επαναλαμβάνεται σε κάθε διαδοχικό διάστημα μήκους  $\frac{2\pi}{n}$ , διαγράφοντας έτσι  $n$  πέταλα καθώς η  $\theta$  πηγαίνει από το 0 στο  $2\pi$ . (δ) Εμβαδόν =  $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(n\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}x + \frac{2\sin(nx)}{n} + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$ . Σημείωση: Αυτό είναι ίσο με  $\frac{3}{8}(4\pi)$  και  $4\pi$  είναι το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας 2.

$$25. S = 4\pi \quad 27. L = \frac{1}{3} \left( (\pi^2 + 4)^{3/2} - 8 \right) \approx 14.55 \quad 29. L = \pi \quad 31. L = \sqrt{2}\pi/4 \approx 1.11$$

$$33. L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta} d\theta \approx 5.52 \quad 35. \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2\theta} + 2e^\theta + 1} d\theta$$

$$37. \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \sqrt{1 + 8\cos^2\theta} d\theta \quad 39. L \approx 6.682 \quad 41. L \approx 79.56$$

## Ενότητα 11.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

- (α) Υπερβολή (β) Παραβολή (γ) Έλλειψη (δ) Δεν είναι κωνική τομή
- Υπερβολές
- Τα σημεία  $(0, c)$  και  $(0, -c)$
- Οι  $\pm \frac{b}{a}$  είναι οι κλίσεις των δύο ασύμπτωτων της υπερβολής.

## Ενότητα 11.5 Ασκήσεις

$$1. F_1 = (-\sqrt{65}, 0), F_2 = (\sqrt{65}, 0). \text{ Οι κορυφές είναι } (9, 0), (-9, 0), (0, 4), \text{ και } (0, -4).$$

$$3. F_1 = (\sqrt{97}, 0), F_2 = (-\sqrt{97}, 0). \text{ Οι κορυφές είναι } (4, 0) \text{ και } (-4, 0).$$

$$5. \text{ Κορυφές: } (-2, -3), (10, -3), \text{ εστίες: } (4 - \sqrt{61}, -3), (4 + \sqrt{61}, -3)$$

$$7. \frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad 9. \frac{(x-14)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{3^2} = 1 \quad 11. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad 13. \frac{x^2}{(40/3)^2} + \frac{y^2}{(50/3)^2} = 1 \quad 15. \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

$$17. x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 \quad 19. \left(\frac{x-2}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{10\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \quad 21. y = 3x^2 \quad 23. y = \frac{1}{20}x^2 \quad 25. y = \frac{1}{16}x^2 \quad 27. x = \frac{1}{8}y^2$$

$$29. \text{ Κορυφές: } (\pm 4, 0), (0, \pm 2), \text{ εστίες: } (\pm\sqrt{12}, 0), \text{ με κέντρο στην αρχή των αξόνων.}$$

$$31. \text{ Κορυφές: } (7, -5), (-1, -5), \text{ εστίες: } (\sqrt{65} + 3, -5), (-\sqrt{65} + 3, -5), \text{ κέντρο: } (3, -5), \text{ ασύμπτωτες } y = \frac{7}{4}x - \frac{41}{4} \text{ και } y = -\frac{7}{4}x + \frac{1}{4}.$$

$$33. \text{ Κορυφές: } (5, 5), (-7, 5), \text{ εστίες: } (\sqrt{84} - 1, 5), (-\sqrt{84} - 1, 5), \text{ κέντρο: } (-1, 5),$$

$$\text{ασύμπτωτες: } y = \frac{\sqrt{48}}{6}(x+1) + 5 \approx 1.15x + 6.15 \text{ και } y = -\frac{\sqrt{48}}{6}(x+1) + 5 \approx -1.15x + 3.85$$

$$35. \text{ Κορυφή: } (4, 0), \text{ εστία: } (4, \frac{1}{16})$$

$$37. \text{ Κορυφές: } (1 \pm \frac{5}{2}, \frac{1}{5}), (1, \frac{1}{5} \pm 1), \text{ εστίες: } \left(-\frac{\sqrt{21}}{2} + 1, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{21}}{2} + 1, \frac{1}{5}\right), \text{ με κέντρο στο } (1, \frac{1}{5})$$

$$39. D = -87, \text{ έλλειψη} \quad 41. D = 40, \text{ υπερβολή} \quad 47. \text{ Εστία: } (0, c), \text{ διευθετούσα: } y = -c \quad 49. A = \frac{8}{3}c^2 \quad 51. r = \frac{3}{2 + \cos\theta}$$

53.  $r = \frac{4}{1 + \cos \theta}$  55. Υπερβολή,  $e = 4$ , διευθετούσα,  $x = 2$  57. Έλλειψη,  $e = \frac{3}{4}$ , διευθετούσα,  $x = \frac{8}{3}$

59.  $r = \frac{-12}{5 + 6 \cos \theta}$  61.  $\left(\frac{x+3}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$  63. 4.5 δισεκατομμύρια μίλια

65. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι σχέσεις μεταξύ των  $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $e$  συνεπάγονται ότι  $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ .

Υποθέτουμε ότι το  $P = (x, y)$  βρίσκεται στην έλλειψη. Τώρα

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + b^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 - 2cx + c^2 + b^2 = e^2 x^2 - 2aex + a^2 = (ex-a)^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2.$$

Προκύπτει ότι  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\sqrt{x - \frac{a}{e}}$  και επομένως  $PF = ePD$ .

## Κεφάλαιο 11 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

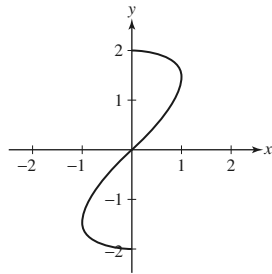
1. (α), (γ) 3.  $c(t) = (1 + 2 \cos t, 1 + 2 \sin t)$ . Τα σημεία τομής με τον άξονα των  $y$  είναι  $(0, 1 \pm \sqrt{3})$ . Τα σημεία τομής με τον άξονα των  $x$  είναι  $(1 \pm \sqrt{3}, 0)$ .

5.  $c(\theta) = (\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi))$  7.  $c(t) = (1 + 2t, 3 + 4t)$  9.  $y = -\frac{x}{4} + \frac{37}{4}$  11.  $y = -\frac{8}{(x-3)^3} + \frac{3-x}{2}$

13.  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=3} = \frac{3}{14}$  15.  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=20} = \frac{\cos 20}{e^{20}}$  17. (1.41, 1.60) 19.  $c(t) = (-1 + 6t^2 - 4t^3, -1 + 6t - 6t^2)$

21.  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{3 + 2(\cos t - \sin t)}$ , μέγιστη ταχύτητα:  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  23.  $s = \sqrt{2}$

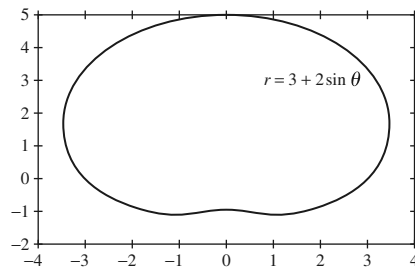
25.



$$s = 2 \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 t} dt \approx 6.0972$$

27. Τα  $(1, \frac{\pi}{6})$  και  $(3, \frac{5\pi}{4})$  έχουν ορθογώνιες συντεταγμένες  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  και  $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$ . 29.  $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x-y}$

31.  $r = 3 + 2 \sin \theta$



33.  $A = \frac{\pi}{16}$

35.  $e = \frac{1}{e}$  Παρατήρηση: Πρέπει να διπλασιάσουμε το ολοκλήρωμα από το  $-\frac{\pi}{2}$  ως το  $\frac{\pi}{2}$  για να λάβουμε υπόψη και τις δύο πλευρές της γραφικής παράστασης.

37.  $A = \frac{3\pi a^2}{2}$  39. Εξωτερικό:  $L \approx 36.121$ , εσωτερικό:  $L \approx 7.5087$ , διαφορά: 28.6123

41. Έλλειψη. Κορυφές:  $(\pm 3, 0)$ ,  $(0, \pm 2)$ , εστίες:  $(\pm\sqrt{5}, 0)$

43. Έλλειψη. Κορυφές:  $(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ ,  $(0, \pm \frac{4}{\sqrt{5}})$ , εστίες:  $(0, \pm \sqrt{\frac{12}{5}})$  45.  $(\frac{x}{8})^2 + (\frac{y}{\sqrt{61}})^2 = 1$  47.  $(\frac{x}{8})^2 - (\frac{y}{6})^2 = 1$

49.  $x = \frac{1}{32}y^2$  51.  $y = \sqrt{3}x + (\sqrt{3} - 5)$  και  $y = -\sqrt{3}x + (-\sqrt{3} - 5)$



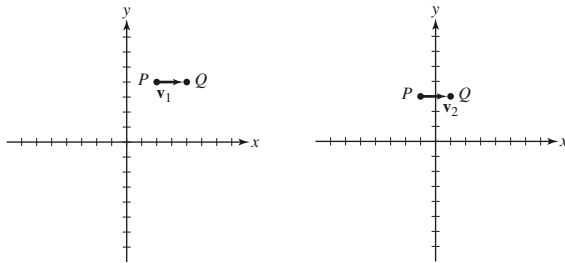
## Κεφάλαιο 12

## Ενότητα 12.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

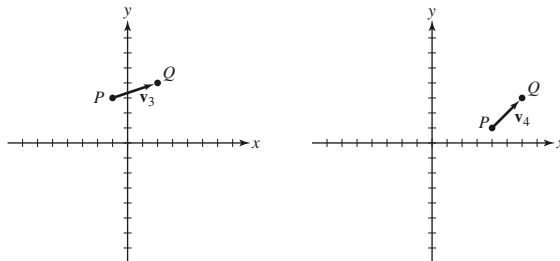
1. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Σωστό (δ) Σωστό 2.  $\|-3\mathbf{a}\| = 15$  3. Οι συνιστώσες δεν αλλάζουν.  
4.  $\langle 0, 0 \rangle$  5. (α) Σωστό (β) Λάθος

## Ενότητα 12.1 Ασκήσεις

1.  $\mathbf{v}_1 = \langle 2, 0 \rangle$ ,  $\|\mathbf{v}_1\| = 2$       $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 0 \rangle$ ,  $\|\mathbf{v}_2\| = 2$

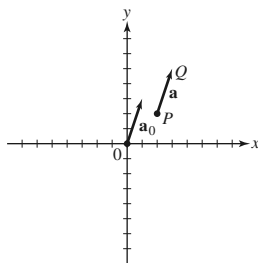


$\mathbf{v}_3 = \langle 3, 1 \rangle$ ,  $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{10}$       $\mathbf{v}_4 = \langle 2, 2 \rangle$ ,  $\|\mathbf{v}_4\| = 2\sqrt{2}$



Τα διανύσματα  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  είναι ισοδύναμα.

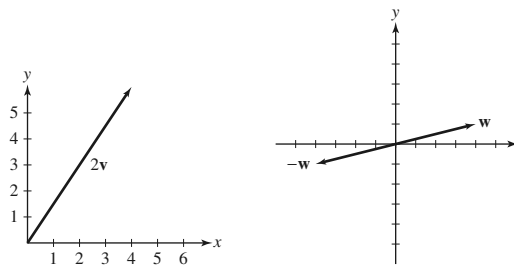
3.  $\langle 3, 5 \rangle$



5.  $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle \approx \langle 0.707, 0.707 \rangle$  7.  $\langle \cos(-20^\circ), \sin(-20^\circ) \rangle \approx \langle 0.94, -0.342 \rangle$  9.  $\overrightarrow{PQ} = \langle -1, 5 \rangle$  11.  $\overrightarrow{PQ} = \langle -1, 24 \rangle$

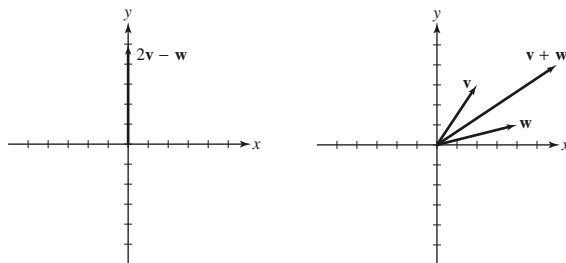
13.  $\langle 5, 5 \rangle$  15.  $\langle 30, 10 \rangle$  17.  $\langle \frac{5}{2}, 5 \rangle$  19.  $\langle \pi, -7 \rangle$  21. Διάνυσμα (B)

23.  $2\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$       $-\mathbf{w} = \langle -4, -1 \rangle$

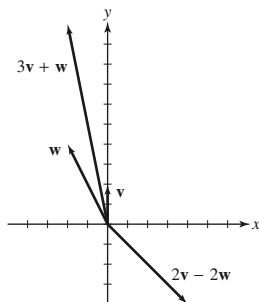


$$2\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle 0, 5 \rangle$$

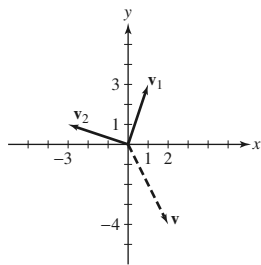
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 6, 4 \rangle$$



$$25. 3\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle -2, 10 \rangle, 2\mathbf{v} - 2\mathbf{w} = \langle 4, -4 \rangle$$



27.



$$29. (\beta) \text{ και } (\gamma) \quad 31. \overrightarrow{AB} = \langle 2, 6 \rangle \text{ και } \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 6 \rangle, \text{ ισοδύναμα} \quad 33. \overrightarrow{AB} = \langle 3, -2 \rangle \text{ και } \overrightarrow{PQ} = \langle 3, -2 \rangle, \text{ ισοδύναμα}$$

$$35. \overrightarrow{AB} = \langle 2, 3 \rangle \text{ και } \overrightarrow{PQ} = \langle 6, 9 \rangle, \text{ παράλληλα και έχουν την ίδια κατεύθυνση.}$$

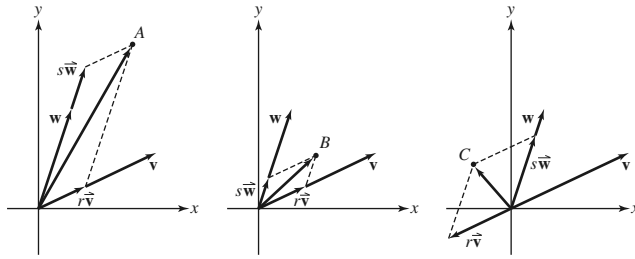
$$37. \overrightarrow{AB} = \langle -8, 1 \rangle \text{ και } \overrightarrow{PQ} = \langle 8, -1 \rangle, \text{ παράλληλα και έχουν αντίθετη κατεύθυνση.}$$

$$39. \|\overrightarrow{OR}\| = \sqrt{53} \quad 41. P = (0, 0) \quad 43. \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle \quad 45. 4\mathbf{e}_a = \langle -2\sqrt{2}, -2\sqrt{2} \rangle \quad 47. 2\mathbf{e}_{-v} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

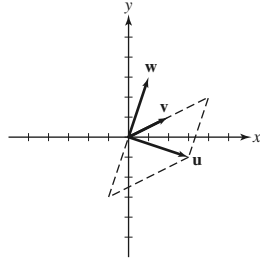
$$49. \mathbf{e} = \langle \cos \frac{4\pi}{7}, \sin \frac{4\pi}{7} \rangle \approx \langle -0.22, 0.97 \rangle \quad 51. \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -1, 2 \rangle \quad 53. \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{13}} \quad 55. P = (4, 6)$$

$$57. (\alpha) \rightarrow (\text{ii}), (\beta) \rightarrow (\text{iv}), (\gamma) \rightarrow (\text{iii}), (\delta) \rightarrow (\text{i}) \quad 59. 9\mathbf{i} + 7\mathbf{j} \quad 61. -5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

63.



65.  $u = 2v - w$



67. Η δύναμη στο καλώδιο 1 είναι  $\approx 444$  newtons. και η δύναμη στο καλώδιο 2 είναι  $\approx 207$  newtons

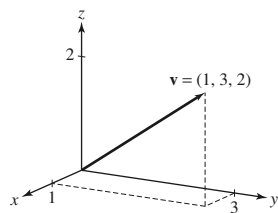
69. 230 km/h 71.  $r \approx \langle 6.45, 0.38 \rangle$

Ενότητα 12.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

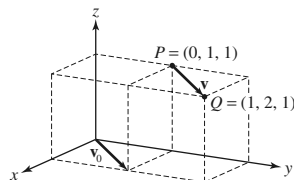
1. (4, 3, 2) 2.  $\langle 3, 2, 1 \rangle$  3. (α) 4. (γ) 5. Άπειρα διανύσματα κατεύθυνσης  
 6. Σωστό 7.  $\sqrt{5}$  8. (0, 0, 0), (0, 0, -1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)

Ενότητα 12.2 Ασκήσεις

1.  $\|v\| = \sqrt{14}$



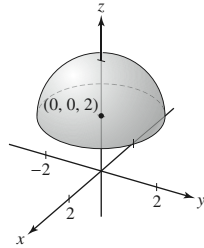
3. Η κεφαλή του  $v = \vec{PQ}$  είναι  $Q = (1, 2, 1)$ .



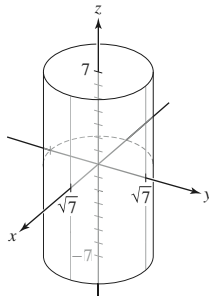
5.  $\vec{PQ} = \langle 1, 1, -1 \rangle$  7.  $\vec{PQ} = \langle -\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, 1 \rangle$  9.  $\|\vec{OR}\| = \sqrt{26} \approx 5.1$  11.  $P = (-2, 6, 0)$

13. (α) Παράλληλα και ίδια κατεύθυνση (β) Μη παράλληλα  
 (γ) Παράλληλα και αντίθετες κατευθύνσεις (δ) Μη παράλληλα

15. Μη ισοδύναμα 17. Μη ισοδύναμα 19.  $\langle -8, -18, -2 \rangle$  21.  $\langle -2, -2, 3 \rangle$  23.  $\langle 16, -1, 9 \rangle$   
 25. Μη παράλληλα 27. Μη παράλληλα 29.  $\mathbf{e}_w = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}} \right\rangle$  31.  $-\mathbf{e}_v = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right\rangle$   
 33. Το άνω μισό μιας σφαίρας με ακτίνα 2 και κέντρο στο  $(0, 0, 2)$



35. Το τμήμα του κυλίνδρου ακτίνας  $\sqrt{7}$ , με τον άξονα των  $z$  ως κεντρικό άξονα, που βρίσκεται μεταξύ  $z = -7$  και  $z = 7$ .



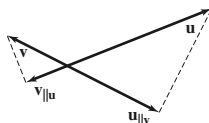
37.  $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 9$  39.  $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 + (z - 11)^2 = 277$  41.  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$   
 43.  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 2t, 2 + t, -8 + 3t \rangle$  45.  $\mathbf{r}(t) = \langle 4 + 7t, 0, 8 + 4t \rangle$  47.  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 2t, 1 - 6t, 1 + t \rangle$   
 49.  $\mathbf{r}(t) = \langle 4t, t, t \rangle$  51.  $\mathbf{r}(t) = \langle 0, 0, t \rangle$  53.  $\mathbf{r}(t) = \langle -t, -2t, 4 - 2t \rangle$  55. (γ)  
 59.  $\mathbf{r}_1(t) = \langle 5, 5, 2 \rangle + t \langle 0, -2, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{r}_2(t) = \langle 5, 5, 2 \rangle + t \langle 0, -20, 10 \rangle$   
 63. Οι ευθείες τέμνονται στο  $(3, 4, 7)$ . 65. 4 min 67.  $(-1, -3, 2)$  και  $(\frac{23}{17}, -\frac{11}{17}, -\frac{26}{17})$  69.  $\langle 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$   
 71. 2450 newtons 73.  $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{3}$  75.  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-9} = \frac{z}{12}$  77.  $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 7t, 8t \rangle$

### Ενότητα 12.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Βαθμωτό 2. Αμβλεία 3. Επιμεριστική ιδιότητα 4. (α) 5. (β), (γ) 6. (γ)

### Ενότητα 12.3 Ασκήσεις

1. 15 3. 2 5. 5 7. 0 9. 1 11. 0 13. Αμβλεία 15. Ορθογώνια 17. Οξεία 19. 0 21.  $\frac{1}{\sqrt{10}}$  23.  $\pi/4$   
 25.  $\approx 0.615$  27.  $2\pi/3$  29.  $\cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0.641$  31. (α)  $b = -\frac{1}{2}$  (β)  $b = 0$  ή  $b = \frac{1}{2}$   
 33.  $\mathbf{v}_1 = \langle 0, 1, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{v}_2 = \langle 3, 2, 2 \rangle$  35.  $-\frac{3}{2}$  37.  $\|\mathbf{v}\|^2$  39.  $\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2$  41. 8 43. 2 45.  $\pi$   
 47. (β) 7 51.  $51.91^\circ$   
 53. (α)



(β)  $\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}}$ 

55.  $\langle \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \rangle$  57.  $\langle -\frac{4}{5}, 0, -\frac{2}{5} \rangle$  59.  $-4\mathbf{k}$  61.  $a\mathbf{i}$  63.  $2\sqrt{2}$  65.  $\sqrt{17}$

67.  $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle + \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$  69.  $\mathbf{a} = \langle 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle + \langle 4, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$  71.  $\langle \frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2} \rangle + \langle \frac{x+y}{2}, \frac{y+x}{2} \rangle$  75.  $\approx 35^\circ$

77.  $\overrightarrow{AD}$  79. Μήκος διαγωνίου =  $\sqrt{52,359.625} \approx 228.82$  in., προσέγγιση μισής διαφοράς =  $228 \frac{3}{4}$  in.

81.  $\approx 109.5^\circ$

85. Το διάνυσμα του ανέμου είναι  $\mathbf{w} = \langle 0, -45 \rangle$ . Εκφράζεται ως  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\parallel} + \mathbf{w}_{\perp}$ , όπου το  $\mathbf{w}_{\parallel}$  είναι παράλληλο στη γέφυρα και ισούται με  $-45 \sin 58^\circ \langle \cos 58^\circ, \sin 58^\circ \rangle \approx \langle -20.22, -32.36 \rangle$ , ενώ το  $\mathbf{w}_{\perp}$  είναι κάθετο στη γέφυρα και ισούται με  $\langle 0, -45 \rangle + 45 \sin 58^\circ \langle \cos 58^\circ, \sin 58^\circ \rangle \approx \langle 20.22, -12.64 \rangle$ . Το μέτρο του κάθετου όρου είναι  $\approx 23.85$  km/h.

87.  $\approx 68.07$  newtons

93. Θεωρήστε το παραλληλόγραμμο που φαίνεται στο Σχήμα 8. Υποθέστε ότι οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Τότε  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ . Εφόσον  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  και  $\mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ , προκύπτει ότι

$$0 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$$

Επομένως,  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ , που συνεπάγεται ότι το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος. Έτσι, αν ένα παραλληλόγραμμο έχει κάθετες διαγώνιους, τότε είναι ρόμβος.

Αντίστροφα, υποθέστε ότι το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος. Τότε  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ . Αυτό συνεπάγεται ότι

$0 = \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ . Επομένως, οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Έτσι, αν το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι διαγώνιοί του είναι κάθετες.

105.  $2x + 2y - 2z = 1$

## Ενότητα 12.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$  2.  $\|\mathbf{e} \times \mathbf{f}\| = \frac{1}{2}$  3.  $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \langle -2, -2, -1 \rangle$  4. (α)  $\mathbf{0}$  (β)  $\mathbf{0}$  5.  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  και  $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

6.  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$  αν οποιοδήποτε από τα  $\mathbf{v}$  ή  $\mathbf{w}$  (ή και τα δύο) είναι το μηδενικό διάνυσμα ή τα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{w}$  είναι παράλληλα διανύσματα.

7. (α) Δεν έχει νόημα επειδή δεν ορίζεται το εξωτερικό γινόμενο ενός βαθμωτού με ένα διάνυσμα.

(β) Έχει νόημα επειδή παριστάνει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

(γ) Έχει νόημα επειδή είναι το γινόμενο δύο βαθμωτών.

(δ) Έχει νόημα επειδή είναι το βαθμωτό γινόμενο ενός διανύσματος.

8. (β)

## Ενότητα 12.4 Ασκήσεις

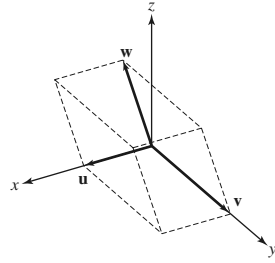
1.  $-5$  3.  $-15$  5.  $-8$  7.  $0$  9.  $\langle 1, 2, -5 \rangle$  11.  $\langle 6, 0, -8 \rangle$  13.  $\langle 0.02, -0.01, 0 \rangle$  15.  $-\mathbf{j} + \mathbf{i}$  17.  $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19.  $\langle -1, -1, 0 \rangle$  21.  $\langle -2, -2, -2 \rangle$  23.  $\langle 4, 4, 0 \rangle$  25.  $\mathbf{v} \times \mathbf{i} = c\mathbf{j} - b\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} \times \mathbf{j} = -c\mathbf{i} + a\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} \times \mathbf{k} = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$

27.  $-\mathbf{u}$  29.  $\langle 0, 3, 3 \rangle$  33.  $\mathbf{e}'$

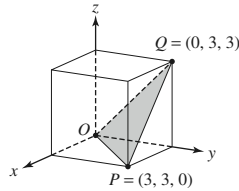
35. (α)  $0.0067$  N (β)  $0.0067$  N (γ)  $0$  (δ)  $0.0095$  N

37.  $\mathbf{F}_1$  41.  $2\sqrt{138}$  43. Ο όγκος είναι 4.



45.  $\sqrt{35} \approx 5.92$

47.



Το εμβαδόν του τριγώνου είναι  $\frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7.8$ .

49. 3    51.  $\frac{33}{2}\sqrt{3}$

$$57. (\alpha) \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0)\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (1)\mathbf{k} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k} = -\mathbf{i}$$

(β) Το μήκος του  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  είναι  $\|\mathbf{i}\| \|\mathbf{j}\| \sin 90^\circ = 1$  αφού τα  $\mathbf{i}$  και  $\mathbf{j}$  είναι μοναδιαία διανύσματα και η γωνία μεταξύ τους είναι  $90^\circ$ . Επίσης, παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο του  $\mathbf{i}$  με το  $\mathbf{j}$ , ο κανόνας του δεξιού χεριού δίνει τη θετική κατεύθυνση του άξονα των  $z$ . Επομένως, το  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  είναι ένα διάνυσμα μήκους 1, που δείχνει προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα των  $z$ , δηλαδή  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ .

Το μήκος του  $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$  είναι  $\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{j}\| \sin 90^\circ = 1$  αφού τα  $\mathbf{k}$  και  $\mathbf{j}$  είναι μοναδιαία διανύσματα και η γωνία μεταξύ τους είναι  $90^\circ$ . Επίσης, παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο του  $\mathbf{k}$  με το  $\mathbf{j}$ , ο κανόνας του δεξιού χεριού δίνει την αρνητική κατεύθυνση του άξονα των  $x$ . Επομένως, το  $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$  είναι ένα διάνυσμα μήκους 1, που δείχνει προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα των  $x$ , δηλαδή  $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ .

63.  $\mathbf{X} = \langle a, a, a+1 \rangle$     67.  $\tau = 250 \sin 125^\circ \mathbf{k} \approx 204.79 \mathbf{k} \text{ N}\cdot\text{m}$

### Ενότητα 12.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $3x + 4y - z = 0$     2. (γ):  $z = 1$     3. Επίπεδο (γ)    4. Επίπεδο  $xz$     5. (γ):  $x + y = 0$     6. Πρόταση (α)

### Ενότητα 12.5 Ασκήσεις

1.  $x + 3y + 2z = 3$     3.  $-x + 2y + z = 3$     5.  $x = 3$     7.  $z = 2$     9.  $x = 0$     11. Οι προτάσεις (β) και (δ)  
 13.  $\langle 9, -4, -11 \rangle$     15.  $\langle 3, -8, 11 \rangle$     17.  $4x - 9y + z = 0$     19.  $x = 4$     21.  $6x + 9y + 4z = 19$     23.  $x + 2y - z = 1$   
 25. (α) Έστω ότι τα σημεία είναι τα  $P, Q$  και  $R$ . Τότε το  $\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$  είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

(β) Έστω ότι τα  $\mathbf{v}_1$  και  $\mathbf{v}_2$  είναι τα διανύσματα κατεύθυνσης για τις ευθείες. Τότε το  $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$  είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

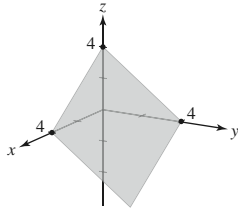
27. (α) Δεν τέμνονται (β) Έχουν ένα σημείο τομής. Μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τις ευθείες είναι η  $x - y - z = 4$ .

29. (α) Το σημείο ανήκει στην ευθεία. (β) Το σημείο δεν ανήκει στην ευθεία. Μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει το σημείο και την ευθεία είναι η  $x - y = 6$ .

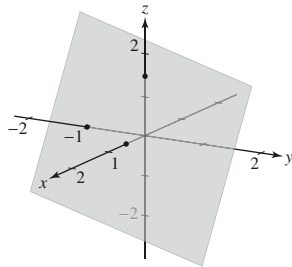
31. (α) Είναι διακριτές παράλληλες ευθείες. Μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει τις ευθείες είναι η  $4x - 5y + 6z = -13$ .

(β) Οι ευθείες δεν είναι παράλληλες.

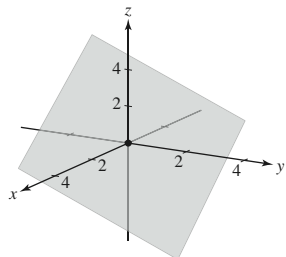
33.



35.



37.



39.  $10x + 15y + 6z = 30$  41.  $(1, 5, 8)$  43.  $(-2, 3, 12)$  45.  $-9y + 4z = 5$  47.  $x = -\frac{2}{3}$  49.  $x = -4$

51. Τα δύο επίπεδα δεν έχουν κοινά σημεία. 53.  $y - 4z = 0$

$$x + y - 4z = 0$$

55.  $(3\lambda)x + by + (2\lambda)z = 5\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$  57.  $\theta = \pi/2$  59.  $\theta \approx 1.143$  ακτίνια ή  $\theta \approx 65.49^\circ$  61.  $\theta \approx 55.0^\circ$

63.  $x + y + z = 1$  65.  $x - y - z = d/a$  67.  $x = \frac{9}{5} + 2t$ ,  $y = -\frac{6}{5} - 3t$ ,  $z = 2 + 5t$  69.  $\pm 24 \langle 1, 2, -2 \rangle$

75.  $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  77.  $\frac{6}{\sqrt{30}} \approx 1.095$  79.  $|a|$

## Ενότητα 12.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Σωστό, ως επί το πλείστον, εκτός από τα  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$ , ή  $z = \pm c$ .
2. Λάθος 3. Υπερβολικό παραβολοειδές 4. Όχι 5. Ελλειψοειδές
6. Όλες οι κατακόρυφες ευθείες που διέρχονται από μια παραβολή  $c$  στο επίπεδο  $xy$ .

### Ενότητα 12.6 Ασκήσεις

1. Ελλειψοειδές 3. Ελλειψοειδές 5. Μονόχωνο υπερβολοειδές 7. Ελλειψοειδές 9. Ελλειπτικό παραβολοειδές

11. Υπερβολικό παραβολοειδές 13. Υπερβολικό παραβολοειδές 15. Ελλειπτικός κώνος

17. Ελλειψοειδές, το ίχνος είναι ένας κύκλος στο επίπεδο  $xz$ .

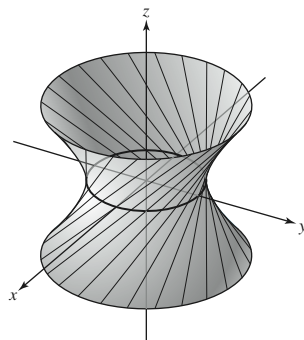
19. Ελλειψοειδές, το ίχνος είναι μια έλλειψη παράλληλα στο επίπεδο  $xy$ .

21. Μονόχωνο υπερβολοειδές, το ίχνος είναι μια υπερβολή.

23. Παραβολικός κύλινδρος, το ίχνος είναι η παραβολή  $y = 3x^2$ .

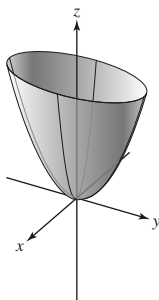
25. (α) ↔ Σχήμα β, (β) ↔ Σχήμα γ, (γ) ↔ Σχήμα α 27.  $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2$

29.

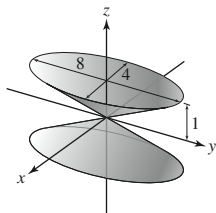


Γραφική παράσταση της  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

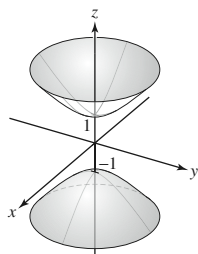
31.



33.

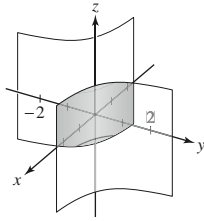


35.

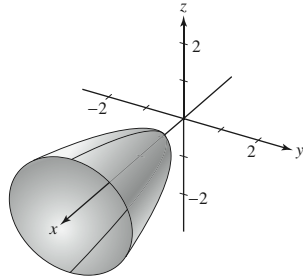




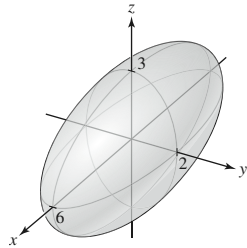
37.



39.



41.



43.  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{6}\right)^2 = 1$     45.  $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 - \left(\frac{z}{3\sqrt{3}}\right)^2 = 1$

47. Μία από τις δύο κατακόρυφες ευθείες ή το κενό σύνολο.    49. Ένας ελλειπτικός κώνος.

### Ενότητα 12.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Κύλινδρος ακτίνας  $R$  του οποίου ο άξονας συμπίπτει με τον άξονα των  $z$ , σφαίρα ακτίνας  $R$  με κέντρο στην αρχή των αξόνων.

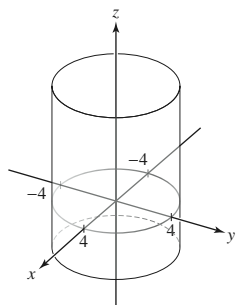
2. (β)    3. (α)    4.  $\phi = 0, \pi$     5.  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , το επίπεδο  $xy$

### Ενότητα 12.7 Ασκήσεις

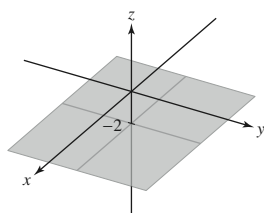
1.  $(-4, 0, 4)$     3.  $(0, 0, \frac{1}{2})$     5.  $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 1)$     7.  $(2, \frac{\pi}{3}, 7)$     9.  $(5, \frac{\pi}{4}, 2)$     11.  $r^2 \leq 3$

13.  $r^2 + z^2 \leq 4, \theta = \frac{\pi}{2}$  ή  $\theta = \frac{3\pi}{2}$     15.  $r^2 \leq 9, \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$  και  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

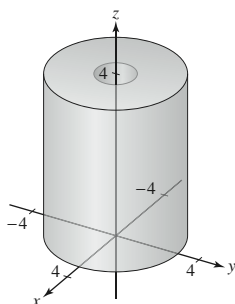
17.



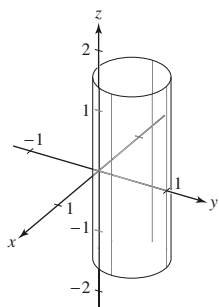
19.



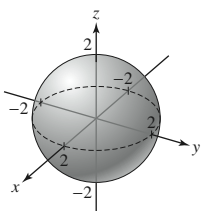
21.



23.



25.

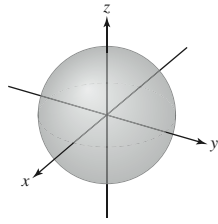


$$27. r = \frac{z}{\cos \theta + \sin \theta} \quad 29. r = \frac{z \tan \theta}{\cos \theta} \quad 31. r = 2 \quad 33. (3, 0, 0) \quad 35. (0, 0, 3) \quad 37. \left( \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -3\sqrt{3} \right) \quad 39. \left( 2, 0, \frac{\pi}{3} \right)$$

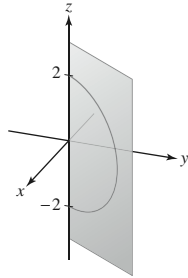
$$41. \left( \sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, 0.955 \right) \quad 43. \left( 2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right) \quad 45. \left( 2\sqrt{2}, 0, \frac{\pi}{4} \right) \quad 47. \left( 2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2} \right) \quad 49. \rho \leq 10$$

$$51. \rho = \sqrt{10}, 0 \leq \phi, \theta \leq \pi/2 \quad 53. \left\{ (\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 2, \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ή } \theta = \frac{3\pi}{2} \right\}$$

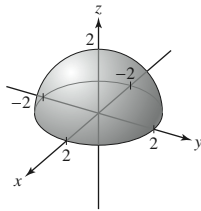
55.



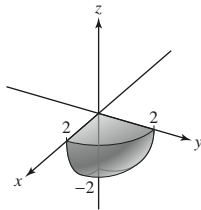
57.



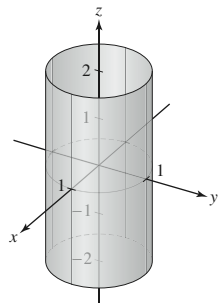
59.



61.



63.



65.  $\rho = 3 \csc \phi$    67.  $\rho = \frac{2}{\cos \phi}$    69.  $\rho = \frac{\cos \theta \tan \phi}{\cos \phi}$    71.  $\rho = \frac{2}{\sin \phi \sqrt{\cos 2\theta}}$    73. (β)

75. Ελσίνκι:  $(25.0^\circ, 29.9^\circ)$ , Σάο Πάολο:  $(313.48^\circ, 113.52^\circ)$

77. Σίδνεϊ:  $(-4618.8, 2560.3, -3562.1)$ , Μπογκοτά:  $(1723.7, -6111.7, 503.5)$    79.  $z = \pm r \sqrt{\cos 2\theta}$

81.  $\{(r, \theta, z) : -\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}, 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$    85.  $r = \sqrt{z^2 + 1}$  και  $\rho = \sqrt{-\frac{1}{\cos 2\phi}}$ ,

δεν υπάρχουν σημεία,  $\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4}$ .

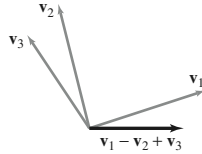
## Κεφάλαιο 12 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1.  $\langle 21, -25 \rangle$  και  $\langle -19, 31 \rangle$     3.  $\left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$     5.  $\mathbf{i} = \frac{2}{11}\mathbf{v} + \frac{5}{11}\mathbf{w}$     7.  $\overrightarrow{PQ} = \langle -4, 1 \rangle$ ,  $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{17}$

9.  $\left\langle \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right\rangle$     11.  $\beta = \frac{3}{2}$

13.  $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{3}, -\frac{11}{6}, \frac{7}{6} \right\rangle$     15.  $\mathbf{r}_1(t) = \langle 1 + 3t, 4 + t, 5 + 6t \rangle$ ,  $\mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 3t, t, 6t \rangle$     17.  $a = -2$ ,  $b = 2$

19.



21.  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -9$     23.  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \langle 10, -8, -7 \rangle$     25.  $V = 48$     29.  $\frac{5}{3}$     31.  $\|\mathbf{F}_1\| = \frac{2\|\mathbf{F}_2\|}{\sqrt{3}}$ ,  $\|\mathbf{F}_1\| = 980 \text{ N}$

33.  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \langle -6, 7, -2 \rangle$     35.  $-47$     37.  $5\sqrt{2}$     41.  $\|\mathbf{e} - 4\mathbf{f}\| = \sqrt{13}$     47.  $(x - 0) + 4(y - 1) - 3(z + 1) = 0$

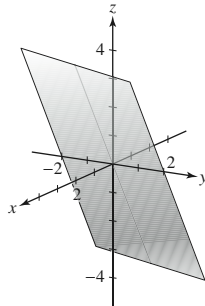
49.  $17x - 21y - 13z = -28$     51.  $3x - 2y = 4$     53. Ελλειψοειδές    55. Ελλειπτικό παραβολοειδές

57. Ελλειπτικός κώνος    59. (α) Κενό σύνολο    (β) Μονόχωνο υπερβολοειδές    (γ) Δίχωνο υπερβολοειδές

61.  $(r, \theta, z) = (5, \tan^{-1} \frac{4}{3}, -1)$ ,  $(\rho, \theta, \phi) = (\sqrt{26}, \tan^{-1} \frac{4}{3}, \cos^{-1} (\frac{-1}{\sqrt{26}}))$

63.  $(r, \theta, z) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3}{2})$

65.  $z = 2x$



69.  $A < -1$ : Μονόχωνο υπερβολοειδές

$A = -1$ : Κύλινδρος με κεντρικό άξονα πάνω στον άξονα των  $z$

$A > -1$ : Ελλειψοειδές

$A = 0$ : Σφαίρα

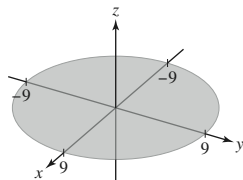
## Κεφάλαιο 13

## Ενότητα 13.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (γ) 2. Η καμπύλη  $z = e^x$  3. Η προβολή πάνω στο επίπεδο  $xz$  4. Το σημείο  $(-2, 2, 3)$   
 5. Καθώς αυξάνεται το  $t$  από το 0 ως το  $2\pi$ , ένα σημείο πάνω στην  $\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$  κινείται δεξιόστροφα και ένα σημείο πάνω στην  $\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$  κινείται αριστερόστροφα.  
 6. (α), (γ) και (δ)

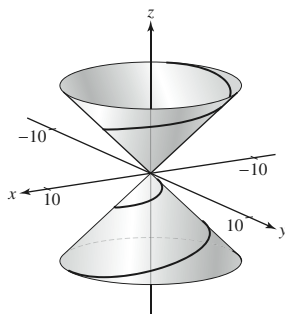
## Ενότητα 13.1 Ασκήσεις

1.  $D = \{t \in \mathbf{R}, t \neq 0, t \neq -1\}$  3.  $\mathbf{r}(2) = \langle 0, 4, \frac{1}{5} \rangle, \mathbf{r}(-1) = \langle -1, 1, \frac{1}{2} \rangle$  5.  $\mathbf{r}(t) = (3+3t)\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + (7+t)\mathbf{k}$   
 7. Ναι, όταν  $t = (2n-1)\pi$ , όπου  $n$  είναι ακέραιος, στα σημεία  $(0, 0, (2n-1)\pi)$  9. Κανένα σημείο τομής  
 11. Η διαδρομή που δίνεται από την  $\mathbf{r}(t)$  τέμνει το επίπεδο  $yz$  όταν  $1 - \cos(2t) = 0$ , οπότε για  $t = n\pi$  για κάθε ακέραιο  $n$ . Τα αντίστοιχα σημεία είναι τα  $(0, n\pi, (n\pi)^2)$ . Εφόσον  $1 - \cos(2t) \geq 0$  για κάθε  $t$ , η συντεταγμένη  $x$  κάθε σημείου στην καμπύλη είναι μη αρνητική και επομένως δεν υπάρχει σημείο αναστροφής της καμπύλης στην πλευρά αρνητικών  $x$  του επιπέδου  $yz$ . Επομένως, η καμπύλη δεν διέρχεται από το επίπεδο  $yz$ .  
 13.  $A \leftrightarrow \text{ii}, B \leftrightarrow \text{i}, C \leftrightarrow \text{iii}$  15. (α) = (v), (β) = (i), (γ) = (ii), (δ) = (vi), (ε) = (iv), (στ) = (iii)  
 17.  $C \leftrightarrow \text{i}, A \leftrightarrow \text{ii}, B \leftrightarrow \text{iii}$   
 19. Αυτός είναι κύκλος ακτίνας 9 με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ευρισκόμενος στο επίπεδο  $xy$ .



21. Ακτίνα 1, κέντρο  $(0, 0, 4)$ , επίπεδο  $xz$   
 23. (α)  $x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2(2t) \sin^2 t + \sin^2(2t) + \cos^2(2t) \cos^2 t = \cos^2(2t)(\cos^2 t + \sin^2 t) + \sin^2(2t) = \cos^2(2t) + \sin^2(2t) = 1$ .  
 Εφόσον  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , η καμπύλη  $C$  βρίσκεται πάνω στη σφαίρα ακτίνας 1 με κέντρο στην αρχή των αξόνων.  
 (β)  $\mathbf{r}(3\pi/2) = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{r}(\pi/4) = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{r}(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$

25.



27.  $(0, 1, 0), (0, -1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$   
 29.  $x = 2t^2 - 7, y = t, z = \sqrt{(9-t^2)}$ , με  $-3 \leq t \leq 3$

31. (α)  $\mathbf{r}(t) = \langle \pm t\sqrt{1-t^2}, t^2, t \rangle$  για  $-1 \leq t \leq 1$

(β) Η προβολή είναι κύκλος στο επίπεδο  $xy$  με ακτίνα  $\frac{1}{2}$  και κέντρο στο σημείο  $(0, \frac{1}{2})$  του επιπέδου  $xy$ .

33.  $x = \cos(t), y = \sin(t), z = 1 - \cos(t) - \sin(t)$ , με  $0 \leq t < 2\pi$ . 35.  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, 4 \cos^2 t \rangle, 0 \leq t \leq 2\pi$

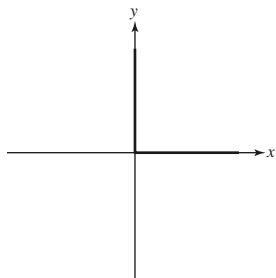
37. Συγκρούονται στο σημείο  $(12, 4, 2)$  και συναντώνται στα σημεία  $(4, 0, -6)$  και  $(12, 4, 2)$ .

39.  $\mathbf{r}(t) = \langle 3, 2, t \rangle, -\infty < t < \infty$  41.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3t, 15t \rangle, -\infty < t < \infty$

43.  $\mathbf{r}(t) = \langle 1, 2 + 2 \cos t, 5 + 2 \sin t \rangle, 0 \leq t \leq 2\pi$

45.  $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \rangle, 0 \leq t \leq 2\pi$  47.  $\mathbf{r}(t) = \langle 3 + 2 \cos t, 1, 5 + 3 \sin t \rangle, 0 \leq t \leq 2\pi$

49.



$\mathbf{r}(t) = \langle |t| + t, |t| - t \rangle$

### Ενότητα 13.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $\frac{d}{dt} (f(t)\mathbf{r}(t)) = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$

$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) + \mathbf{r}'_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$

$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}'_2(t) + \mathbf{r}'_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$

2. Σωστό 3. Σωστό 4. Σωστό 5. Λάθος 6. Λάθος 7. (α) Διάνυσμα (β) Βαθμωτό (γ) Διάνυσμα

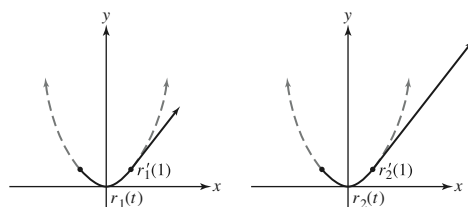
### Ενότητα 13.2 Ασκήσεις

1.  $\lim_{t \rightarrow 3} \langle t^2, 4t, \frac{1}{t} \rangle = \langle 9, 12, \frac{1}{3} \rangle$  3.  $\lim_{t \rightarrow 0} (e^{2t}\mathbf{i} + \ln(t+1)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 4\mathbf{k}$  5.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \langle -\frac{1}{t^2}, \cos t, 0 \rangle$

7.  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$  9.  $\mathbf{r}'(s) = \langle -e^{1-s}, -1, 1/(s-1) \rangle$  11.  $\mathbf{c}'(t) = -t^{-2}\mathbf{i} - 2e^{2t}\mathbf{k}$

13.  $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$   $\mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$

15.



17.  $t = 2\pi/3$  19.  $\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)) = 2t^3e^{2t} + 3t^2e^{3t} + 2te^{3t} + 3t^2e^{2t} + te^t + e^t$

21.  $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \left\langle \begin{matrix} 3t^2e^t - 2te^{2t} - e^{2t} + t^3e^t, & e^{3t} + 3te^{3t} - t^2e^t - 2te^t, \\ 2te^{2t} + 2t^2e^{2t} - 3t^2e^{3t} - 3t^3e^{3t} \end{matrix} \right\rangle$     23.  $2 + 4e$
25.  $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(g(t)) = \langle 2e^{2t}, -e^t \rangle$     27.  $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(g(t)) = \langle 4e^{4t+9}, 8e^{8t+18}, 0 \rangle$     29.  $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{a}(t))|_{t=2} = 13$
31.  $\mathbf{L}(t) = \langle 4 - 4t, 16 - 32t \rangle$     33.  $\mathbf{L}(t) = \langle -3 - 4t, 10 + 5t, 16 + 24t \rangle$     35.  $\mathbf{L}(s) = \langle 2 - s, 0, -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}s \rangle$
37.  $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = \langle (t^2 - 2)e^t, -te^t, 2t \rangle$     41.  $\langle \frac{16}{3}, 0 \rangle$     43.  $\langle 0, 0 \rangle$     45.  $\langle -2, 3\pi^2, \pi^2 \rangle$     47.  $(\ln 4)\mathbf{i} + \frac{56}{3}\mathbf{j} - \frac{496}{5}\mathbf{k}$
49.  $\mathbf{r}(t) = \langle -t^2 + t + c_1, 2t^2 + c_2 \rangle$ , με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{r}(t) = \langle -t^2 + t + 3, 2t^2 + 1 \rangle$
51.  $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{3}t^3)\mathbf{i} + (\frac{5t^2}{2})\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{c}$ , με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3})\mathbf{i} + (\frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2})\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$
53.  $\mathbf{r}(t) = (8t^2)\mathbf{k} + \mathbf{c}_1t + \mathbf{c}_2$ , με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + (8t^2)\mathbf{k}$
55.  $\mathbf{r}(t) = \langle 0, t^2, 0 \rangle + \mathbf{c}_1t + \mathbf{c}_2$ , με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{r}(t) = \langle 1, t^2 - 6t + 10, t - 3 \rangle$
57.  $\mathbf{r}(3) = \langle \frac{45}{4}, 5 \rangle$
59. Μόνο τη χρονική στιγμή  $t = 3$  μπορεί ο πιλότος να χτυπήσει έναν στόχο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.
61.  $\mathbf{r}(t) = (t - 1)\mathbf{v} + \mathbf{w}$     63.  $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{c}$     65.  $\psi \approx 75.96^\circ$
69. Υποθέτουμε ότι η  $\mathbf{R}(t) = \langle X(t), Y(t), Z(t) \rangle$  είναι μια αντιπαράγωγος της  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ . Τότε
- $$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \int_a^b \langle x(t), y(t), z(t) \rangle dt = \left\langle \int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right\rangle =$$
- $$\langle X(b) - X(a), Y(b) - Y(a), Z(b) - Z(a) \rangle = \langle X(b), Y(b), Z(b) \rangle - \langle X(a), Y(a), Z(a) \rangle = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

### Ενότητα 13.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $2\mathbf{r}' = \langle 50, -70, 20 \rangle$ ,  $-\mathbf{r}' = \langle -25, 35, -10 \rangle$     2. Η πρόταση (β) είναι σωστή.
3. (α)  $L'(2) = 4$   
 (β)  $L(t)$  είναι η διανυθείσα απόσταση κατά μήκος της διαδρομής, η οποία συνήθως είναι διαφορετική από την απόσταση από την αρχή.
4. 6

### Ενότητα 13.3 Ασκήσεις

1.  $L = 3\sqrt{61}$     3.  $L = 15 + \ln 4$     5.  $L = \frac{544\sqrt{34}-2}{135} \approx 23.48$     7.  $L = \pi\sqrt{4\pi^2 + 10} + 5 \ln \frac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 10}}{\sqrt{10}} \approx 29.3$
9. Μήκος τόξου  $\approx 44.87$     11.  $s(t) = \frac{1}{27} \left( (20 + 9t^2)^{3/2} - 20^{3/2} \right)$     13.  $v(4) = \sqrt{21}$     15.  $v(1) = \sqrt{2}$
17.  $v(\frac{\pi}{2}) = 5$     19.  $\mathbf{r}' = \langle 100\sqrt{5}, 200\sqrt{5} \rangle$
21. Η μέλισσα είναι στην αρχή. Η  $\int_0^T \|\mathbf{r}'(u)\| du$  παριστάνει τη συμβολική απόσταση που διανύει η μέλισσα στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ .
23. (γ)  $L_1 \approx 132.0$ ,  $L_2 \approx 125.7$ , το πρώτο ελατήριο χρησιμοποιεί περισσότερο σύρμα.
25. (α)  $t = \pi$     27. (α)  $s = \sqrt{29}t$     (β)  $t = g^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{29}}$     29.  $\left\langle 1 + \frac{3s}{\sqrt{50}}, 2 + \frac{4s}{\sqrt{50}}, 3 + \frac{5s}{\sqrt{50}} \right\rangle$
31.  $\mathbf{r}(s) = \langle 2 + 4 \cos(2s), 10, -3 + 4 \sin(2s) \rangle$

$$33. \mathbf{r}_1(s) = \left\langle \cos \left[ \left( \frac{3}{2}s + 1 \right)^{2/3} - 1 \right], \sin \left[ \left( \frac{3}{2}s + 1 \right)^{2/3} - 1 \right], \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{3}{2}s + 1 \right)^{2/3} - 1 \right]^{3/2} \right\rangle, s \geq 0$$

$$35. \mathbf{r}_1(s) = \left\langle \frac{1}{9}(27s + 8)^{2/3} - \frac{4}{9}, \pm \frac{1}{27} \left( (27s + 8)^{2/3} - 4 \right)^{3/2} \right\rangle \quad 37. \left\langle \frac{s}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{sm}{\sqrt{1+m^2}} \right\rangle$$

$$39. (\alpha) \sqrt{17}e^t \quad (\beta) \frac{s}{\sqrt{17}} \left\langle \cos \left( 4 \ln \frac{s}{\sqrt{17}} \right), \sin \left( 4 \ln \frac{s}{\sqrt{17}} \right) \right\rangle \quad 41. L = \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\pi$$

### Ενότητα 13.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $\left\langle -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$  2.  $\frac{1}{4}$  3. Η καμπυλότητα ενός κύκλου ακτίνας 2 4. Μηδενική καμπυλότητα  
5.  $\kappa = \sqrt{14}$  6. 4 7.  $\frac{1}{9}$

### Ενότητα 13.4 Ασκήσεις

$$1. \mathbf{r}'(t) = \langle 8t, 9 \rangle, \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{64t^2+81}} \langle 8t, 9 \rangle, \mathbf{T}(1) = \left\langle \frac{8}{\sqrt{145}}, \frac{9}{\sqrt{145}} \right\rangle$$

$$3. \mathbf{r}'(t) = \langle 4, -5, 9 \rangle, \mathbf{T}(t) = \left\langle \frac{4}{\sqrt{122}}, -\frac{5}{\sqrt{122}}, \frac{9}{\sqrt{122}} \right\rangle, \mathbf{T}(1) = \mathbf{T}(t)$$

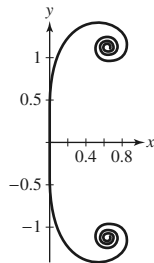
$$5. \mathbf{r}'(t) = \langle -\pi \sin \pi t, \pi \cos \pi t, 1 \rangle, \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} \langle -\pi \sin \pi t, \pi \cos \pi t, 1 \rangle, \mathbf{T}(1) = \left\langle 0, -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} \right\rangle$$

$$7. \kappa(t) = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}} \quad 9. \kappa(t) = 0 \quad 11. \kappa = \frac{2\sqrt{74}}{27} \quad 13. \kappa = \frac{\sqrt{\pi^2+5}}{(\pi^2+1)^{3/2}} \approx 0.108 \quad 15. \kappa(3) = \frac{e^3}{(e^6+1)^{3/2}} \approx 0.0025$$

$$17. \kappa(2) = \frac{48\sqrt{41}}{210,125} \approx 0.0015 \quad 19. \kappa\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{330}}{4} \approx 4.54, \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{5} = 0.2 \quad 23. \alpha = \pm\sqrt{2}$$

$$29. \kappa(2) = \frac{3\sqrt{10}}{800} \approx 0.012 \quad 31. \kappa(\pi) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1.11$$

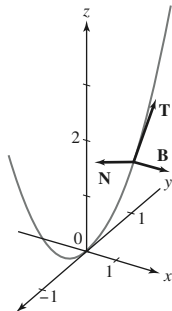
$$35. \kappa(t) = t^2$$



$$37. \mathbf{N}(t) = \langle 0, -\sin 2t, -\cos 2t \rangle$$

$$39. \mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right\rangle, \mathbf{N}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

$$41. \mathbf{T}(1) = \left\langle 0, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right\rangle, \mathbf{N}(1) = \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle, \mathbf{B}(1) = \langle 1, 0, 0 \rangle$$





$$43. \mathbf{T}(1) = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle, \mathbf{N}(1) = \left\langle -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle, \mathbf{B}(1) = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$$

$$45. \mathbf{N}(\pi^{1/3}) = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \quad 47. \mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{13}} \langle -3, 2 \rangle \quad 49. \mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0, 1, -1 \rangle$$

$$51. \mathbf{N}(0) = \frac{1}{6} \langle -\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, -\sqrt{6} \rangle$$

$$53. (\alpha) \mathbf{T}(1) = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle, \mathbf{N}(1) = \left\langle -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle, \mathbf{B}(1) = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \quad (\beta) 6x - 6y + 3z = 1$$

$$55. (\alpha) \mathbf{T}(t) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2+4t^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{2+4t^2}} \right\rangle, \mathbf{N}(t) = \left\langle \frac{-t\sqrt{2}}{\sqrt{2+4t^2}}, \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{2+4t^2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+4t^2}} \right\rangle$$

$$(\beta) \mathbf{B}(t) = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle$$

(γ) Τα επίπεδα είναι όλα παράλληλα μεταξύ τους, με εξίσωση  $x + y = c$  για κάποιο  $c$ .

$$59. (x+4)^2 + (y-\frac{7}{2})^2 = \frac{125}{4} \quad 61. (x-\frac{\pi}{2})^2 + y^2 = 1 \quad 63. (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8 \quad 65. x^2 + y^2 = 1$$

$$67. (x-1)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4} \quad 75. \kappa(\theta) = 1 \quad 77. \kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\theta}$$

85. Είτε  $-\mathbf{k}$  είτε  $\mathbf{k}$ . Αφού  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\|$ , προκύπτει ότι το  $\mathbf{T}(t)$  είναι της μορφής  $\mathbf{T}(t) = \langle f(t), g(t), 0 \rangle$  για κάποιες συναρτήσεις  $f(t)$  και  $g(t)$ . Ομοίως, εφόσον  $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)/\|\mathbf{T}'(t)\|$ , προκύπτει ότι το  $\mathbf{N}(t)$  είναι της μορφής  $\mathbf{N}(t) = \langle p(t), q(t), 0 \rangle$  για κάποιες συναρτήσεις  $p(t)$  και  $q(t)$ . Τώρα  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$  και παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο βρίσκουμε ότι το  $\mathbf{B}(t)$  είναι της μορφής  $\mathbf{B}(t) = \langle 0, 0, w(t) \rangle$  για κάποια συνάρτηση  $w(t)$ . Αφού το  $\mathbf{B}(t)$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα, πρέπει να έχουμε  $w(t) = \pm 1$  και επομένως είτε  $\mathbf{B}(t) = -\mathbf{k}$  είτε  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{k}$ .

$$93. (\alpha) \mathbf{N}(0) = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle \quad (\beta) \mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{66}} \langle 4, 7, -1 \rangle$$

### Ενότητα 13.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

- Όχι, αφού το σωματίδιο μπορεί να αλλάξει την κατεύθυνσή του.
- $\mathbf{a}(t)$
- Και οι τρεις προτάσεις είναι λάθος.
- Αν η ταχύτητα είναι σταθερή, η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι μηδέν. Η επιτάχυνση αποτελείται μόνο από την κάθετη συνιστώσα, η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητα.
- Περιγραφή (β), παράλληλα
- $\|\mathbf{a}(t)\| = 8 \text{ cm/s}^2$
- $a_N$

### Ενότητα 13.5 Ασκήσεις

$$1. h = -0.2: \langle -0.085, 1.91, 2.635 \rangle \quad 3. \mathbf{v}(1) = \langle 3, -1, 8 \rangle, \mathbf{a}(1) = \langle 6, 0, 8 \rangle, v(1) = \sqrt{74}$$

$$h = -0.1: \langle -0.19, 2.07, 2.97 \rangle$$

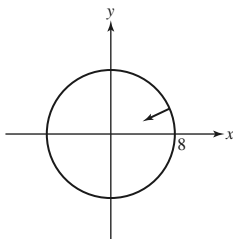
$$h = 0.1: \langle -0.41, 2.37, 4.08 \rangle$$

$$h = 0.2: \langle -0.525, 2.505, 5.075 \rangle$$

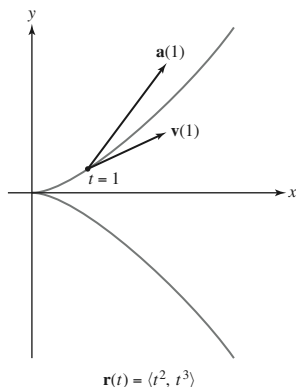
$$\mathbf{v}(1) \approx \langle -0.3, 2.2, 3.5 \rangle, v(1) \approx 4.1$$

$$5. \mathbf{v}(\frac{\pi}{3}) = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right\rangle, \mathbf{a}(\frac{\pi}{3}) = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 9 \right\rangle, v(\frac{\pi}{3}) = 1$$

$$7. \mathbf{a}(t) = -2 \langle \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \rangle, \mathbf{a}(\frac{\pi}{4}) \approx \langle -1.85, -0.77 \rangle, \mathbf{r}(t) = 8 \langle \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \rangle$$



9.



$$11. \mathbf{v}(t) = \left\langle \frac{3t^2+2}{6}, 4t-2 \right\rangle \quad 13. \mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{k} \quad 15. \mathbf{v}(t) = \left\langle \frac{t^2}{2} + 3, 4t-2 \right\rangle, \quad \mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{t^3}{6} + 3t, 2t^2 - 2t \right\rangle$$

$$17. \mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{t^3}{6}\mathbf{k} \quad 19. v_0 = \sqrt{5292} \approx 72.746 \text{ m/s} \quad 21. \text{ Περίπου } 663.1 \text{ m}$$

$$25. (\alpha) \text{ Υποθέστε ότι } \mathbf{r}(0) = \langle 150, 75, 5 \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \langle 0, 0, -32 \rangle; \quad \mathbf{v}(t) = \langle 40, 35, -32t + 32 \rangle$$

$$\mathbf{r}(t) = \langle 40t + 150, 35t + 75, -16t^2 + 32t + 5 \rangle$$

(β)  $z = 5$  όταν  $t = 0$  ή  $2$ . Στο  $t = 2$ ,  $\mathbf{r}(2) = \langle 230, 145, 5 \rangle$ , οπότε ο παίκτης είναι εντός ορίων, αφού το  $(300, 150, z)$  είναι το μέγιστο δυνατό σημείο για να είναι εντός ορίων.

$$27. \mathbf{r}(10) = \langle 45, -20 \rangle \quad 29. (\alpha) \text{ Στην αρχική του θέση} \quad (\beta) \text{ Όχι}$$

$$31. \text{ Η ταχύτητα μειώνεται.} \quad 33. a_T = 0, \quad a_N = 1 \quad 35. a_T = \frac{7}{\sqrt{6}}, \quad a_N = \sqrt{\frac{53}{6}}$$

$$37. \mathbf{a}(-1) = -\frac{2}{\sqrt{10}}\mathbf{T} + \frac{6}{\sqrt{10}}\mathbf{N} \text{ με } \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{10}} \langle 1, -3 \rangle \text{ και } \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{10}} \langle -3, -1 \rangle$$

$$39. a_T(4) = 4, \quad a_N(4) = 1, \text{ οπότε } \mathbf{a} = 4\mathbf{T} + \mathbf{N}, \text{ με } \mathbf{T} = \left\langle \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9} \right\rangle \text{ και } \mathbf{N} = \left\langle -\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$$

$$41. \mathbf{a}(0) = \sqrt{3}\mathbf{T} + \sqrt{2}\mathbf{N}, \text{ με } \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1, 1, 1 \rangle \text{ και } \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 0, 1 \rangle$$

$$43. \mathbf{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\mathbf{T} + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\mathbf{N}, \text{ με } \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1, -1, 1 \rangle \text{ και } \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle 1, -1, -2 \rangle$$

$$45. a_T = 0, \quad a_N = 0.25 \text{ cm/s}^2$$

$$47. \text{ Η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι } \frac{50}{\sqrt{2}} \approx 35.36 \text{ m/min}^2, \quad v \approx \sqrt{35.36(30)} \approx 32.57 \text{ m/min.}$$

$$49. \|\mathbf{a}\| = 1.157 \times 10^5 \text{ km/h}^2 \quad 51. \mathbf{a} = \left\langle -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{9}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\rangle$$

53. (Α) Επιβραδύνεται (Β) Επιταχύνεται (Γ) Επιβραδύνεται

$$59. \text{ Μετά } 139.91 \text{ s το αυτοκίνητο θα αρχίσει να ολισθαίνει.} \quad 61. R \approx 105 \text{ m}$$

### Ενότητα 13.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{J}\|$  3. Η περίοδος αυξάνεται οκτώ φορές.

### Ενότητα 13.6 Ασκήσεις

1. Τα δεδομένα υποστηρίζουν την πρόβλεψη του Κέπλερ,  $T \approx \sqrt{a^3 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \approx 11.9$  έτη

3.  $M \approx 1.897 \times 10^{27}$  kg 5.  $M \approx 2.6225 \times 10^{41}$  kg

11. Η τροχιά του δορυφόρου βρίσκεται στο επίπεδο  $20x - 29y + 9z = 0$ .

### Κεφάλαιο 13 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. (α)  $-1 < t < 0$  ή  $0 < t \leq 1$  (β)  $0 < t \leq 2$  3.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t, \sqrt[3]{3-t^4} \rangle, -\infty < t < \infty$

5.  $\mathbf{r}'(t) = \langle -1, -2t^{-3}, \frac{1}{t} \rangle$  7.  $\mathbf{r}'(0) = \langle 2, 0, 6 \rangle$  9.  $\frac{d}{dt} e^t \langle 1, t, t^2 \rangle = e^t \langle 1, 1+t, 2t+t^2 \rangle$

11.  $\frac{d}{dt} (6\mathbf{r}_1(t) - 4\mathbf{r}_2(t))|_{t=3} = \langle 0, -8, -10 \rangle$  13.  $\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t))|_{t=3} = 2$

15.  $\int_0^3 \langle 4t+3, t^2, -4t^3 \rangle dt = \langle 27, 9, -81 \rangle$  17.  $(3, 3, \frac{16}{3})$  19.  $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^2 - \frac{8}{3}t^3 + t, t^4 - \frac{1}{6}t^3 + 1 \rangle$

21.  $L = 2\sqrt{13}$  23.  $\langle 5 \cos \frac{2\pi s}{5\sqrt{1+4\pi^2}}, 5 \sin \frac{2\pi s}{5\sqrt{1+4\pi^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+4\pi^2}} \rangle$  25.  $v_0 \approx 67.279$  m/s 27.  $(0, \frac{11}{2}, 38)$

29.  $\mathbf{T}(\pi) = \langle \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \rangle$  31.  $\kappa(1) = \frac{1}{2^{3/2}}$

33.  $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{T} + 4\mathbf{N}$ , όπου  $\mathbf{T} = \langle -1, 0 \rangle$  και  $\mathbf{N} = \langle 0, -1 \rangle$

35.  $\kappa = \frac{13}{16}$  37.  $(x - \frac{25}{2})^2 + (y + 32)^2 = \frac{4913}{4}$  39.  $2x - 4y + 2z = -3$

## Κεφάλαιο 14

### Ενότητα 14.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ίδιο σχήμα αλλά βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα.

2. Η παραβολή  $z = x^2$  στο επίπεδο  $xz$ .

3. Δεν είναι δυνατόν.

4. Οι κατακόρυφες ευθείες  $x = c$  με απόσταση 1 μονάδα μεταξύ διαδοχικών ευθειών.

5. Στον ισοσταθμικό χάρτη της  $g(x, y) = 2x$  η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κατακόρυφων ευθειών είναι  $\frac{1}{2}$ .

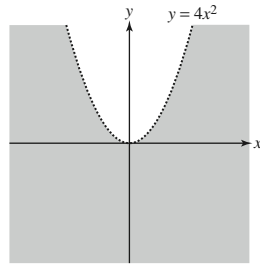
### Ενότητα 14.1 Ασκήσεις

1.  $f(1, 2) = 3, f(-1, 6) = -7, f(e, \pi) = e + \pi e^3$  3.  $h(20, 2) = \frac{2}{9}$ , τα  $h(1, -2)$  και  $h(1, 1)$  δεν ορίζονται.

5.  $h(3, 7, -2) = \frac{21}{4}, h(3, 2, 1/4) = 96$ , το  $h(4, -4, 0)$  δεν ορίζεται.

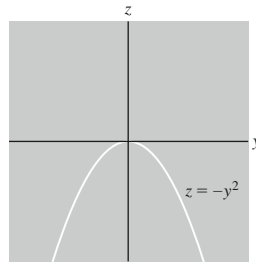
7. Το πεδίο ορισμού είναι όλο το επίπεδο  $xy$ .

9.



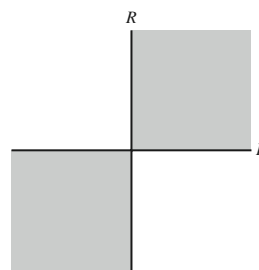
11.  $\mathcal{D} = \{(y, z) : z \neq -y^2\}$

$$\mathcal{D} = \{(y, z) : z \neq -y^2\}$$



$$z + y^2 \neq 0$$

13.

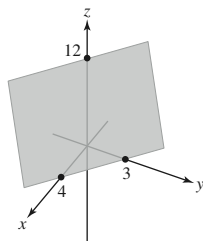


$$I R \geq 0$$

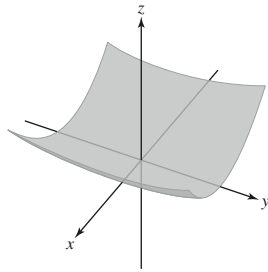
15. Πεδίο ορισμού: όλος ο χώρος  $(x, y, z)$ , σύνολο τιμών: όλη η πραγματική ευθεία.17. Πεδίο ορισμού:  $\{(r, s, t) : |rst| \leq 4\}$ , σύνολο τιμών:  $\{P : 0 \leq P \leq 4\}$ 19.  $f \leftrightarrow (B), g \leftrightarrow (A)$ 

21. (α) Δ (β) Γ (γ) Ε (δ) Β (ε) Α (στ) ΣΤ

23.

Οριζόντιο ίχνος:  $3x + 4y = 12 - c$  στο επίπεδο  $z = c$ .Κατακόρυφο ίχνος:  $z = (12 - 3a) - 4y$  και  $z = -3x + (12 - 4b)$  στα επίπεδα  $x = a$  και  $y = b$  αντίστοιχα.

25.

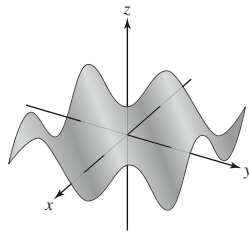


Τα οριζόντια ίχνη είναι ελλείψεις για  $c > 0$ .

Το κατακόρυφο ίχνος στο επίπεδο  $x = a$  είναι η παραβολή  $z = a^2 + 4y^2$ .

Το κατακόρυφο ίχνος στο επίπεδο  $y = b$  είναι η παραβολή  $z = x^2 + 4b^2$ .

27.

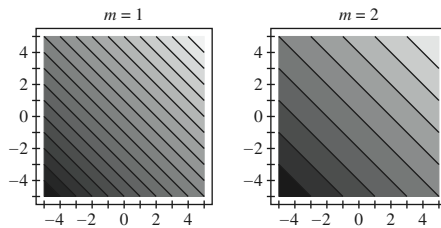


Τα οριζόντια ίχνη στο επίπεδο  $z = c$ ,  $|c| \leq 1$  είναι οι ευθείες  $x - y = \sin^{-1} c + 2k\pi$  και  $x - y = \pi - \sin^{-1} c + 2k\pi$ , για ακέραιο  $k$ .

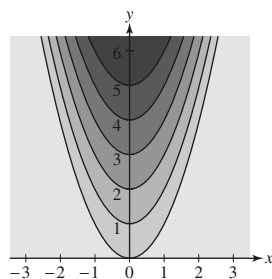
Το κατακόρυφο ίχνος στο επίπεδο  $x = a$  είναι  $z = \sin(a - y)$ .

Το κατακόρυφο ίχνος στο επίπεδο  $y = b$  είναι  $z = \sin(x - b)$ .

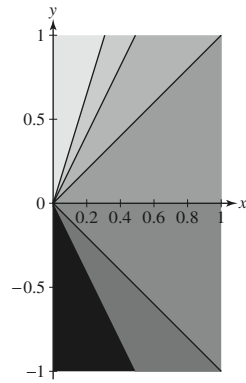
29.  $m = 1 : m = 2$ :



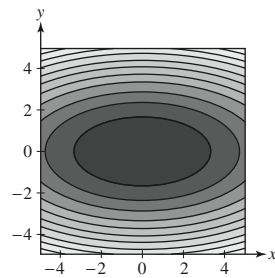
31.



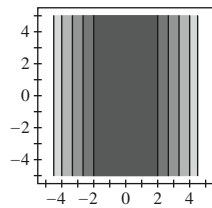
33.



35.



37.



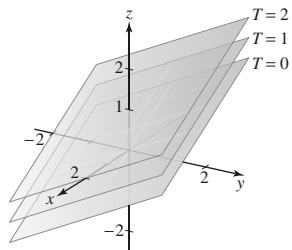
39.  $m = 6 : f(x, y) = 2x + 6y + 6$

$m = 3 : f(x, y) = x + 3y + 3$

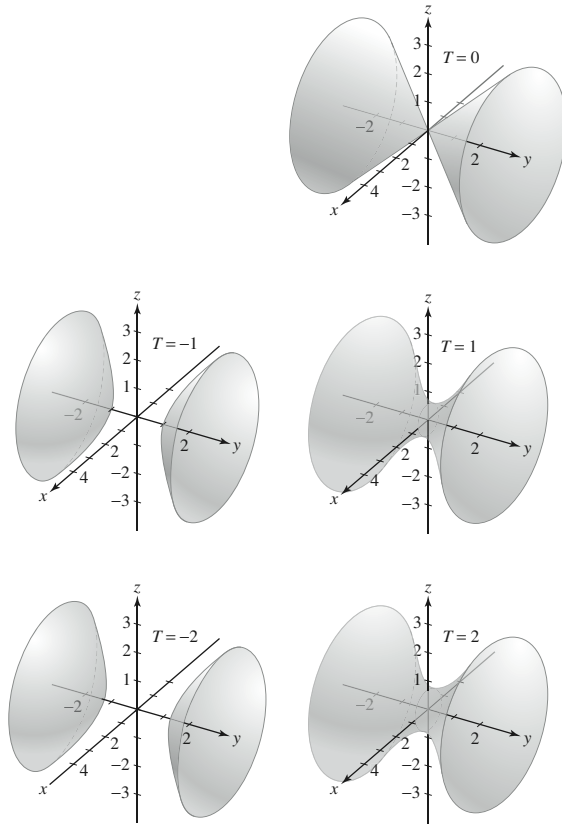
41. (α) Α και Β (β) Β

43. Κολοράντο, Βόρεια Ντακότα, Άρκανσας, Ουισκόνσιν

45.



47.

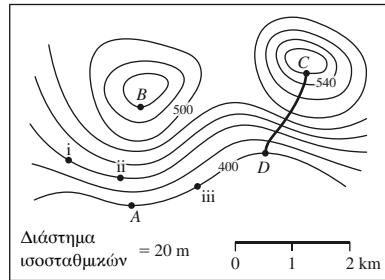


49. Μέση τιμή ROC από το  $B$  στο  $C = 0.000625 \text{ kg/m}^3 \cdot \text{ppt}$

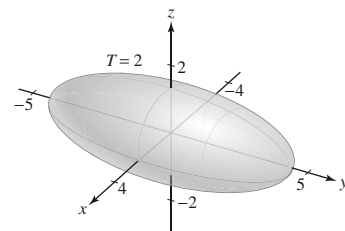
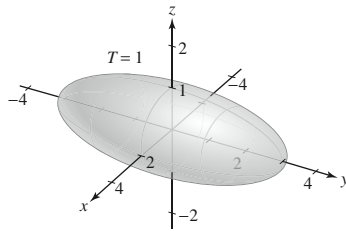
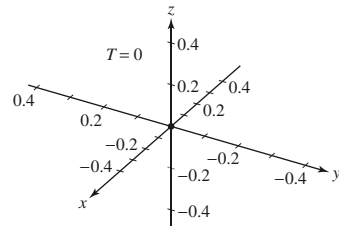
51. Στο σημείο  $A$

53. Μέση τιμή ROC από το  $A$  στο  $B \approx 0.0737$ , μέση τιμή ROC από το  $A$  στο  $C \approx 0.0457$

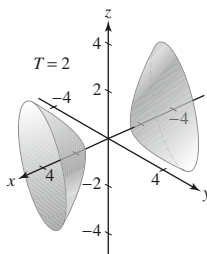
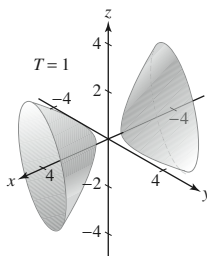
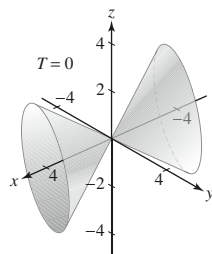
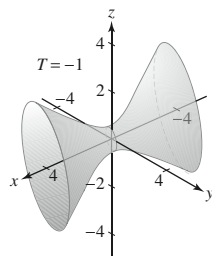
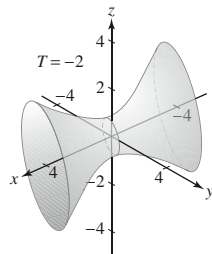
55.



57.



59.





61.  $f(r, \theta) = \cos \theta$ , οι επίπεδες καμπύλες είναι  
 $\theta = \pm \cos^{-1}(c)$  για  $|c| < 1$ ,  $c \neq 0$ ,  
 ο άξονας των  $y$  για  $c = 0$ ,  
 ο θετικός άξονας των  $x$  για  $c = 1$ ,  
 ο αρνητικός άξονας των  $x$  για  $c = -1$ .

## Ενότητα 14.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ο  $D^*(P, r)$  αποτελείται από όλα τα σημεία στο  $D(P, r)$  εκτός από το ίδιο το  $P$ .  
 2.  $f(2, 3) = 27$  3. Και οι τρεις προτάσεις είναι σωστές.  
 4. Το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  δεν υπάρχει.

## Ενότητα 14.2 Ασκήσεις

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + y) = 3$  3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (x^2y - 3x^4y^3) = -44$  5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{4}, 0)} \tan x \cos y = 1$   
 7.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{e^{x^2} - e^{-y^2}}{x+y} = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$  9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,5)} (g(x, y) - 2f(x, y)) = 1$  11.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,5)} e^{f(x,y)^2 - g(x,y)} = e^2$   
 13. Όχι, το όριο κατά μήκος του άξονα των  $x$  και το όριο κατά μήκος του άξονα των  $y$  είναι διαφορετικά.  
 15. Το όριο είναι  $\frac{1+m^3}{m^2}$  για κάθε  $m \neq 0$ .  
 17. Το όριο κατά μήκος του άξονα των  $x$  είναι  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ , το οποίο δεν υπάρχει.  
 19.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$   
 21. Το όριο δεν υπάρχει επειδή οι τιμές της συνάρτησης καθώς το  $(x, y)$  τείνει στο  $(0, 0)$  κατά μήκος της ευθείας  $y = mx$  εξαρτώνται από την τιμή του  $m$ .  

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0) y=mx} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{3x^2 + 2m^2x^2} = \frac{m}{2m^2 + 3}$$
  
 23. Κατά μήκος του άξονα συντεταγμένων  $x$  ( $y = z = 0$ )  

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{1}{x} = \infty$$
  
 25.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} (x^2 - 16) \cos \left( \frac{1}{(x-4)^2 + y^2} \right) = 0$  27.  $\lim_{(z,w) \rightarrow (-2,1)} \frac{z^4 \cos(\pi w)}{e^{z+w}} = -16e$   
 29.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2-4}} = 0$  31.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{5}$  33. Δεν υπάρχει. 35.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} e^{x-y} \ln(x-y) = e^4 \ln(4)$   
 37.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-3,-2)} (x^2y^3 + 4xy) = -48$  39.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \tan(x^2 + y^2) \tan^{-1} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0$   
 41.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2$   
 45. Ο ισοσταθμικός χάρτης δείχνει ότι ένα πλήθος από όρια παρατηρούνται καθώς προσεγγίζουμε το  $P$  από διαφορετικές ευθείες. Επομένως, το όριο δεν υπάρχει.  $\lim_{(x,y) \rightarrow Q} g(x, y) = 4$   
 47. Ναι

### Ενότητα 14.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = 2xy^2$

2. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κανόνας σταθερού πολλαπλασίου. Στο δεύτερο μέρος, αφού το  $y$  εμφανίζεται και στον αριθμητή και στον παρονομαστή, προτιμάμε τον κανόνα του πηλίκου.

3. (α), (γ) 4.  $f_x = 0$  5. (α), (δ)

### Ενότητα 14.3 Ασκήσεις

3.  $f_x = (2x)(x - y^2) + (x^2 - y)(1) = 3x^2 - 2xy^2 - y$

$f_y = (-1)(x - y^2) + (x^2 - y)(-2y) = 3y^2 - 2x^2y - x$

5.  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x+y} = \frac{x}{(x+y)^2}$  7.  $f_z(2, 3, 1) = 6$  9.  $m = 10$  11.  $f_x(A) \approx 10, f_y(A) \approx -20$  13. ΒΔ

15.  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x, \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y$  17.  $\frac{\partial}{\partial x}(x^4y + xy^{-2}) = 4x^3y + y^{-2}, \frac{\partial}{\partial y}(x^4y + xy^{-2}) = x^4 - 2xy^{-3}$

19.  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{-x}{y^2}$  21.  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right) = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

23.  $\frac{\partial z}{\partial x} = (\cos x)(\cos y), \frac{\partial z}{\partial y} = -(\sin x)(\sin y)$  25.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \sin \left( \frac{1-x}{y} \right), \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-x}{y^2} \sin \left( \frac{1-x}{y} \right)$

27.  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2 - y^2}$  29.  $\frac{\partial}{\partial r} e^{r+s} = e^{r+s}, \frac{\partial}{\partial s} e^{r+s} = e^{r+s}$  31.  $\frac{\partial}{\partial x} e^{xy} = ye^{xy}, \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = xe^{xy}$

33.  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2xe^{-x^2 - y^2}, \frac{\partial z}{\partial x} = -2ye^{-x^2 - y^2}$  35.  $\frac{\partial U}{\partial t} = -e^{-rt}, \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{-e^{-rt}(rt+1)}{r^2}$

37.  $\frac{\partial}{\partial x} \sinh(x^2y) = 2xy \cosh(x^2y), \frac{\partial}{\partial y} \sinh(x^2y) = x^2 \cosh(x^2y)$  39.  $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2z^3, \frac{\partial w}{\partial y} = 2xz^3y, \frac{\partial w}{\partial z} = 3xy^2z^2$

41.  $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{M - Lt}{M^2} e^{-Lt/M}, \frac{\partial Q}{\partial M} = \frac{L(Lt - M)}{M^3} e^{-Lt/M}, \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{L^2}{M^2} e^{-Lt/M}$  43.  $f_x(1, 2) = -164$

45.  $g_u(1, 2) = \ln 3 + \frac{1}{3}$  47. 49. (α)  $I(95, 50) \approx 73.1913$  (β)  $\frac{\partial I}{\partial T}, 1.66$  51. (α), (β)

53.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -72xy^2$  55.  $h_{vv} = \frac{32u}{(u + 4v)^3}$  57.  $f_{yy}(2, 3) = -\frac{4}{9}$  59.  $f_{xyxyz} = 0$

61.  $f_{uvv} = 2v \sin(u + v^2)$  63.  $F_{rst} = 0$  65.  $F_{uu\theta} = \cosh(uv + \theta^2) \cdot 2\theta v^2$

67.  $g_{xyz} = \frac{3xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$  69.  $f(x, y) = x^2y$  73.  $B = A^2$

### Ενότητα 14.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$  2. Είναι οριζόντια.

3. (β) 4.  $f(2, 3.1) \approx 8.7$  5.  $\Delta f \approx -0.1$

6. Χρησιμοποιώντας το  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  θα χρησιμοποιούσαμε ένα κάθετο διάνυσμα που είναι το αντίθετο του κάθετου διανύσματος που παίρνουμε από το  $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ . Οι εξισώσεις που προκύπτουν παριστάνουν το ίδιο επίπεδο.

### Ενότητα 14.4 Ασκήσεις

1.  $z = -34 - 20x + 16y$  3.  $z = 16x - 8y + 24$  5.  $z = 8x - 2y - 13$  7.  $z = 4r - 5s + 2$

9.  $z = \left( \frac{4}{5} + \frac{12}{25} \ln 2 \right) - \frac{12}{25}x + \frac{12}{25}y$  11.  $\left( -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right)$  13.  $(0, 0)$

15. (α)  $f(x, y) = -16 + 4x + 12y$  (β)  $f(2.01, 1.02) \approx 4.28, f(1.97, 1.01) \approx 4$  17.  $\Delta f \approx 3.56$

19.  $f(0.01, -0.02) \approx 0.98$  21.  $L(x, y, z) = \frac{5}{12}\sqrt{3}x + \frac{5}{12}\sqrt{3}y + 2\sqrt{3}z - 5\sqrt{3}$  23. 5.07 25. 8.44  
 27. 4.998 29. 3.945 31.  $f(-2.1, 3.1) \approx 4.2$  33.  $\Delta I \approx 0.5644$  35. (β)  $\Delta H \approx 0.022$  m  
 37. (β) 6 (γ) 1% σφάλμα στο  $r$  39. (α) \$7.10 (β) \$28.85, \$57.69 (γ) -\$74.24  
 41. Το μέγιστο σφάλμα του  $V$  είναι περίπου 8.948 m.

### Ενότητα 14.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (β)  $\langle 3, 4 \rangle$  2. Λάθος  
 3. Το  $\nabla f$  κατευθύνεται προς τον μέγιστο ρυθμό αύξησης της  $f$  και είναι κάθετη στην ισοδυναμική καμπύλη της  $f$ .  
 4. (β) ΒΔ και (γ) ΝΑ 5.  $3\sqrt{2}$

### Ενότητα 14.5 Ασκήσεις

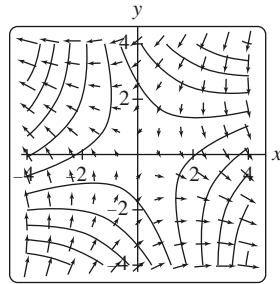
1. (α)  $\nabla f = \langle y^2, 2xy \rangle, \mathbf{r}'(t) = \langle t, 3t^2 \rangle$   
 (β)  $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))|_{t=1} = 4, \frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))|_{t=-1} = -4$   
 3. Α: μηδέν, Β: αρνητικό, Γ: θετικό, Δ: μηδέν 5.  $\nabla f = -\sin(x^2 + y) \langle 2x, 1 \rangle$  7.  $\nabla h = \langle yz^{-3}, xz^{-3}, -3xyz^{-4} \rangle$   
 9.  $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))|_{t=0} = -7$  11.  $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))|_{t=0} = -3$  13.  $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))|_{t=0} = 5 \cos 1 \approx 2.702$   
 15.  $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))|_{t=4} = -56$  17.  $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))|_{t=\pi/4} = -1 + \frac{8}{\pi} \approx 1.546$  19.  $\frac{d}{dt}(g(\mathbf{r}(t)))|_{t=1} = 0$   
 21.  $D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = \frac{44}{5}$  23.  $D_{\mathbf{u}}f(\frac{1}{6}, 3) = \frac{39}{4\sqrt{2}}$  25.  $D_{\mathbf{u}}f(3, 4) = \frac{7\sqrt{2}}{290}$  27.  $D_{\mathbf{u}}f(1, 0) = \frac{6}{\sqrt{13}}$   
 29.  $D_{\mathbf{u}}f(1, 2, 0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  31.  $D_{\mathbf{u}}f(3, 2) = \frac{-50}{\sqrt{13}}$  33. Κατεύθυνση:  $\langle 1, -2 \rangle$ , ρυθμός:  $\sqrt{5}$   
 35. Κατεύθυνση:  $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9} \rangle$ , ρυθμός:  $\frac{\sqrt{19}}{9}$  37. Η  $f$  αυξάνεται στο  $P$  στην κατεύθυνση του  $v$ . 39.  $D_{\mathbf{u}}f(P) = \frac{\sqrt{6}}{2}$   
 41.  $\langle 6, 2, -4 \rangle$  43.  $(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{9}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}})$  και  $(-\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{9}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}})$   
 45. Από την Εξ. 5 έχουμε

$$\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle = C \left\langle -\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle$$

για σταθερό  $C$ . Σημειώστε ότι το  $\sin L$  είναι αρνητικό αφού  $L < 0$  στο Νότιο Ημισφαίριο. Εφόσον τα  $m, \omega$  και  $V$  είναι όλα θετικά, προκύπτει ότι  $C < 0$ . Το διάνυσμα  $\left\langle -\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle$  είναι το  $\nabla p$  στραμμένο αριστερόστροφα κατά  $90^\circ$  και το  $C \left\langle -\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle$  κατευθύνεται αντίθετα από αυτό, δηλαδή είναι στην κατεύθυνση του  $\nabla p$  στραμμένου δεξιόστροφα κατά  $90^\circ$ . Οπότε, το διάνυσμα της ταχύτητας (δηλαδή το διάνυσμα του ανέμου) είναι ανάλογο κατά μέτρο με τη βαθμίδα της πίεσης και κατευθύνεται προς την κατεύθυνση  $90^\circ$  δεξιόστροφα από αυτό. Επομένως, ο άνεμος φυσάει με χαμηλότερη πίεση στα δεξιά και όσο πιο κοντά είναι οι ισοβαρείς, τόσο ισχυρότεροι είναι οι άνεμοι. Ειδικότερα, οι άνεμοι πνέουν δεξιόστροφα γύρω από συστήματα χαμηλής πίεσης και αριστερόστροφα γύρω από συστήματα υψηλής πίεσης.

47.  $9x + 10y + 5z = 33$  49.  $0.5217x + 0.7826y - 1.2375z = -5.309$

51.



53.  $f(x, y, z) = x^2 + y + 2z$  55.  $f(x, y, z) = xz + y^2$  59.  $\Delta f \approx 0.08$

61. (α)  $(34, 18, 0)$  (β)  $\left\langle 2 + \frac{32}{\sqrt{21}}t, 2 + \frac{16}{\sqrt{21}}t, 8 - \frac{8}{\sqrt{21}}t \right\rangle, \approx 4.58 \text{ s}$

65.  $x = 1 - 4t, y = 2 + 26t, z = 1 - 25t$  77.  $y = \sqrt{1 - \ln(\cos^2 x)}$

### Ενότητα 14.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α)  $\frac{\partial f}{\partial x}$  και  $\frac{\partial f}{\partial y}$  (β)  $u$  και  $v$

2. (α) 3.  $f(u, v)|_{(r,s)=(1,1)} = e^2$  4. (β) 5. (γ) 6. Όχι

### Ενότητα 14.6 Ασκήσεις

1. (α)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2, \frac{\partial f}{\partial z} = 4z^3$  (β)  $\frac{\partial x}{\partial s} = 2s, \frac{\partial y}{\partial s} = t^2, \frac{\partial z}{\partial s} = 2st$  (γ)  $\frac{\partial f}{\partial s} = 7s^6t^6 + 8s^7t^4$

3.  $\frac{\partial f}{\partial s} = 6rs^2, \frac{\partial f}{\partial r} = 2s^3 + 4r^3$  5.  $\frac{\partial g}{\partial x} = (y+1)\sec^2(xy+x+y), \frac{\partial g}{\partial y} = (x+1)\sec^2(xy+x+y)$

7.  $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^{x^2+xy}$  9.  $\frac{\partial h}{\partial t_2} = 0$  11.  $\frac{\partial f}{\partial u}|_{(u,v)=(-1,-1)} = 1, \frac{\partial f}{\partial v}|_{(u,v)=(-1,-1)} = -2$

13.  $\frac{\partial g}{\partial \theta}|_{(r,\theta)=(2\sqrt{2}, \pi/4)} = -\frac{1}{6}$  15.  $\frac{\partial g}{\partial u}|_{(u,v)=(0,1)} = 2 \cos 2$

17. (α)  $g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x)$

(β)  $g'(x) = 3x^2 - y^2 - 2xy(-1) = 3x^2 - (1-x)^2 + 2x(1-x) = 4x - 1$

(γ)  $g(x) = x^3 - x(1-x)^2 = 2x^2 - x$ , οπότε  $g'(x) = 4x - 1$ .

19.  $-26.8 \text{ ft/s}$  21.  $4\pi^3 - 3\pi^2 - 1$

27. (α)  $F_x = z^2 + y, F_y = 2yz + x, F_z = 2xz + y^2$  (β)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^2 + y}{2xz + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yz + x}{2xz + y^2}$

29.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy + z^2}{2xz + y^2}$  31.  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^{xy} + 1}{x \cos(xz)}$

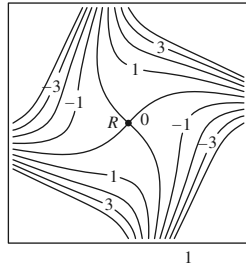
33.  $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-y(w^2 + x^2)^2}{w((w^2 + y^2)^2 + (w^2 + x^2)^2)}$ , στο  $(1, 1, 1), \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2}$  37.  $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} \mathbf{r}$

39. (γ)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-6}{z+4}$  41.  $\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{F_T}{F_P} = -\frac{-nR}{V-nb} = \frac{nR}{V-nb}, \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{F_P}{F_V} = \frac{nb-V}{P-\frac{an^2}{V^2} + \frac{2an^3b}{V^3}}$

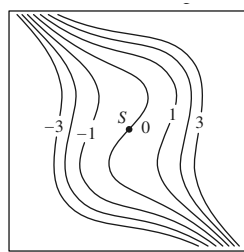
### Ενότητα 14.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Η  $f$  έχει τοπικό (και ολικό) ελάχιστο στο  $(0, 0)$ , η  $g$  έχει σαγματικό σημείο στο  $(0, 0)$ .

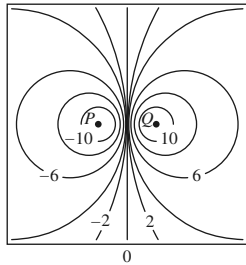
2.



Το σημείο  $R$  είναι σαγματικό σημείο.



Το σημείο  $S$  δεν είναι ούτε τοπικό ακρότατο ούτε σαγματικό σημείο.



Το σημείο  $P$  είναι τοπικό ελάχιστο και το  $Q$  είναι τοπικό μέγιστο.

3. Η πρόταση (α)

### Ενότητα 14.7 Ασκήσεις

1. (β) Το  $P_1 = (0, 0)$  είναι σαγματικό σημείο, τα  $P_2 = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$  και  $P_3 = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  είναι τοπικά ελάχιστα, η ολικά ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι  $-4$ .

3.  $(0, 0)$  σαγματικό σημείο,  $(\frac{13}{64}, -\frac{13}{32})$  και  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  τοπικά ελάχιστα.

5. (γ)  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, -1)$  σαγματικά σημεία,  $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  τοπικό ελάχιστο.

7.  $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  τοπικό ελάχιστο.

9.  $(-2, -1)$  τοπικό μέγιστο,  $(\frac{5}{3}, \frac{5}{6})$  σαγματικό σημείο.

11.  $(0, \pm\sqrt{2})$  σαγματικά σημεία,  $(\frac{2}{3}, 0)$  τοπικό μέγιστο,  $(-\frac{2}{3}, 0)$  τοπικό ελάχιστο.

13.  $(0, 0)$  σαγματικό σημείο,  $(1, 1)$  και  $(-1, -1)$  τοπικά ελάχιστα.

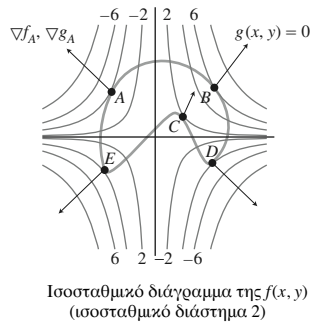
15.  $(0, 0)$  σαγματικό σημείο,  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  και  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  τοπικό μέγιστο,  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  και  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  τοπικό ελάχιστο.
17. Τα κρίσιμα σημεία είναι  $(j\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$ , για  
 $j, k$  άρτιο: σαγματικά σημεία  
 $j, k$  περιττό: τοπικά μέγιστα  
 $j$  άρτιο,  $k$  περιττό: τοπικά ελάχιστα  
 $j$  περιττό,  $k$  άρτιο: σαγματικά σημεία
19.  $(1, \frac{1}{2})$  τοπικό μέγιστο
21.  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$  σαγματικό σημείο
23.  $(-\frac{1}{6}, -\frac{17}{18})$  τοπικό ελάχιστο
27.  $x = y = 0.27788$  τοπικό ελάχιστο
29. Ολικό μέγιστο 2, ολικό ελάχιστο 0
31. Ολικό μέγιστο 1, ολικό ελάχιστο  $\frac{1}{35}$
33. Μέγιστο = 28 στο  $(0, -4)$ , ελάχιστο =  $-8$  στο  $(0, 2)$
35. Μέγιστο = 72 στο  $(-3, 0)$ , ελάχιστο =  $-8$  σε όλα τα σημεία του τμήματος από  $(0, -4)$  ως  $(1, 0)$
39. Μέγιστη τιμή  $\frac{1}{3}$  41. Ολικό ελάχιστο  $f(0, 1) = -2$ , ολικό μέγιστο  $f(1, 0) = 1$
43. Ολικό ελάχιστο,  $f(0, 0) = 0$ , ολικό μέγιστο  $f(1, 1) = 3$
45. Ολικό ελάχιστο,  $f(0, 0) = 0$ , ολικό μέγιστο  $f(1, 0) = f(0, 1) = 1$
47. Ολικό ελάχιστο,  $f(1, 2) = -5$ , ολικό μέγιστο  $f(0, 0) = f(3, 3) = 0$
49. Ολικό ελάχιστο,  $f(-0.4343, 0.9) = f(-0.4343, -0.9) \approx -0.5161$ ,  
ολικό μέγιστο  $f(0.7676, 0.6409) = f(0.7676, -0.6409) \approx 1.2199$
51. Μέγιστος όγκος  $\frac{3}{4}$
55. (α) Όχι. Στο κουτί  $B$  με το ελάχιστο εμβαδόν το  $z$  είναι μικρότερο από  $\sqrt[3]{V}$ , το οποίο είναι η ακμή του κύβου όγκου  $V$ .
- (β) Πλάτος:  $x = (2V)^{1/3}$ , μήκος:  $y = (2V)^{1/3}$ , ύψος:  $z = (\frac{V}{4})^{1/3}$
57. Ο φράχτης πρέπει να κοπεί σε 12 τμήματα μήκους 10, σχηματίζοντας τρία τετράγωνα  $10 \times 10$ .
59.  $V = \frac{64,000}{\pi} \approx 20,372 \text{ cm}^3$  61.  $f(x) = 1.9629x - 1.5519$

## Ενότητα 14.8 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Πρόταση (β)

2. Η  $f$  είχε ένα τοπικό μέγιστο 2, υπό τη συνθήκη, στο  $A$  το  $f(B)$  δεν είναι ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο της  $f$ .

3. (α)



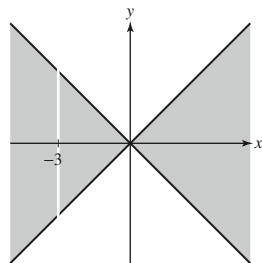
(β) Ολικό ελάχιστο  $-4$ , ολικό μέγιστο  $6$

### Ενότητα 14.8 Ασκήσεις

1. (γ) Κρίσιμα σημεία  $(-1, -2)$  και  $(1, 2)$  (δ) Μέγιστο  $10$ , ελάχιστο  $-10$   
 3. Μέγιστο  $4\sqrt{2}$ , ελάχιστο  $-4\sqrt{2}$  5. Ελάχιστο  $\frac{36}{13}$ , δεν έχει μέγιστη τιμή 7. Μέγιστο  $\frac{8}{3}$ , ελάχιστο  $-\frac{8}{3}$   
 9. Μέγιστο  $\sqrt{2}$ , ελάχιστο  $1$  11. Μέγιστο  $3.7$ , ελάχιστο  $-3.7$   
 13. Μέγιστα στα  $f(\pm 4, \pm 4, 2) = 20$  και ελάχιστα στα  $f(\pm 4, \mp 4, -2) = -20$  15. Μέγιστο  $2\sqrt{2}$ , ελάχιστο  $-2\sqrt{2}$   
 17.  $(-1, e^{-1})$  19. (α)  $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$  (β)  $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$  (γ) Δεν υπάρχει κώνος σταθερού  $V$  με μέγιστο εμβαδόν  $S$ .  
 21.  $(8, -2)$  23.  $(\frac{48}{97}, \frac{108}{97})$  25.  $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$  27.  $\sqrt{\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}}$  33.  $r = 3, h = 6$  35.  $x + y + z = 3$   
 41.  $\frac{25}{3}$  43.  $(\frac{-6}{\sqrt{105}}, \frac{-3}{\sqrt{105}}, \frac{30}{\sqrt{105}})$  45.  $(-1, 0, 2)$   
 47. Ελάχιστο  $\frac{138}{11} \approx 12.545$ , δεν υπάρχει μέγιστη τιμή 51. (β)  $\lambda = \frac{c}{2p_1 p_2}$

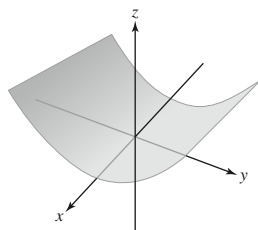
### Κεφάλαιο 14 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. (α)



(β)  $f(3, 1) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ,  $f(-5, -3) = -2$  (γ)  $(-\frac{5}{3}, 1)$

3.



Κατακόρυφα και οριζόντια ίχνη: η ευθεία  $z = (c^2 + 1) - y$  στο επίπεδο  $x = c$ , η παραβολή  $z = x^2 - c + 1$  στο επίπεδο  $y = c$ .

5. (α) Γραφική παράσταση (Β) (β) Γραφική παράσταση (Γ) (γ) Γραφική παράσταση (Δ) (δ) Γραφική παράσταση (Α)

7. (α) Παράλληλες ευθείες  $4x - y = \ln c$ ,  $c > 0$ , στο επίπεδο  $xy$

(β) Παράλληλες ευθείες  $4x - y = e^c$  στο επίπεδο  $xy$

(γ) Υπερβολές  $3x^2 - 4y^2 = c$  στο επίπεδο  $xy$

(δ) Παραβολές  $x = c - y^2$  στο επίπεδο  $xy$

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} (xy + y^2) = 6$  11. Το όριο δεν υπάρχει. 13.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} (2x + y)e^{-x+y} = -e^{-4}$

17.  $f_x = 2$ ,  $f_y = 2y$

19.  $f_x = e^{-x-y}(y \cos(xy) - \sin(xy))$

$f_y = e^{-x-y}(x \cos(yx) - \sin(yx))$

21.  $f_{xxyz} = -\cos(x+z)$  23.  $z = 33x + 8y - 42$

25. Εκτίμηση: 12.146, τιμή αριθμομηχανής με τρία δεκαδικά ψηφία: 11.996

27. Οι προτάσεις (ii) και (iv) είναι αληθείς.

29.  $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))|_{t=2} = 3 + 4e^4 \approx 221.4$  31.  $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))|_{t=1} = 4e - e^{3e} \approx -3469.3$

33.  $D_{\mathbf{u}}f(3, -1) = -\frac{54}{\sqrt{5}}$  35.  $D_{\mathbf{u}}f(P) = -\frac{\sqrt{2}e}{5}$  37.  $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle$

41.  $\frac{\partial f}{\partial s} = 3s^2t + 4st^2 + t^3 - 2st^3 + 6s^2t^2$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 4s^2t + 3st^2 + s^3 + 4s^3t - 3s^2t^2$

45.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^z - 1}{xe^z + e^y}$

47. (0, 0) σαγματικό σημείο, (1, 1) και (-1, -1) τοπικά ελάχιστα

49.  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  σαγματικό σημείο

53. Ολικό μέγιστο  $f(2, 4) = 10$ , ολικό ελάχιστο  $f(-2, 4) = -18$

55. Μέγιστο  $\frac{26}{\sqrt{13}}$ , ελάχιστο  $-\frac{26}{\sqrt{13}}$

57. Μέγιστο  $\frac{12}{\sqrt{3}}$ , ελάχιστο  $-\frac{12}{\sqrt{3}}$

59. Ελάχιστο  $= f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ , Μέγιστο  $= f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$

61.  $r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ ,  $S = 3\pi\left(\frac{V}{\pi}\right)^{2/3}$

## Κεφάλαιο 15

### Ενότητα 15.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $\Delta A = 1$ , ο αριθμός των υπο-ορθογωνίων είναι 32.

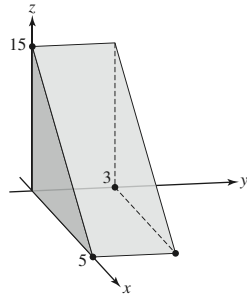
2.  $\iint_R f \, dA \approx S_{1,1} = 0.16$  3.  $\iint_R 5 \, dA = 50$



4. Ο προσημασμένος όγκος μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $z = f(x, y)$  και του επιπέδου  $xy$ . Η περιοχή κάτω από το επίπεδο  $xy$  θεωρείται αρνητικός όγκος.
5. (β) 6. (β), (γ), όγκος πάνω από το επίπεδο  $xy =$  όγκος κάτω από το επίπεδο  $xy$ .

### Ενότητα 15.1 Ασκήσεις

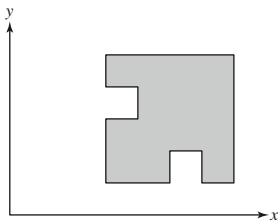
1.  $S_{4,3} = 13.5$  3. (A)  $S_{3,2} = 42$  (B)  $S_{3,2} = 43.5$  5. (A)  $S_{3,2} = 60$  (B)  $S_{3,2} = 62$
7. Δύο πιθανές λύσεις είναι  $S_{3,2} = \frac{77}{72}$  και  $S_{3,2} = \frac{79}{72}$ .
9.  $\frac{225}{2}$



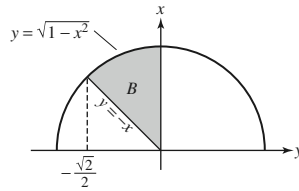
11. 0.19375 13. 1.0731, 1.0783, 1.0809 15. 0 17. 0 19. 40 21. 55 23.  $\frac{4}{3}$  25. 84 27. 4 29.  $\frac{1858}{15}$
31.  $6 \ln 6 - 2 \ln 2 - 5 \ln 5 \approx 1.317$  33.  $\frac{4}{3} (19 - 5\sqrt{5}) \approx 10.426$  35.  $\frac{1}{2} (\ln 3)(-2 + \ln 48) \approx 1.028$
37.  $6 \ln 3 \approx 6.592$  39. 1 41.  $(e^2 - 1) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1.871$  43.  $9/2$  45.  $m = \frac{3}{4}$
47. (α) Ως προς  $x$  επειδή η μέθοδος της αντικατάστασης δεν περιλαμβάνει τον κανόνα του γινομένου  
 (β)  $\frac{2}{15} (8\sqrt{2} - 7) \approx 0.575161$
49. (α) Ως προς  $x$  επειδή η μέθοδος της αντικατάστασης δεν περιλαμβάνει τον κανόνα του πηλίκου  
 (β)  $\ln(4) - 1 \approx 0.386$
53.  $\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} - e + 1 \approx 4.644$

### Ενότητα 15.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (β), (γ)
- 2.



3.

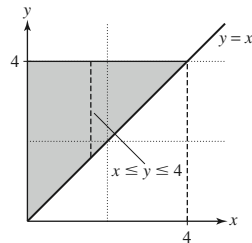


4. (β)

### Ενότητα 15.2 Ασκήσεις

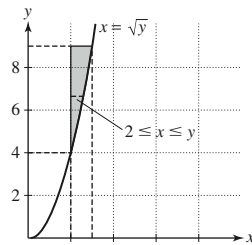
1. (α) Τυχαία σημεία  $\bullet$ ,  $S_{3,4} = -3$  (β) Τυχαία σημεία  $\circ$ ,  $S_{3,4} = -4$ 3. Ως κατακόρυφα απλό χωρίο:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1 - x^2$ ,ως οριζόντια απλό χωρίο:  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq \sqrt{1-y}$ ,  $\int_0^1 \left( \int_0^{1-x^2} (xy) dy \right) dx = \frac{1}{12}$ 5.  $\frac{192}{5} = 38.4$  7.  $\frac{608}{15} \approx 40.53$  9.  $2\frac{1}{4}$  11.  $-\frac{3}{4} + \ln 4$  13.  $\frac{16}{3} \approx 5.33$  15.  $\frac{11}{60}$  17.  $66875/8$ 19.  $\frac{e-2}{2} \approx 0.359$  21.  $29/70$  23.  $2e^{12} - \frac{1}{2}e^9 + \frac{1}{2}e^5 \approx 321,532.2$ 

25.



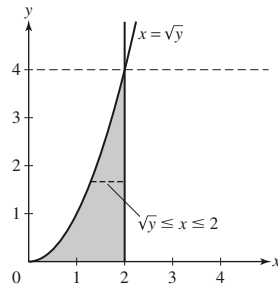
$$\int_0^4 \int_x^4 f(x, y) dy dx = \int_0^4 \int_0^y f(x, y) dx dy$$

27.



$$\int_4^9 \int_2^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy = \int_2^3 \int_{x^2}^9 f(x, y) dy dx$$

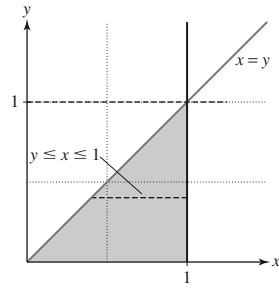
29.



$$\int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{4x^2 + 5y} dy dx = \frac{152}{15}$$

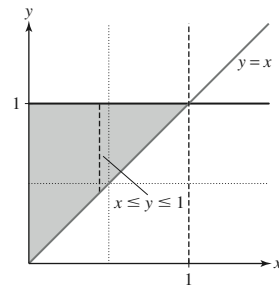
31.  $\int_1^e \int_{\ln^2 y}^{\ln y} (\ln y)^{-1} dx dy = e - 2 \approx 0.718$

33.



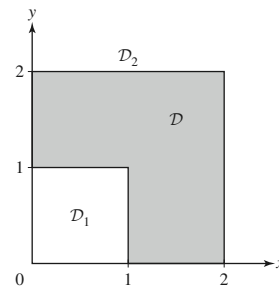
$$\int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx = 1 - \cos 1 \approx 0.460$$

35.



$$\int_0^1 \int_0^y x e^{y^3} dx dy = \frac{e-1}{6} \approx 0.286$$

37.



$$\iint_D e^{x+y} dA = (e^2 - 1)^2 - (e - 1)^2 \approx 37.878$$

39.  $\int_0^4 \int_{x/4}^{3x/4} e^{x^2} dy dx = \frac{1}{4} (e^{16} - 1)$     41.  $\int_2^4 \int_{y-1}^{7-y} \frac{x}{y^2} dx dy = 6 - 6 \ln 2 \approx 1.841$

43.  $\iint_D \frac{\sin y}{y} dA = \cos 1 - \cos 2 \approx 0.956$     45.  $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (40 - 10y) dy dx = 256$

47.  $\int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} (16 - y - y) dy dx = \frac{512}{3}$     49.  $\int_{-2}^2 \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [(8 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)] dy \right) dx$

51.  $\approx 7.541$  δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα    53.  $\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dx dy = e^2 - 2e + 1 \approx 2.952$

55.  $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi y^2 \sin x dx dy = \frac{2}{3\pi}$     57.  $\bar{f} = p$     63. Μια πιθανή λύση είναι  $P = (\frac{2}{3}, 2)$ .

65.  $\iint_D f(x, y) dA \approx 57.01$

### Ενότητα 15.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (γ) 2. (β) 3. (α)  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  (β)  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$

### Ενότητα 15.3 Ασκήσεις

1. 288 3.  $(e-1)(1-e^{-2})$  5.  $-\frac{27}{4} = -6.75$  7.  $\frac{b}{20} [(a+c)^5 - a^5 - c^5]$  9.  $\frac{1}{6}$  11.  $\frac{1}{16}$  13.  $e - \frac{5}{2}$

15.  $2\frac{1}{12}$  17.  $\frac{128}{15}$  19.  $\int_0^3 \int_0^4 \int_0^{y/4} dz dy dx = 6$  21.  $\frac{1}{12}$  23.  $\frac{126}{5}$

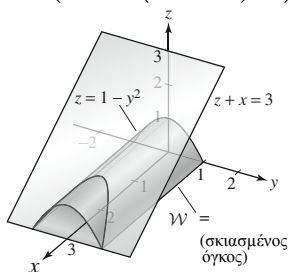
25. Χωρίο που περικλείεται από τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  στα δεξιά του επιπέδου  $y = 1$ .

27.  $\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_p^q g(x)h(y)k(z) dz dy dx = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \int_p^q k(z) dz$

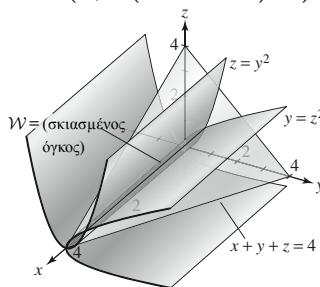
29.  $\int_0^2 \int_0^{y/2} \int_0^{4-y^2} xyz dz dx dy, \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \int_0^{y/2} xyz dx dy dz$  και  $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{1-(z/4)}} \int_{2x}^{\sqrt{4-z}} xyz dy dx dz$

31.  $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dy dx$  33.  $\frac{16}{21}$

35.  $\int_{-1}^1 \left( \int_0^{1-y^2} \left( \int_0^{3-z} dx \right) dz \right) dy$



37.  $\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^{y^2} \left( \int_0^{4-y-z} dx \right) dz \right) dy$



39.  $\frac{1}{2\pi}$  41.  $2e - 4 \approx 1.437$  43.  $S_{N,N,N} \approx 0.561, 0.572, 0.576, I \approx 0.584, N = 100$

### Ενότητα 15.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (δ) 2. (α)  $\int_{-1}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 f(P) r dr d\theta dz$  (β)  $\int_{-2}^0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} r dr d\theta dz$

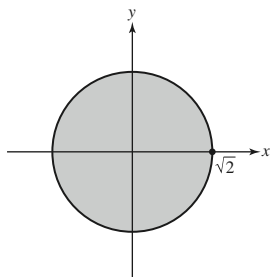
3. (α)  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^4 f(P) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$  (β)  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_4^5 f(P) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$  (γ)  $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^\pi \int_0^2 f(P) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

4.  $\Delta A \approx r(\Delta r \Delta \theta)$  και ο παράγοντας  $r$  εμφανίζεται στο  $dA = r dr d\theta$  στον τύπο αλλαγής μεταβλητής.

5. (α)  $18\pi$  (β)  $18\pi$  (γ)  $\frac{9\pi}{4}$  (δ)  $9\pi$

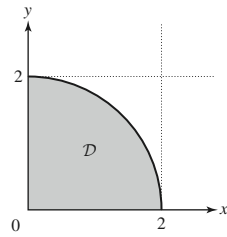
### Ενότητα 15.4 Ασκήσεις

1.



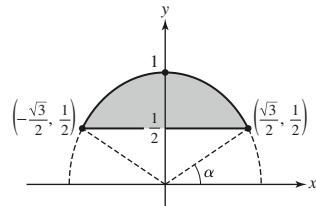
$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$$

3.



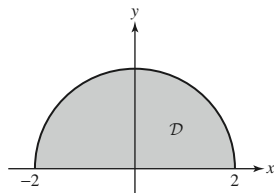
$$\iint_D xy \, dA = 2$$

5.



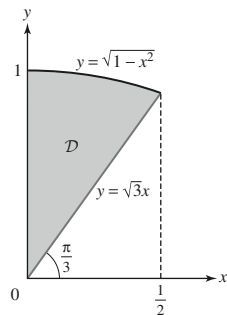
$$\iint_D y (x^2 + y^2)^{-1} \, dA = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.685$$

7.



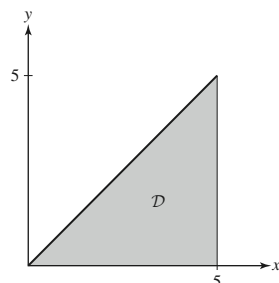
$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = 4\pi$$

9.



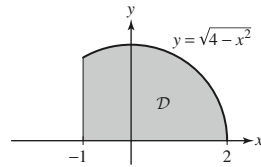
$$\int_0^{1/2} \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 0.045$$

11.



$$\int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{5/\cos(\theta)} (r^2 \cos(\theta)) \, dr \right) d\theta = \frac{125}{3}$$

13.



$$\int_{-1}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8\pi}{3} \approx 9.244$$

15.  $\frac{1}{4}$  17.  $\frac{1}{2}$  19. 0 21. 18 23.  $\frac{48\pi - 32}{9} \approx 13.2$

25. (α)  $W : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, 2 \leq z \leq 6 - r^2$  (β)  $8\pi$  27.  $\frac{405\pi}{2} \approx 636.17$  29. 128 31.  $243\pi$

33.  $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^4 f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$  35.  $\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{r^2} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$

37.  $z = \frac{H}{R}r, V = \frac{\pi R^2 H}{3}$  39.  $16\pi$  41.  $V = 2 \int_0^{2\pi} \left( \int_b^a \left( \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} (r) dz \right) dr \right) d\theta = \frac{4}{3}\pi(a^2 - b^2)^{3/2} = \frac{4}{3}\pi r h^3$

43.  $V = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/3} \left( \int_{\sec(\phi)}^2 (\rho^2 \sin(\phi)) d\rho \right) d\phi \right) d\theta = \frac{5\pi}{3}$  45.  $-\frac{\pi}{16}$  47.  $\frac{8\pi}{15}$  49.  $\frac{8\pi}{5}$  51.  $\frac{5\pi}{8}$  53.  $\pi$

55.  $\frac{4\pi a^3}{3}$  57. (β)  $J = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\infty (e^{-r^2} r) dr \right) d\theta = \pi$

### Ενότητα 15.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $5 \text{ kg/m}^3$  2. (α) 3. Η πιθανότητα  $0 \leq X \leq 1$  και  $0 \leq Y \leq 1$ , η πιθανότητα  $0 \leq X + Y \leq 1$ 

### Ενότητα 15.5 Ασκήσεις

1. 4 3.  $4(1 - e^{-100}) \times 10^{-6} \text{ C} \approx 4 \times 10^{-6} \text{ C}$  5.  $10,000 - 18,000e^{-4/5} \approx 1912$

7.  $25\pi(3 \times 10^{-8} \text{ C}) \approx 2.356 \times 10^{-6} \text{ C}$  9.  $\approx 2.593 \times 10^{10} \text{ kg}$  11.  $(0, \frac{2}{5})$  13.  $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$

15.  $(1 - \frac{M}{e^{M-1}}, \frac{1-e^{-2M}}{4(1-e^{-M})})$  17.  $(0.555, 0)$  19.  $(0, 0, \frac{3R}{8})$  21.  $(0, 0, \frac{9}{8})$  23.  $(0, 0, \frac{13}{2(17-6\sqrt{6})})$

25.  $(\frac{18}{5}, \frac{6}{5})$  27.  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$  29.  $\frac{16}{15\pi}$  31. (α)  $\frac{M}{4ab}$  (β)  $I_x = \frac{Mb^2}{3}, I_0 = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}$  (γ)  $\frac{b}{\sqrt{3}}$

33.  $I_0 = 8,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_x = 4,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  35.  $\frac{9}{2}$  37.  $\frac{243}{20}$  39.  $(\frac{a}{2}, \frac{2b}{5})$  41.  $\frac{a^2 b^4}{60}$

43.  $I_x = \frac{MR^2}{4}$ , η απαιτούμενη κινητική ενέργεια είναι  $\frac{25MR^2}{2} \text{ J}$  49. (α)  $I = 182.5 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$  (β)  $\omega \approx 196.90 \text{ rad/s}$

51.  $\frac{13}{72}$  53.  $\frac{1}{64}$  55.  $C = 15$ , η πιθανότητα είναι  $\frac{5}{8}$  57. (α)  $C = 4$  (β)  $\frac{1}{48\pi} + \frac{1}{32} \approx 0.038$

### Ενότητα 15.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (β) 2. (α)  $G(1, 0) = (2, 0)$  (β)  $G(1, 1) = (1, 3)$  (γ)  $G(2, 1) = (3, 3)$ 3. Εμβαδόν  $(G(R)) = 36$  4. Εμβαδόν  $(G(R)) \approx 0.06$

## Ενότητα 15.6 Ασκήσεις

1. (α) Η εικόνα του άξονα  $u$  είναι η ευθεία  $y = \frac{1}{2}x$ , η εικόνα του άξονα  $v$  είναι ο άξονας  $y$

(β) Το παραλληλόγραμμο με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(10, 5)$ ,  $(10, 12)$ ,  $(0, 7)$

(γ) Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία  $(2, 3)$  και  $(10, 8)$

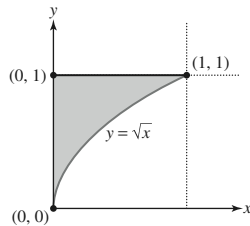
(δ) Το τρίγωνο με κορυφές  $(0, 1)$ ,  $(2, 1)$ , και  $(2, 2)$

3. Η  $G$  δεν είναι ένα-προς-ένα, η  $G$  είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού  $\{(u, v) : u \geq 0\}$  και η  $G$  είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού  $\{(u, v) : u \leq 0\}$ .

(α) Ο θετικός άξονας των  $x$  μαζί με την αρχή και ο άξονας των  $y$  αντίστοιχα

(β) Το ορθογώνιο  $[0, 1] \times [-1, 1]$

(γ) Η καμπύλη  $y = \sqrt{x}$  για  $0 \leq x \leq 1$  (δ)



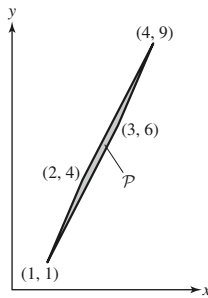
5.  $y = 3x - c$  7.  $y = \frac{17}{6}x$  9.  $\text{Jac}(G) = 1$  11.  $\text{Jac}(G) = -10$  13.  $\text{Jac}(G) = 1$  15.  $\text{Jac}(G) = 4$

17.  $G(u, v) = (4u + 2v, u + 3v)$  19.  $\frac{2329}{12} \approx 194.08$

21. (α) Εμβαδόν  $(G(R)) = 105$  (β) Εμβαδόν  $(G(R)) = 126$

23.  $\text{Jac}(G) = \frac{2u}{v}$ , για  $R = [1, 4] \times [1, 4]$ , εμβαδόν  $(G(R)) = 15 \ln 4$

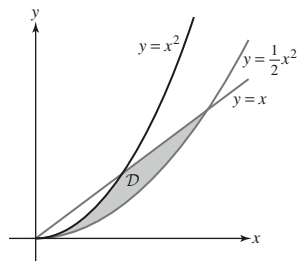
25.



$$G(u, v) = (1 + 2u + v, 1 + 5u + 3v)$$

27. 82 29. 80 31.  $\frac{56}{45}$  33.  $\frac{\pi(e^{36} - 1)}{6}$

35.



$$\iint_D y^{-1} dx dy = 1$$

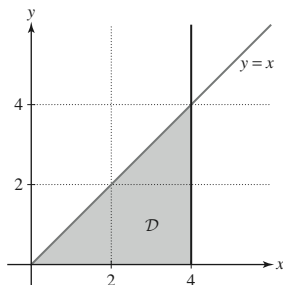
$$37. \iint_D e^{xy} dA = (e^{20} - e^{10}) \ln 2 \quad 39. (\beta) -\frac{1}{x+y} \quad (\gamma) I = 9 \quad 41. \frac{\pi^2}{8}$$

### Κεφάλαιο 15 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

$$1. (\alpha) S_{2,3} = 240 \quad (\beta) S_{2,3} = 510 \quad (\gamma) 520$$

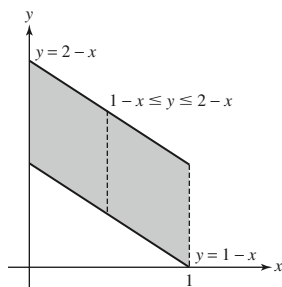
$$3. S_{4,4} = 2.9375 \quad 5. \frac{32}{3} \quad 7. \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

9.



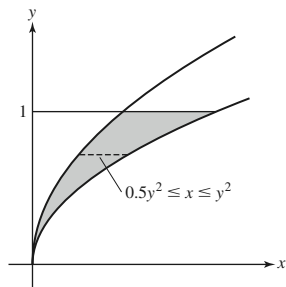
$$\iint_D \cos y dA = 1 - \cos 4$$

11.



$$\iint_D e^{x+2y} dA = \frac{1}{2}e(e+1)(e-1)^2$$

13.



$$\iint_D ye^{1+x} dA = 0.5(e^2 - 2e^{1.5} + e)$$

$$15. \int_0^9 \int_{-\sqrt{9-y}}^{\sqrt{9-y}} f(x, y) dx dy \quad 17. \frac{1}{24} \quad 19. 18(\sqrt{2}-1) \quad 21. 1 - \cos 1 \quad 23. 6\pi \quad 25. \pi/2 \quad 27. 10 \quad 29. \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$$

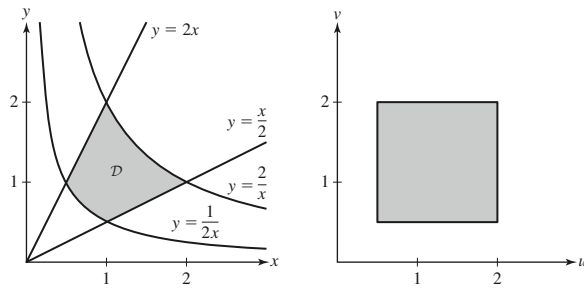
$$31. \pi \quad 33. \frac{1}{4} \quad 35. \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^r zr dz dr d\theta = \pi/16 \quad 37. \frac{2\pi(-1+e^8)}{3e^8} \quad 41. \frac{256\pi}{15} \approx 53.62 \quad 43. 1280\pi$$

$$45. (-\frac{1}{4}R, 0, \frac{5}{8}H) \quad 47. (-\frac{2}{11\pi}R, -\frac{2}{11\pi}R(2-\sqrt{3}), \frac{1}{2}H) \quad 49. (0, 0, \frac{2}{3}) \quad 51. (\frac{8}{15}, \frac{16}{15\pi}, \frac{16}{15\pi}) \quad 53. \frac{19}{33}$$

$$55. \frac{4}{7} \quad 57. G(u, v) = (3u+v, -u+4v), \text{εμβαδόν}(G(R)) = 156 \quad 59. \text{εμβαδόν}(D) \approx \frac{1}{5}$$



61. (α)

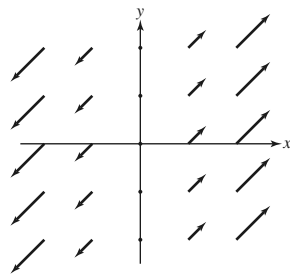


(δ)  $\frac{3}{4}(e^2 - \sqrt{e})$

## Κεφάλαιο 16

### Ενότητα 16.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

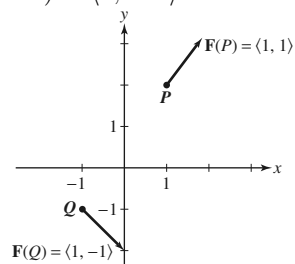
1. (β) 2.



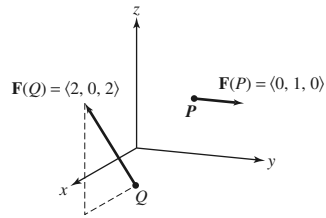
3.  $\mathbf{F} = \langle 0, -z, y \rangle$  4.  $f_1(x, y, z) = xyz + 1$

### Ενότητα 16.1 Ασκήσεις

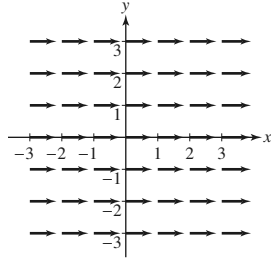
1.  $\mathbf{F}(1, 2) = \langle 1, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{F}(-1, -1) = \langle 1, -1 \rangle$



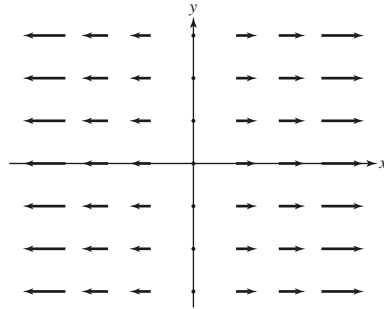
3.  $\mathbf{F}(P) = \langle 0, 1, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{F}(Q) = \langle 2, 0, 2 \rangle$



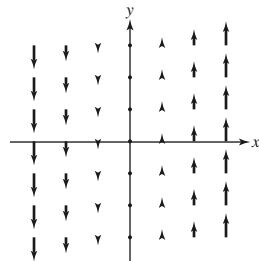
5.  $\mathbf{F} = \langle 1, 0 \rangle$



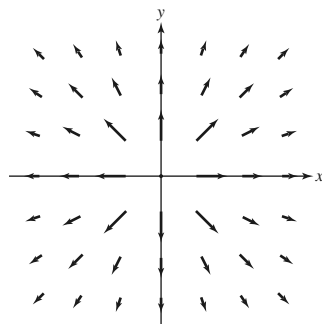
7.  $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$



9.  $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, x \rangle$



11.  $\mathbf{F} = \left\langle \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right\rangle$



13. Διάγραμμα (Δ) 15. Διάγραμμα (Β) 17. Διάγραμμα (Γ) 19. Διάγραμμα (Β) 21.  $(0, y)$

23.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 3$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = 0$  25.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 1 - 4xz - x + 2x^2z$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = \langle -1, 2x^2 - 2xz^2, -y \rangle$

27.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = 0$  29.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = \langle 0, \sin x, \cos x - e^y \rangle$

39.  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + K$  41.  $f(x, y, z) = \langle xy^2z, y + xy^2z, xy^2z \rangle$  43.  $f(x, y) = e^{xy} + K$   
 45.  $f(x, y, z) = xyz^2 + K$  47.  $f(x, y, z) = \sin(xyz) + K$  49.  $f(x, y, z) = ax + by + cz + K$   
 51. (β)  $e_p(1, 1) = \langle -2, -1 \rangle / \sqrt{5}$ , (γ)  $f(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  53. (A)

### Ενότητα 16.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. 50 2. (α), (γ), (δ), (ε)  
 3. (α) Σωστό (β) Λάθος. Η αντιστροφή του προσανατολισμού της καμπύλης αλλάζει το πρόσημο του διανυσματικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος.  
 4. (α) 0 (β) -5

### Ενότητα 16.2 Ασκήσεις

1. (α)  $f(\mathbf{r}(t)) = 6t + 4t^2, ds = 2\sqrt{11} dt$  (β)  $\int_0^1 (6t + 4t^2) 2\sqrt{11} dt = \frac{26\sqrt{11}}{3}$   
 3. (α)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle t^{-2}, t^2 \rangle, d\mathbf{r} = \langle 1, -t^{-2} \rangle dt$  (β)  $\int_1^2 (t^{-1} - 1) dt = -\frac{1}{2}$   
 5.  $\sqrt{2} \left( \pi + \frac{\pi^3}{3} \right)$  7.  $\frac{\pi^3}{3}$  9. 298/5 11.  $\frac{128\sqrt{29}}{3} \approx 229.8$  13.  $\frac{\sqrt{3}}{2}(e-1) \approx 1.488$  15.  $\frac{2}{3}((e^2 + 5)^{3/2} - 2^{3/2})$   
 17. 39, η απόσταση μεταξύ των (8, -6, 24) και (20, -15, 60) 19. 97/12 21. 0 23.  $2(e^2 - e^{-2}) - (e - e^{-1}) \approx 12.157$   
 25.  $\frac{10}{9}$  27. 9/4 29.  $-\frac{8}{3}$  31.  $\frac{13}{2}$  33.  $\frac{\pi}{2}$  35. 339.5587 37.  $2 - e - \frac{1}{e}$  39. (α) -8 (β) -11 (γ) -16  
 41.  $\approx 7.6, \approx 4$  43. (A) Μηδέν (B) Αρνητικό (Γ) Μηδέν 45.  $64\pi$  g 47.  $\approx 10.4 \times 10^{-6}$  C 49.  $\approx 22,743.10$  volts  
 51.  $\approx -10,097$  volts 53. 1 joule 55.  $\frac{27}{28}$  joule 57. (α) ABC (β) CBA  
 65.  $\frac{1}{3}((4\pi^2 + 1)^{3/2} - 1) \approx 85.5 \times 10^{-6}$  C 67. 18 73.  $\approx 0.574$

### Ενότητα 16.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Κλειστό  
 2. (α) Συντηρητικά διανυσματικά πεδία (β) Όλα τα διανυσματικά πεδία  
 (γ) Συντηρητικά διανυσματικά πεδία (δ) Όλα τα διανυσματικά πεδία  
 (ε) Συντηρητικά διανυσματικά πεδία (στ) Όλα τα διανυσματικά πεδία  
 (ζ) Συντηρητικά διανυσματικά πεδία και κάποια άλλα διανυσματικά πεδία  
 3. (α) Πάντα σωστό (β) Πάντα σωστό  
 (γ) Σωστό υπό πρόσθετες υποθέσεις στο  $D$   
 4. (α) 4 (β) -4

### Ενότητα 16.3 Ασκήσεις

1. 0   3.  $-\frac{9}{4}$    5.  $32e - 1$    7.  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$    9. Όχι συντηρητικό   11.  $f(x, y, z) = y^2x + e^z y$   
 13. Το διανυσματικό πεδίο δεν είναι συντηρητικό.   15.  $f(x, y, z) = z \tan x + zy$    17.  $f(x, y, z) = x^2y + 5x - 4zy$   
 19. 16   21. 1   23. 6   25.  $\frac{2}{3}, 0$    27.  $6.2 \times 10^9$  joules   29. (α)  $f(x, y, z) = -gz$    (β)  $\approx 82.8$  m/s  
 31. (A)  $2\pi$  (B)  $2\pi$  (Γ) 0 (Δ)  $-2\pi$  (E)  $4\pi$    33. Όχι συντηρητικό

### Ενότητα 16.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. 50  
 2. Ένας παράγοντας στρέβλωσης που υποδεικνύει πόσο αλλάζει η επιφάνεια  $R_{ij}$  κάτω από τον μετασχηματισμό  $G$ .  
 3. Εμβαδόν( $\mathcal{S}$ )  $\approx 0.0006$    4.  $\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS \approx 0.6$    5. Εμβαδόν( $\mathcal{S}$ ) = 20   6.  $\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle$

### Ενότητα 16.4 Ασκήσεις

1. (α) v   (β) iii   (γ) i   (δ) iv   (ε) ii  
 3. (α)  $\mathbf{T}_u = \langle 2, 1, 3 \rangle$ ,  $\mathbf{T}_v = \langle 0, -1, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{N}(u, v) = \langle 4, -2, -2 \rangle$    (β) εμβαδόν( $\mathcal{S}$ ) =  $4\sqrt{6}$   
 (γ)  $\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \frac{32\sqrt{6}}{3}$   
 5. (α)  $\mathbf{T}_x = \langle 1, 0, y \rangle$ ,  $\mathbf{T}_y = \langle 0, 1, x \rangle$ ,  $\mathbf{N}(x, y) = \langle -y, -x, 1 \rangle$    (β)  $\frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{6}$    (γ)  $\frac{\sqrt{2}+1}{15}$   
 7.  $\mathbf{T}_u = \langle 2, 1, 3 \rangle$ ,  $\mathbf{T}_v = \langle 1, -4, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{N}(u, v) = 3\langle 4, 1, -3 \rangle$ ,  $4x + y - 3z = 0$   
 9.  $\mathbf{T}_\theta = \langle -\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0 \rangle$ ,  $\mathbf{T}_\phi = \langle \cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi \rangle$   
 $\mathbf{N}(u, v) = -\cos \theta \sin^2 \phi \mathbf{i} - \sin \theta \sin^2 \phi \mathbf{j} - \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$ ,  $y + z = \sqrt{2}$   
 11. Εμβαδόν( $\mathcal{S}$ )  $\approx 0.2078$    13.  $\frac{\sqrt{2}}{5}$    15.  $\frac{1}{2}(17\sqrt{17} - 1) \approx 34.546$    17.  $\frac{\pi}{6}$    19.  $4\pi(1 - e^{-4})$    21.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$   
 23.  $\frac{7\pi}{3}$    25.  $\frac{5\sqrt{10}}{27} - \frac{1}{54}$    27. Εμβαδόν( $\mathcal{S}$ ) = 16   29.  $3e^3 - 6e^2 + 3e + 1 \approx 25.08$   
 31. Εμβαδόν( $\mathcal{S}$ ) =  $4\pi R^2$    33. (α) Εμβαδόν( $\mathcal{S}$ )  $\approx 1.0780$    (β)  $\approx 0.09814$   
 35.  $\sqrt{1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{d}\right)^2}$    37. Εμβαδόν( $\mathcal{S}$ ) =  $\pi$    39.  $48\pi$    43. Εμβαδόν( $\mathcal{S}$ ) =  $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1) \approx 36.18$   
 47.  $4\pi^2 ab$    49.  $f(r) = -\frac{Gm}{2Rr}(\sqrt{R^2 + r^2} - |R - r|)$

### Ενότητα 16.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (β)   2. (γ)   3. (α)   4. (β)  
 5. (α) 0   (β)  $\pi$    (γ)  $\pi$    6.  $\approx 0.05\sqrt{2} \approx 0.0707$    7. 0

### Ενότητα 16.5 Ασκήσεις

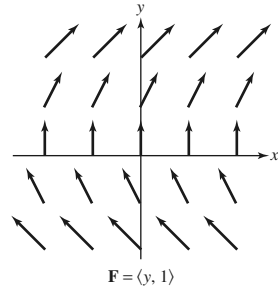
1. (α)  $\mathbf{N} = \langle 2v, -4uv, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 2v^3 + u$    (β)  $\frac{4}{\sqrt{69}}$    265  
 3. 4   5. -4   7.  $\frac{27}{12}(3\pi + 4)$    9.  $\frac{693}{5}$    11.  $\frac{11}{12}$    13.  $\frac{9\pi}{4}$    15.  $(e - 1)^2$    17. 270   19. (α)  $18\pi e^{-3}$    (β)  $\frac{\pi}{2} e^{-1}$

21.  $\left(2 - \frac{6}{\sqrt{13}}\right) \pi k$  23.  $\frac{2\pi}{3} \text{ m}^3/\text{s}$  25.  $4\pi$  27.  $\frac{16\pi}{3}$  29. (α) 1 (β) 1  
 33.  $\Phi(t) = -1.56 \times 10^{-5} e^{-0.1t} \text{ T}\cdot\text{m}^2$ , πτώση τάσης =  $-1.56 \times 10^{-6} e^{-0.1t} \text{ volts}$   
 35. Η ροή είναι μέγιστη στο  $z = 3$ .

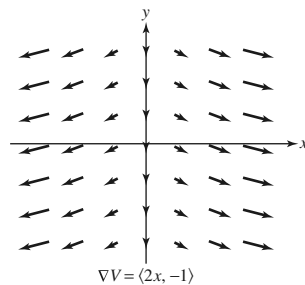
### Κεφάλαιο 16 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. (α)  $\langle -15, 8 \rangle$  (β)  $\langle 4, 8 \rangle$  (γ)  $\langle 9, 1 \rangle$

3.



5.  $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2x, -1 \rangle$



7.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 2x + 2y + 2z$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = \langle 0, 0, 0 \rangle$   
 9.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 3x^2y + y^2$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = \langle 2yz - 2xz, 0, z^2 - x^3 \rangle$   
 11.  $\text{div}(\mathbf{F}) = -1$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = \langle 0, 0, -1 \rangle$   
 13.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 4x^2e^{-x^2-y^2-z^2} + 4y^2e^{-x^2-y^2-z^2} + 4z^2e^{-x^2-y^2-z^2} - 6e^{-x^2-y^2-z^2}$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F}) = \langle 0, 0, 0 \rangle$   
 17.  $\text{curl}(\mathbf{F}) = \langle -2z, 0, -2y \rangle$  19.  $f(x, y) = x^4y^5$  21. Το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό,  $f(x, y, z) = 2x + 4y + e^z$   
 23.  $f(x, y) = \frac{x^4y^4}{4}$  25. Το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό,  $f(x, y, z) = y \ln(x^2 + z)$  27.  $\mathbf{F} = \langle 1 + by, 1 + bx \rangle$  29.  $-2$   
 31.  $\sqrt{2}(\sin 3 - 2 \cos 3 + \sin 1 + 2 \cos 1 + 4) \approx 11.375$  33. (α) 2 (β) 0 37.  $\frac{1}{3}$   
 39.  $4 \ln(1 + (\ln 2)^4 + e^2) \approx 8.616$  41.  $\frac{52}{29} \approx 1.79 \text{ joules}$  43.  $3e^{3/2} - \frac{15}{2} \approx 5.945$   
 45. Εμβαδόν ( $\mathcal{S}$ ) =  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{125u^2 - 100uv + 425v^2 + 81} du dv \approx 62.911$  47.  $\frac{4}{9}(2\sqrt{2} - 1)$   
 49. (α) Μηδέν αφού το  $f(x, y, z) = y^3$  είναι περιττό και συμμετρικό γύρω από το επίπεδο  $xz$ .  
 (β) Θετικό αφού το  $f(x, y, z) = z^3$  είναι μη αρνητικό.  
 (γ) Θετικό αφού το  $f(-x, y, z) = -xyz = -f(x, y, z)$  είναι συμμετρικό γύρω από το επίπεδο  $yz$ .  
 (δ) Αρνητικό αφού το  $f(x, y, z) = z^2 - 2$  είναι αρνητικό.

$$51. (\alpha) \mathbf{N} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, 2 \right\rangle \quad (\beta) \text{Εμβαδόν } (G(R)) = \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot 0.1 \cdot 0.05 \approx 0.0134$$

$$53. \int \int_S \mathbf{F} \cdot dS = \int_0^1 \left( \int_0^1 (-4(2u-v) - 2(2v+5) + 7(-u-3v)) dv \right) du = -28$$

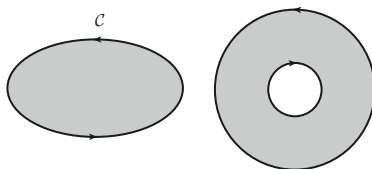
$$55. \frac{1}{4} - \frac{\sinh 1}{3} \quad 57. \frac{\sqrt{6}\pi}{9} \quad 59. 27\pi \quad 61. \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

## Κεφάλαιο 17

### Ενότητα 17.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

$$1. \mathbf{F} = \langle -e^y, x^2 \rangle$$

2.



3. Ναι 4. (α), (γ) 5. (α) 0 (β) -A (γ) 0 (δ) A

### Ενότητα 17.1 Ασκήσεις

$$1. \oint_C xy \, dx + y \, dy = \int_0^{2\pi} (\cos \theta \sin \theta (-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta) d\theta = 0 =$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (0-x) \, dy \, dx = \int \int_D \left( \frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} (xy) \right) dA$$

$$3. 0 \quad 5. -3 \quad 7. -\frac{\pi}{4} \quad 9. \frac{1}{6} \quad 11. \frac{(e^2-1)(e^4-5)}{2} \quad 13. (\alpha) f(x, y) = x^2 e^y \quad (\gamma) 4\pi - 16 \quad 15. I = 34$$

$$17. \pi ab \quad 19. \frac{1}{2} \quad 21. \frac{8}{3} \quad 23. (\gamma) A = \frac{3}{2} \quad 27. 9 + \frac{15\pi}{2} \quad 29. 214\pi$$

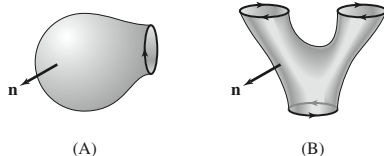
31. (A) Μηδέν (B) Θετικό (Γ) Αρνητικό (Δ) Μηδέν

$$33. -0.10 \quad 35. R = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad 37. \text{Τρίγωνο (A), 3 πολύγωνο (B), 12} \quad 39. -4 \quad 41. 5\pi \quad 43. \frac{9\pi}{4}$$

45. 29.2 βούβαλοι φεύγουν ανά λεπτό.

### Ενότητα 17.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.



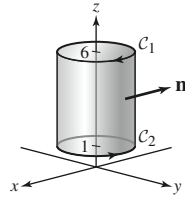
2. (α)

3. Ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{A}$  τέτοιο ώστε το  $\mathbf{F} = \text{curl}(\mathbf{A})$  είναι διανυσματικό δυναμικό για το  $\mathbf{F}$ .

4. (β) 5. Το  $\mathbf{F}$  πρέπει να είναι το curl κάποιου άλλου διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{A}$ .

## Ενότητα 17.2 Ασκήσεις

1.  $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \pi$     3.  $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = e^{-1} - 1$   
 5.  $\langle -3z^2e^{z^3}, 2ze^{z^2} + z \sin(xz), 2 \rangle$ ,  $2\pi$     7.  $\langle -2, 3, 5 \rangle, 20\pi$     9. 0    11.  $-45\pi$     13.  $\frac{1}{2}$     15. 0  
 17. (α)



- (β)  $140\pi$   
 19. (α)  $\mathbf{A} = \langle 0, 0, e^y - e^{x^2} \rangle$     (γ)  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2}$   
 21. (α)  $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = r^2 B \pi$     (β)  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$   
 23.  $\int \int_S B dS = 18b$     25.  $c = 2a$  και  $b$  τυχαίο.    29.  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 25$

## Ενότητα 17.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1.  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$   
 2.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ . Εφόσον η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι θετική για κάθε  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , το τριπλό ολοκλήρωμα και επομένως η ροή είναι θετικά.  
 3. (α), (β), (δ), (στ) έχουν νόημα, (β) και (δ) είναι αυτόματα μηδέν.  
 4. (γ)    5.  $\text{div}(\mathbf{F}) = 1$  και ροή  $= \iiint \text{div}(\mathbf{F}) dV = \text{όγκος}$

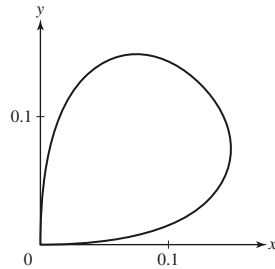
## Ενότητα 17.3 Ασκήσεις

1.  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \text{div}(\mathbf{F}) dV = \iiint_W 0 dV = 0$     3.  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \text{div}(\mathbf{F}) dV = 4\pi$     5.  $\frac{4\pi}{15}$     7.  $60\pi$   
 9.  $\frac{3,616}{105}$     11.  $\frac{32\pi}{5}$     13.  $64\pi$     15.  $81\pi$     17.  $\pi$     19.  $\frac{13}{3}$     21.  $\frac{4\pi}{3}$     23.  $\frac{16\pi}{3} + \frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 24.549$     25.  $\approx 1.57 \text{ m}^3/\text{s}$   
 27. (β) 0    (γ) 0    (δ) Αφού το  $\mathbf{E}$  δεν ορίζεται στην αρχή, που περιέχεται στη σφαίρα  $W$ , δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης.  
 29.  $(-4) \cdot \left[ \frac{256\pi}{3} - 1 \right] \approx -1068.33$   
 37. (δ) Η ροή μέσα από την κλειστή επιφάνεια είναι 0.

## Κεφάλαιο 17 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. 0   3. -30   5.  $\frac{3}{5}$

7. (α)



(β)  $A = \frac{1}{60}$

9.  $\frac{1}{3}$    11.  $\frac{1}{3}$    13.  $\{(x, y) \mid y = x \text{ ή } y = -x\}$    15.  $36\pi$    19.  $2\pi$    21.  $\mathbf{A} = \langle yz, 0, 0 \rangle$  και η ροή είναι  $8\pi$ .

23.  $\frac{296}{3}$    25.  $-128\pi$    27. Όγκος( $W$ ) = 2   29.  $4 \cdot 0.0009\pi \approx 0.0113$    31.  $2x - y + 4z = 0$

33. (β)  $\frac{\pi}{2}$    35. (γ) 0   (δ)  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -4$ ,  $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4$

41.  $V = \frac{4\pi}{3} abc$