ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 1

Ενότητα 1.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $a = -3$ και $b = 1$.

2. Οι αριθμοί $a \geq 0$ ικανοποιούν τις συνθήκες $|a| = a$ και $|-a| = a$.
Οι αριθμοί $a \leq 0$ ικανοποιούν τη συνθήκη $|a| = -a$.

3. $a = -3$ και $b = 1$ **4.** Όχι **5.** $(9, -4)$

6. (α) Πρώτο τεταρτημόριο (β) Δεύτερο τεταρτημόριο (γ) Τέταρτο τεταρτημόριο (δ) Τρίτο τεταρτημόριο

7. 3 **8.** (β) **9.** Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.

10. Η μοναδική συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = 0$.

Ενότητα 1.1 Ασκήσεις

1. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Σωστό

3. $128 - 448x + 672x^2 - 560x^3 + 280x^4 - 84x^5 + 14x^6 - x^7$

5. α, γ **7.** $|x| \leq 2$ **9.** $|x-2| < 2$ **11.** $|x - 3.5| \leq 4.5$ **13.** $-8 < x < 8$ **15.** $-3 < x < 2$ **17.** $(-4, 4)$

19. $(2, 6)$ **21.** $\left[-\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$ **23.** $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$ **25.** $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

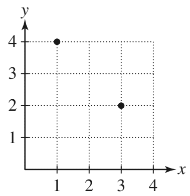
27. (α) (i) (β) (iii) (γ) (v) (δ) (vi) (ε) (ii) (στ) (iv) **29.** $(-3, 1)$

31. Αν τα a και b είναι και τα δύο θετικά, τότε $a > b \Rightarrow 1 > \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Αν τα a και b είναι και τα δύο αρνητικά, τότε $a > b \Rightarrow 1 < \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Αν $a > 0$ και $b < 0$, τότε $\frac{1}{a} > 0$ και $\frac{1}{b} < 0$, οπότε $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

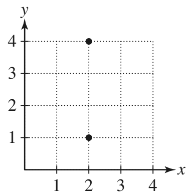
33. $|a + b - 13| = |(a-5) + (b-8)| \leq |a-5| + |b-8| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

35. (α) 11 (β) 1 **37.** $r_1 = \frac{3}{11}$ και $r_2 = \frac{4}{15}$.

39. (α) $d = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

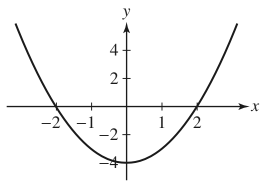


(β) $d = \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

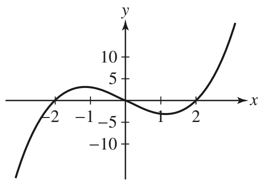


41. (α) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ (β) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 26$ **43.** $D = \{r, s, t, u\}$, $R = \{A, B, E\}$

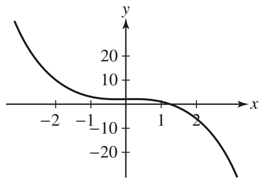
45. D: όλοι οι πραγματικοί, R: όλοι οι πραγματικοί **47.** D: όλοι οι πραγματικοί, R: όλοι οι πραγματικοί
49. D: όλοι οι πραγματικοί, R: $\{y : y \geq 0\}$ **51.** D: $\{x : x \neq 0\}$; R: $\{y : y > 0\}$ **53.** Στο διάστημα $(-1, \infty)$
55. Στο διάστημα $(0, \infty)$ **57.** Ρίζες: ± 2, Αύξουσα: $x > 0$, Φθίνουσα: $x < 0$, Συμμετρία: $f(-x) = f(x)$, οπότε συμμετρία ως προς τον άξονα των y



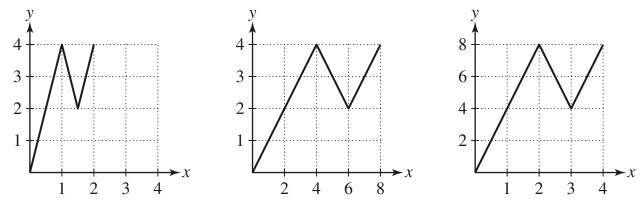
59. Ρίζες: $0, \pm 2$. Συμμετρία: $f(-x) = -f(x)$, οπότε συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.



61. Αυτή είναι μια ανάκλαση της $y = x^3$ ως προς τον άξονα των x μετατοπισμένη προς τα πάνω κατά 2 μονάδες. Υπάρχει μία ρίζα στο $x = \sqrt[3]{2}$.

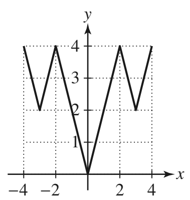


63. Β, Ε, ΣΤ **65.** (α) Περιττή (β) Ούτε άρτια ούτε περιττή (γ) Άρτια
67. $f(x) = g(x) + h(x)$, όπου $g(x) = 2x^4 + 12x^2 + 4$ και $h(x) = -5x^3 - 3x$
69. Έχουμε $f(-x) = p\left(\frac{2-(-x)}{2+(-x)}\right) = p\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = p(2-x) - p(2+x) = -(p(2+x) - p(2-x)) = -p\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -f(x)$. Αφού $f(-x) = -f(x)$, προκύπτει ότι η f είναι περιττή συνάρτηση. **71.** D: $[0,4]$, R: $[0,4]$
73.



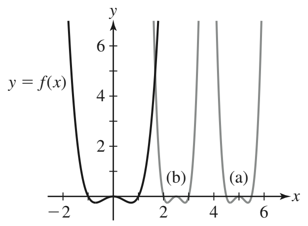
$f(2x)$ $f(x/2)$ $2f(x)$

75.

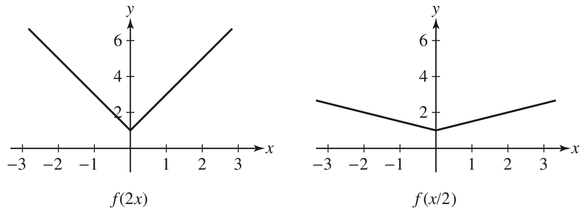


77. (α) D: $[4,8]$, R: $[5,9]$ (β) D: $[1,5]$, R: $[2,6]$ (γ) D: $\left[\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$, R: $[2,6]$ (δ) D: $[4,8]$, R: $[6,18]$
79. (α) $f(x) = (2(x-5))^4 - (2(x-5))^2$ (β) $f(x) = (2x-5)^4 - (2x-5)^2$

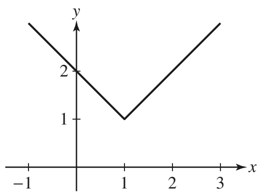
(γ)



81.



83.



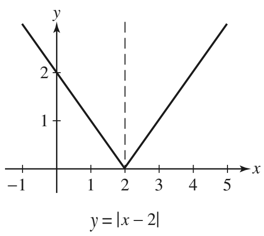
D: όλοι οι πραγματικοί, R: $\{y \mid y \geq 1\}$, $f(x) = |x-1| + 1$

85. Άρτια: $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) \overset{\text{άρτια}}{=} f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

Περιττή: $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) \overset{\text{περιττή}}{=} -f(x) + -g(x) = -(f+g)(x)$

87. Αν η f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y, τότε $f(-x) = f(x)$. Αν η f είναι επίσης συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, τότε $f(-x) = -f(x)$. Επομένως, $f(x) = -f(x)$ ή $2f(x) = 0$ ή $f(x) = 0$.

91. (α) Υπάρχουν πολλές δυνατότητες, μία εκ των οποίων είναι



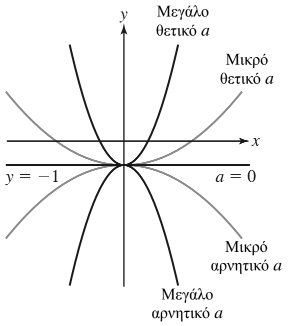
(β) Έστω $g(x) = f(x+a)$. Τότε $g(-x) = f(-x+a) = f(a-x) = f(a+x) = g(x)$

Ενότητα 1.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

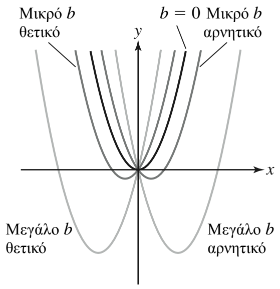
1. -4 **2.** Όχι **3.** Παράλληλη στον άξονα των y όταν $b = 0$. Παράλληλη στον άξονα των x όταν $a = 0$.

4. $\Delta y = 9$ **5.** -4 **6.** $(x-0)^2 + 1$

7. Για $a \neq 0$, κορυφή στο $(0, -1)$. Μεγάλο $a < 0$: ανοίγει πρως τα κάτω, στενό. Μικρό $a < 0$: ανοίγει προς τα κάτω, πιο πλατιά. Στο $a = 0$: οριζόντια ευθεία. Μικρό $a > 0$: ανοίγει προς τα πάνω, πλατιά. Μεγάλο $a > 0$: ανοίγει προς τα πάνω, πιο στενή.

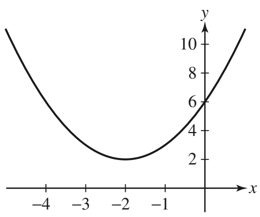


8. Ανοίγει προς τα πάνω με τετμημένες επί την αρχή στα 0 και $-b$. Κορυφή στο $\left(-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4}\right)$. Για $b < 0$, κορυφή στο τέταρτο τεταρτημόριο. Για $b = 0$, κορυφή στην αρχή των αξόνων. Για $b > 0$, κορυφή στο τρίτο τεταρτημόριο.



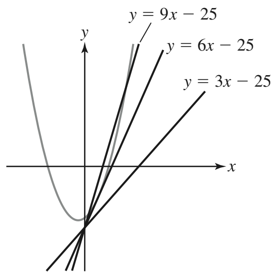
Ενότητα 1.2 Ασκήσεις

1. $m = 3$, $y = 12$, $x = -4$ **3.** $m = -\frac{4}{9}$, $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{3}{4}$ **5.** $m = 3$ **7.** $m = -\frac{3}{4}$ **9.** $y = 3x + 8$ **11.** $y = 3x - 12$
13. $y = -2$ **15.** $y = 3x - 2$ **17.** $5x - 3y = 1$ **19.** $y = 4$ **21.** $y = -2x + 9$ **23.** $3x + 4y = 12$
25. (α) $c = -\frac{1}{4}$ (β) $c = -2$ (γ) Δεν υπάρχει τιμή του c που θα κάνει την κλίση ίση με 0 (δ) $c = 0$
27. (α) $N(P) = -5P + 15{,}000$, (β) Κλίση $= -5$ υπολογιστές/δολάριο. Για κάθε δολάριο αύξησης της τιμής πωλούνται πέντε υπολογιστές λιγότεροι. (γ) $\Delta N = -500$
29. (α) Κλίση $= -70$ σπουδαστές/εβδομάδα. Οι εγγραφές μειώθηκαν κατά 70 σπουδαστές ανά εβδομάδα κατά το φθινόπωρο του 2017. (β) Κλίση $= 3.5$ δολάρια/άτομο. Το κόστος ενοικίασης αυξάνεται κατά 3.5 δολάρια για κάθε άτομο που συμμετέχει.
31. (α) 40.0248 cm (β) 64.9597 cm (γ) $L = 65(1 + \alpha(T - 100))$ **33.** $b = 4$
35. Όχι, επειδή οι κλίσεις για διαδοχικά σημεία δεδομένων δεν είναι ίσες. **37.** (α) 1 ή $-\frac{1}{4}$ (β) $1 \pm \sqrt{2}$
39. Η ελάχιστη τιμή είναι 0 **41.** Η ελάχιστη τιμή είναι -7 **43.** Η μέγιστη τιμή είναι $\frac{137}{16}$
45. Η μέγιστη τιμή είναι $\frac{1}{3}$
47.



49. Παρατηρείται μια διπλή ρίζα όταν $c = \pm 2$. Δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες όταν $-2 < c < 2$.
51. (α) Με την $y = 3x - 25$ δεν υπάρχουν σημεία τομής. Με την $y = 6x - 25$ υπάρχει ένα σημείο τομής στο $(2, -13)$.

Με την $y = 9x - 25$ υπάρχουν σημεία τομής στα $\left(\frac{7-\sqrt{33}}{2}, \frac{13-9\sqrt{33}}{22}\right)$ και $\left(\frac{7+\sqrt{33}}{2}, \frac{13+9\sqrt{33}}{2}\right)$.
(β)



(γ) Όλες έχουν τεταγμένη επί την αρχή -25. Για $c = 0$, οριζόντια. Για $0 \le c < 6$, δεν υπάρχει τομή με την παραβολή. Για $c = 6$, τομή σε ένα σημείο $(2, -13)$. Για $c > 6$, τομή σε δύο σημεία.

53. x **55.** $4 \pm \sqrt{8}$

57. Αν $f(x) = mx + b$ και $g(x) = nx + d$, τότε $f(x) + g(x) = mx + b + nx + d = (m + n)x + (b + d)$, η οποία είναι γραμμική. Η fg δεν είναι γραμμική γενικά.

59. Για x^2, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$

63. $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = x^2 + (-\alpha - \beta)x + \alpha\beta$

Ενότητα 1.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Μια ρητή συνάρτηση είναι το πηλίκο δύο πολυωνύμων. Αμφότερες οι $h(x) = 1$ και $k(x) = x^3 + 1$ είναι πολυώνυμα και $f(x) = \frac{k(x)}{h(x)}$, ενώ $g(x) = \frac{h(x)}{k(x)}$. Επομένως, η $f(x)$ και η $g(x)$ είναι πηλίκα πολυωνύμων και άρα είναι ρητές συναρτήσεις.

2. Η $y = |x|$ δεν είναι πολυώνυμο. Η $y = |x^2 + 1|$ είναι πολυώνυμο.

3. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το κενό σύνολο.

4. Φθίνουσα

5. Ο αριθμητής και ο παρονομαστής αμφότερων των $f(x)$ και $g(x)$ είναι ρίζες πολυωνύμων (σε τρεις περιπτώσεις είναι πολυώνυμα οι ίδιες). Εφόσον το πηλίκο ριζών πολυωνύμων είναι αλγεβρική συνάρτηση, προκύπτει ότι αμφότερες οι f και g είναι αλγεβρικές συναρτήσεις.

6. (α) h (β) k (γ) g (δ) f

Ενότητα 1.3 Ασκήσεις

1. $x \ge 0$ **3.** Όλοι οι πραγματικοί. **5.** $t \ne -2$ **7.** $u \ne \pm 2$ **9.** $x \ne 0, 1$ **11.** $y > 0$ **13.** Πολυώνυμο

15. Αλγεβρική **17.** Υπερβατική **19.** Ρητή **21.** Υπερβατική **23.** Ρητή **25.** Ναι

27. $f(g(x)) = \sqrt{x+1}$, D: $x \ge -1$, $g(f(x)) = \sqrt{x} + 1$, D: $x \ge 0$

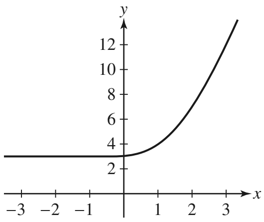
29. $f(g(x)) = 2^{x^2}$, D: $\mathbf{R}$, $g(f(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x}$, D: $\mathbf{R}$

31. $f(g(x)) = \cos(x^3 + x^2)$, D: $\mathbf{R}$, $g(f(\theta)) = \cos^3\theta + \cos^2\theta$, D: $\mathbf{R}$

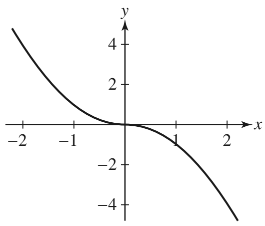
33. $f(g(t)) = \frac{1}{\sqrt{-t^2}}$, D: Δεν ορίζεται για κανένα t, $g(f(t)) = -\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = -\frac{1}{t}$, D: $t > 0$

35. $r(V) = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ και $S(V) = \sqrt[3]{\pi}(6V)^{\frac{2}{3}}$

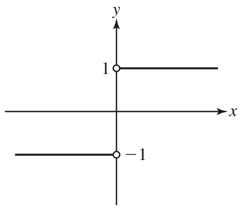
37.



39.



41. (α) Πεδίο ορισμού $= \{x : x \neq 0\}$, πεδίο τιμών $= \{-1, 1\}$
(β)



(γ) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ όταν } x < 0 \\ 1 \text{ όταν } x > 0 \end{cases}$

43. $P(t+10) = 30{\cdot}2^{0.1(t+10)} = 30{\cdot}2^{0.1t+1} = 2(30{\cdot}2^{0.1t}) = 2P(t), g\left(t + \frac{1}{k}\right) = a2^{k(t+1/k)} = a2^{kt+1} = 2a2^{kt} = 2g(t)$
45. $f(x) = x^2$: $\delta f(x) = f(x+1) - f(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$ $f(x) = x$: $\delta f(x) = x + 1 - x = 1$ $f(x) = x^3$: $\delta f(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

47.
$$\begin{aligned} \delta(f+g) &= (f(x+1) + g(x+1)) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x+1) - f(x)) + (g(x+1) - g(x)) = \delta f(x) + \delta g(x) \\ \delta(cf) &= cf(x+1) - cf(x) = c(f(x+1) - f(x)) = c\delta f(x). \end{aligned}$$

Ενότητα 1.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Είναι δυνατό, αν οι στροφές διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.
2. $\frac{9\pi}{4}$ και $\frac{41\pi}{4}$ **3.** $-\frac{5\pi}{3}$ **4.** (α)
5. Έστω ότι O παριστάνει το κέντρο του μοναδιαίου κύκλου και P είναι ένα σημείο στον μοναδιαίο κύκλο τέτοιο ώστε η ακτίνα $\overline{OP}$ σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό άξονα των x. Τότε $\sin\theta$ είναι η τεταγμένη y του σημείου P.
6. Έστω ότι το O παριστάνει το κέντρο του μοναδιαίου κύκλου και έστω ότι P είναι ένα σημείο στον μοναδιαίο κύκλο τέτοιο ώστε η ακτίνα $\overline{OP}$ σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό άξονα των x. Η γωνία $\theta + 2\pi$ λαμβάνεται από τη γωνία θ σχηματίζοντας μια πλήρη περιστροφή πάνω στον κύκλο. Η γωνία $\theta + 2\pi$ θα έχει επομένως την ακτίνα $\overline{OP}$ ως τελική της πλευρά.

Ενότητα 1.4 Ασκήσεις

1. $5\pi/4$ **3.** (α) $\frac{180°}{\pi} \approx 57.3°$ (β) $60°$ (γ) $\frac{75°}{\pi} \approx 23.87°$ $225°$ **5.** $s = r\theta = 3.6$, $s = r\phi = 8$

7.

θ	$(\cos\theta, \sin\theta)$	θ	$(\cos\theta, \sin\theta)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	$\frac{5\pi}{4}$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$(0, -1)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
π	$(-1, 0)$	$\frac{7\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{7\pi}{6}$	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$	$\frac{11\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

9. $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **11.** $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **13.** $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

15.

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sec\theta$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	δεν ορίζεται	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

17. Η υποτείνουσα του τριγώνου θα έχει μήκος $\sqrt{1+c^2}$. **19.** $\sin\theta = \frac{12}{13}$ και $\tan\theta = \frac{12}{5}$
21. $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{53}}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{53}}{7}$ και $\cot\theta = \frac{7}{2}$ **23.** $23/25$ **25.** $\cos\theta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ και $\tan\theta = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$
27. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$
29. Ας αρχίσουμε με τα τέσσερα σημεία στο Σχήμα 22α.

- Το σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο:
$$\sin\theta = 0.918,\quad \cos\theta = 0.3965 \;\text{ και }\; \tan\theta = \frac{0.918}{0.3965} = 2.3153$$
- Το σημείο στο δεύτερο τεταρτημόριο:
$$\sin\theta = 0.3965,\quad \cos\theta = -0.918 \;\text{ και}\tan\theta = \frac{0.3965}{-0.918} = -0.4319$$
- Το σημείο στο τρίτο τεταρτημόριο:
$$\sin\theta = -0.918,\quad \cos\theta = -0.3965 \;\text{ και }\; \tan\theta = \frac{-0.918}{-0.3965} = 2.3153$$
- Το σημείο στο τέταρτο τεταρτημόριο:
$$\sin\theta = -0.3965,\quad \cos\theta = 0.918 \;\text{ και }\; \tan\theta = \frac{-0.3965}{0.918} = -0.4319$$

Θεωρήστε τώρα τα τέσσερα σημεία στο Σχήμα 22β.

- Το σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο:
$$\sin\theta = 0.918,\quad \cos\theta = 0.3965 \;\text{ και }\; \tan\theta = \frac{0.918}{0.3965} = 2.3153$$

- Το σημείο στο δεύτερο τεταρτημόριο:

$$\sin\theta = 0.918, \;\; \cos\theta = -0.3965 \;\text{ και }\; \tan\theta = \frac{0.918}{-0.3965} = -2.3153$$

- Το σημείο στο τρίτο τεταρτημόριο:

$$\sin\theta = -0.918, \;\; \cos\theta = -0.3965 \;\text{ και }\; \tan\theta = \frac{-0.918}{-0.3965} = 2.3153$$

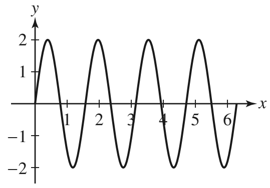
- Το σημείο στο τέταρτο τεταρτημόριο:

$$\sin\theta = -0.918, \;\; \cos\theta = 0.3965 \;\text{ και }\; \tan\theta = \frac{-0.918}{0.3965} = -2.3153$$

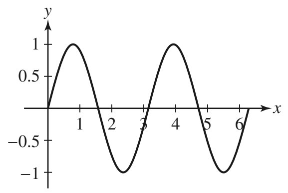
31. $\cos\psi = 0.3$, $\sin\psi = \sqrt{0.91}$, $\cot\psi = \frac{0.3}{\sqrt{0.91}}$ και $\csc\psi = \frac{1}{\sqrt{0.91}}$

33. $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ και $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

35.



37.



39. $3\cos(\theta/2)$, περίοδος 4π, πλάτος 3 **41.** Wolf Point: $L(t) = 12 + 3.9\sin(\frac{2\pi}{365}t)$, την 1η Απριλίου $L(11) \approx 12.73$ ώρες, στις 15 Ιουλίου $L(116) \approx 15.55$ ώρες, την 1η Νοεμβρίου $L(225) \approx 9.39$ ώρες

Πόλη του Μεξικού: $L(t) = 12 + 1.3\sin(\frac{2\pi}{365}t)$, την 1η Απριλίου $L(11) \approx 12.24$ ώρες, στις 15 Ιουλίου $L(116) \approx 13.18$ ώρες, την 1η Νοεμβρίου $L(225) \approx 11.13$ ώρες

43. Αν $|c| > 1$, δεν υπάρχουν σημεία τομής, αν $|c| = 1$, ένα σημείο τομής, αν $|c| < 1$, δύο σημεία τομής.

45. $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ **47.** $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

49. Από την αντίστοιχη σχέση διπλάσιας γωνίας, $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2(\frac{\theta}{2})) = \frac{1-\cos\theta}{2}$.

51. $\cos(\theta+\pi) = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi = \cos\theta(-1) = -\cos\theta$

53. Χρησιμοποιώντας τις Ασκήσεις 50 και 51, $\tan(\pi-\theta) = \dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)} = \dfrac{-\sin(-\theta)}{-\cos(-\theta)} = \dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$.

55. $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{1 + 2\cos^2 x - 1} = \dfrac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

57. $\tan(\theta+\pi) = \dfrac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)} = \dfrac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$ και $\cot(\theta+\pi) = \dfrac{\cos(\theta+\pi)}{\sin(\theta+\pi)} = \dfrac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta$. Επομένως, αμφότερες οι $\tan\theta$ και $\cot\theta$ είναι περιοδικές με περίοδο π.

59. $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, οπότε $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$

61. 16.928 **63.** Χρησιμοποιώντας τις αποστάσεις που σημειώνονται στο Σχήμα 28α, παρατηρούμε ότι η κλίση της ευθείας δίνεται από τον λόγο r/s. Η εφαπτόμενη της γωνίας θ δίνεται από τον ίδιο λόγο. Επομένως, $m = \tan\theta$.

Ενότητα 1.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α), (β), (στ)

2. Πολλοί διαφορετικοί έφηβοι θα έχουν το ίδιο επώνυμο, οπότε αυτή η συνάρτηση δεν θα είναι ένα-προς-ένα.

3. Αυτή η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα και $f^{-1}(6{:}27) = \text{Hamilton Township}$.

4. Η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης είναι η ανάκλαση της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ ως προς την ευθεία $y = x$.

5. (β) και (γ) **6.** $\theta = 3\pi$, όχι

Ενότητα 1.5 Ασκήσεις

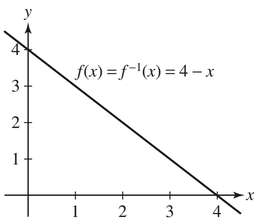
1. $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{7}$ **3.** $[-\pi/2, \pi/2]$

5.

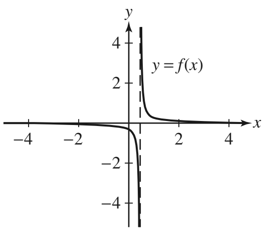
- $f(g(x)) = \left((x-3)^{1/3}\right)^3 + 3 = x - 3 + 3 = x$
- $g(f(x)) = \left(x^3 + 3 - 3\right)^{1/3} = \left(x^3\right)^{1/3} = x$

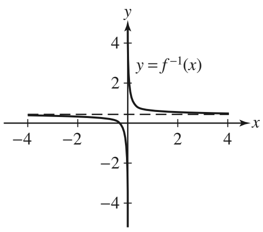
7. $R(v) = \frac{2GM}{v^2}$ **9.** $r(V) = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$

11. $f^{-1}(x) = 4 - x$

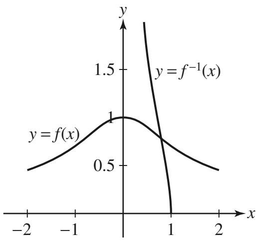


13. $f^{-1}(x) = \frac{1}{7x} + \frac{3}{7}$

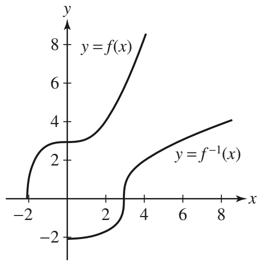




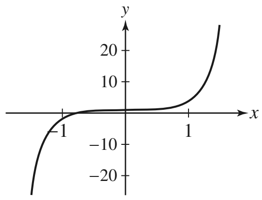
15. Πεδίο ορισμού $\{x : x \geq 0\}$: $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, πεδίο ορισμού $\{x : x \leq 0\}$: $f^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



17. $f^{-1}(x) = (x^2 - 9)^{1/3}$

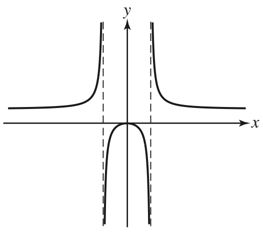


19. Σχήματα (Β) και (Γ)
21. (α)



(β) $(-\infty, \infty)$ (γ) $f^{-1}(3) = 1$
23. Πεδίο ορισμού $x \le 1$: $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$, πεδίο ορισμού $x \ge 1$: $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

25. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{όταν } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{όταν } x \ge 0 \end{cases}$
27. Η f δεν είναι ένα-προς-ένα. **29.** 0 **31.** $\frac{\pi}{4}$ **33.** $\frac{\pi}{3}$ **35.** $\frac{\pi}{3}$ **37.** $\frac{\pi}{2}$ **39.** $-\frac{\pi}{4}$ **41.** π **43.** Δεν ορίζεται
45. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **47.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **49.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **51.** $\frac{4}{3}$ **53.** $\sqrt{3}$ **55.** $\frac{1}{20}$
57. (α) Από τη γραφική παράσταση της f, το κριτήριο της οριζόντιας ευθείας επιβεβαιώνει ότι η f δεν είναι ένα-προς-ένα και επομένως δεν είναι αντιστρέψιμη.



Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού στο $[0, \infty)$, το κριτήριο της οριζόντιας ευθείας επιβεβαιώνει ότι η f είναι ένα-προς-ένα και επομένως είναι αντιστρέψιμη. (β) Η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ είναι η αντίστροφη της f περιορισμένης στο $[0, \infty)$.

Ενότητα 1.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Για $0 < x < 1$ **2.** Το $\ln(-3)$ δεν ορίζεται. **3.** Αυτή η φράση είναι μια λεκτική περιγραφή της γενικής ιδιότητας των λογαρίθμων, η οποία αναφέρει ότι $\log(ab) = \log a + \log b$.
4. D: $x > 0$, R: πραγματικοί αριθμοί.
5. Παρατηρήστε ότι $f(1) = 1$, $f(2) = 8$ και $f(3) = 27$. Καθώς το x αυξάνεται κατά 1, από το 1 στο 2, η f αυξάνεται κατά 700% και καθώς το x αυξάνεται κατά 1, από το 2 στο 3, η f αυξάνεται κατά 237.5%. Εφόσον αυτές οι ποσοστιαίες μεταβολές της f δεν είναι ίσες ενώ οι μεταβολές του x είναι, η f δεν αυξάνεται εκθετικά.
6. $\log_{b^2}(b^4) = 2$ **7.** $f(x) = \cosh x$ και $f(x) = \operatorname{sech} x$ **8.** $f(x) = \sinh x$ και $f(x) = \tanh x$

9. Αμφότερα τα είδη των συναρτήσεων έχουν την ίδια ομοτιμία, έχουν παρόμοιες ταυτότητες και οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκονται σε έναν κύκλο, ενώ αυτές των υπερβολικών συναρτήσεων βρίσκονται σε μια υπερβολή.

Ενότητα 1.6 Ασκήσεις

1. $x = 1$ **3.** $x = -1/2$ **5.** $x = -1/3$ **7.** $k = 9$ **9.** 3 **11.** 0 **13.** $\frac{5}{3}$ **15.** $\frac{1}{3}$ **17.** $\frac{5}{6}$ **19.** 1 **21.** 7 **23.** 29
25. (α) $\ln 1600$ (β) $\ln(9x^{7/2})$ **27.** $t = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{100}{7}\right)$ **29.** $x = -1$ ή $x = 3$ **31.** $x = e$ **33.** $y = (3 + \ln x)/2$

35.

x	-3	0	5
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	-10.0179	0	74.203
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	10.0677	1	74.210

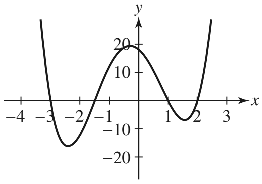
37. $\ln(2\cdot 1) \neq (\ln 2)(\ln 1)$ **39.** $\tanh(-x) = \dfrac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$
41. (α) $I(D) = 10^{\frac{D-120}{10}}$ (β) Υποθέστε ότι το D αυξάνεται κατά 20 πηγαίνοντας από D_1 σε D_2 και $I_1 = I(D_1)$, $I_2 = I(D_2)$. Τότε $I_2 = 10^{\frac{D_2-120}{10}} = 10^{\frac{D_1+20-120}{10}} = 10^{2+\frac{D_1-120}{10}} = 10^2 10^{\frac{D_1-120}{10}} = 100I(D_1) = 100I_1$. Εφόσον $I_2 = 100I_1$, το I αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 100. Επομένως, όταν το D αυξάνεται κατά 20, το I αυξάνεται κατά έναν παράγοντα 100.
43. (α) Από τον νόμο του Γαλιλαίου $w = 500 + 10 = 510$ m/s. Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Αϊνστάιν,
$w = c\cdot\tanh(1.7\times 10^{-6}) \approx 510$ m/s.
(β) Από τον νόμο του Γαλιλαίου $u + v = 10^7 + 10^6 = 1.1\times 10^7$ m/s.
Από τον νόμο του Αϊνστάιν $w \approx c\cdot\tanh(0.036679) \approx 1.09988\times 10^7$ m/s.
45. Έστω $y = \log_b x$. Τότε $x = b^y$ και $\log_a x = \log_a b^y = y\log_a b$. Επομένως, $y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.
48. $13\cosh x - 3\sinh x$

Ενότητα 1.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Είναι προτιμότερο να πειραματιστείτε.
2. (α) Η οθόνη δεν θα δείχνει τίποτα. (β) Η οθόνη θα δείχνει το τμήμα της παραβολής μεταξύ των σημείων $(0, 3)$ και $(1, 4)$.
3. Όχι.
4. Πειραματιστείτε με το παράθυρο θέασης για να εστιάσετε στο χαμηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Η τετμημένη y του χαμηλότερου σημείου είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

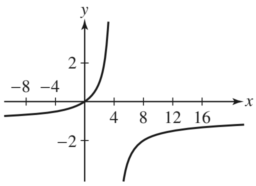
Ενότητα 1.7 Ασκήσεις

1.

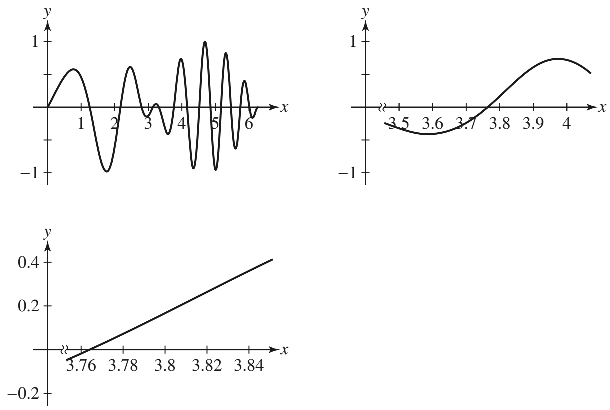


$x = -3$, $x = -1.5$, $x = 1$ και $x = 2$ **3.** Δύο θετικές λύσεις. **5.** Δεν υπάρχουν λύσεις. **7.** Τίποτα. Ένα κατάλληλο παράθυρο θέασης: $[50, 150]$ επί $[1000, 2000]$

9.

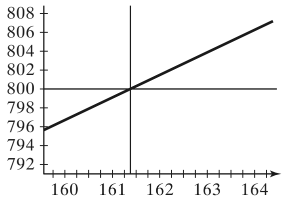


11.



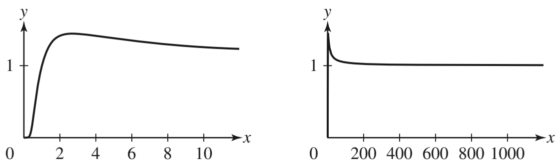
13. Το μέγιστο είναι περίπου 0.604 και παρατηρείται στο $x \approx -0.716$.

15. $N \approx 161$



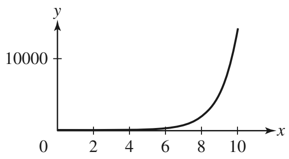
17. Ο πίνακας και οι γραφικές παραστάσεις παρακάτω υποδεικνύουν ότι καθώς το n μεγαλώνει, το $n^{1/n}$ τείνει στο 1.

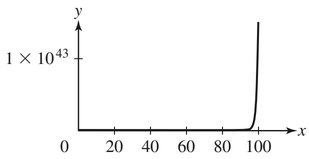
n	$n^{1/n}$
10	1.258925412
10^2	1.047128548
10^3	1.006931669
10^4	1.000921458
10^5	1.000115136
10^6	1.000013816



19. Ο πίνακας και οι γραφικές παραστάσεις παρακάτω υποδεικνύουν ότι καθώς το n μεγαλώνει, η $f(n)$ τείνει στο ∞.

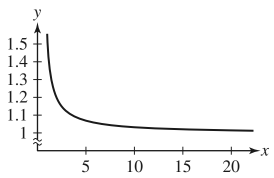
n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
10	13780.61234
10^2	$1.635828711 \times 10^{43}$
10^3	$1.195306603 \times 10^{434}$
10^4	$5.341783312 \times 10^{4342}$
10^5	$1.702333054 \times 10^{43429}$
10^6	$1.839738749 \times 10^{434294}$

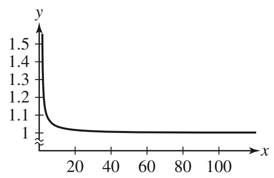




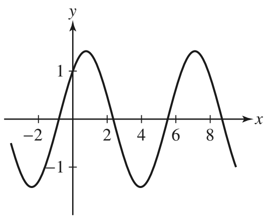
21. Ο πίνακας και οι γραφικές παραστάσεις παρακάτω υποδεικνύουν ότι καθώς το x μεγαλώνει, η $f(x)$ τείνει στο 1.

x	$\left(x \tan \frac{1}{x}\right)^{x}$
10	1.033975758
10^2	1.003338973
10^3	1.000333389
10^4	1.000033334
10^5	1.000003333
10^6	1.000000333

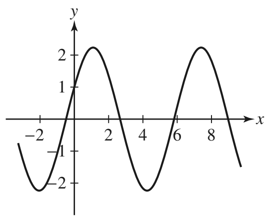




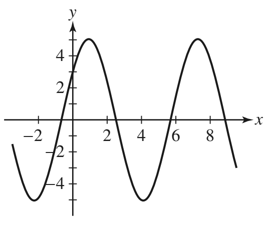
23.



$(A, B) = (1, 1)$



$(A, B) = (1, 2)$



$(A, B) = (3, 4)$

25. $x \in (-2, 0) \cup (3, \infty)$

27.

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+1) + \frac{x}{\frac{1}{2}(x+1)}\right) = \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)} \\
f_4(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+6x+1}{4(x+1)} + \frac{x}{\frac{x^2+6x+1}{4(x+1)}}\right) = \frac{x^4+28x^3+70x^2+28x+1}{8(1+x)(1+6x+x^2)}
\end{aligned}
$$

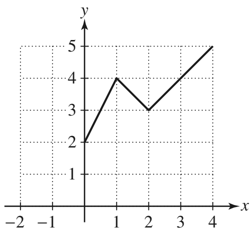
και

$$
f_5(x) = \frac{1+120x+1820x^2+8008x^3+12870x^4+8008x^5+1820x^6+120x^7+x^8}{16(1+x)(1+6x+x^2)(1+28x+70x^2+28x^3+x^4)}
$$

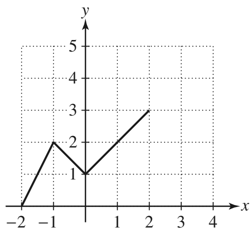
Φαίνεται ότι η f_n είναι ασύμπτωτη της $\sqrt{x}$.

Κεφάλαιο 1 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. (α) Δεν αντιστοιχεί (β) Δεν αντιστοιχεί (γ) (i) (δ) (iii) **3.** $\{x : |x-7| < 3\}$ **5.** $[-5,-1] \cup [3,7]$
7. $(x,0)$ με $x \geq 0$, $(0,y)$ με $y < 0$
9.

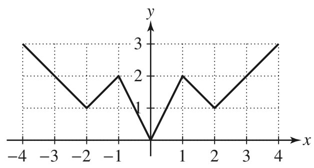


$y = f(x) + 2$



$y = f(x+2)$

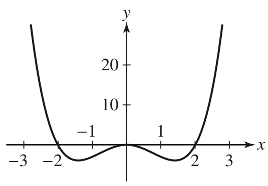
11.



13. D: $\{x : x \geq -1\}$, R: $\{y : y \geq 0\}$ **15.** D: $\{x : x \neq 3\}$, R: $\{y : y \neq 0\}$

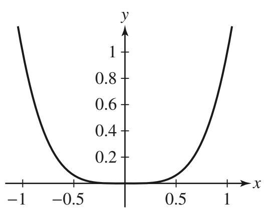
17. (α) Φθίνουσα (β) Τίποτα από τα δύο (γ) Τίποτα από τα δύο (δ) Αύξουσα
19. $2x - 3y = -14$ **21.** $6x - y = 53$ **23.** $x + 3y = 5$ **25.** $x + y = 5$ **27.** Ναι
29. (α) $C(P) - 2250P + 1{,}225{,}000$ (β) Κλίση $= -2250$ πελάτες/δολάριο. Για κάθε δολάριο αύξησης στη μηνιαία τιμή, υπάρχουν 2250 λιγότεροι πελάτες. (γ) 225,000 πελάτες.

31. Ρίζες: $x = -2$, $x = 0$ και $x = 2$, φθίνουσα: $x < -1.4$ και $0 < x < 1.4$

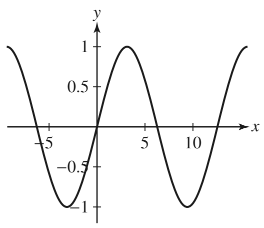


33. $f(x) = 10x^2 + 2x + 5$, η ελάχιστη τιμή είναι $\frac{49}{10}$.

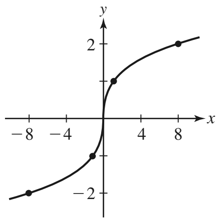
35.



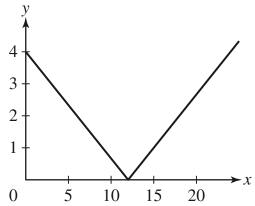
37.



39.



41. Έστω $g(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$.Τότε $g(x-3b) = f\left(\frac{1}{3}(x-3b)\right) = f\left(\frac{1}{3}x - b\right)$. Η γραφική παράσταση της $y = \left|\frac{1}{3}x - 4\right|$:



43. $f(t) = t^4$ και $g(t) = 12t + 9$ **45.** (α) π (β) 4π (γ) 4π **47.** $A = 1.5, B = \pi/12, C = 16.5$
49. (α) $a = b = \pi/2$ (β) $a = \pi$ **51.** $x = \pi/2$, $x = 7\pi/6$, $x = 3\pi/2$ και $x = 11\pi/6$
53. Δεν υπάρχουν λύσεις. **55.** (α) (ii) (β) Δεν αντιστοιχεί (γ) (iii) (δ) Δεν αντιστοιχεί
57. $10\log_{10} 5000 \approx 36.99$ decibels περισσότερο **59.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+8}$, D: $\{x : x \geq 0\}$, R: $\{y : y \geq 2\}$
61. Για $\{t : t \leq 3\}$, $h^{-1}(t) = 3 - \sqrt{t}$. Για $t \geq 3$, $h^{-1}(t) = 3 + \sqrt{t}$.

63. (α) Ναι (β) Ναι $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{όταν } x < 0 \\ x & \text{όταν } x \geq 0 \end{cases}$

65. (α) (iii) (β) (iv) (ii) (i)

Κεφάλαιο 2

Ενότητα 2.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Η γραφική παράσταση της θέσης ως συνάρτηση του χρόνου.
2. Όχι. Η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται ως το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το χρονικό διάστημα που περνά τείνει στο μηδέν.
3. (α) 63 mi/h (β) 42 mi/h (γ) 0 mi/h
4. Η κλίση της ευθείας που είναι εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της θέσης συναρτήσει του χρόνου για $t = t_0$.

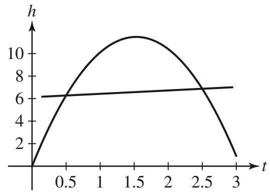
Ενότητα 2.1 Ασκήσεις

1. (α) 11.025 m (β) 22.05 m/s (γ)

Χρονικό διάστημα	$[2, 2.01]$	$[2, 2.005]$	$[2, 2.001]$	$[2, 2.00001]$
Μέση ταχύτητα	19.649	19.6245	19.6049	19.600049

Η στιγμιαία ταχύτητα για $t = 2$ είναι 19.6 m/s. **3.** Μέση ταχύτητα $=$ 22 km/h, στιγμιαία ταχύτητα $=$ 22 km/h
5. Μέση ταχύτητα $=$ 17.1 m/s, εκτίμηση στιγμιαίας ταχύτητας: 11.4 m/s

7. 0.3 m/s



9. Μέση ταχύτητα $= 56$, εκτίμηση στιγμιαίας ταχύτητας: 24.0 **11.** Εκτίμηση κλίσης εφαπτόμενης ευθείας: 1.0

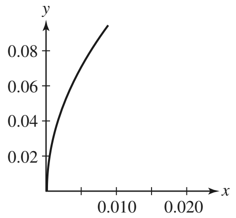
13. 12 **15.** 0.75 **17.** 15.15 **19.** 2.0 **21.** 18.85 cm/s

23. (α)

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001
Κλίση τέμνουσας από το 0 στο *x*	1	3.16	10	31.62	100

(β) Η εφαπτόμενη ευθεία είναι κάθετη.

(γ)



25. (B)

27. Η κλίση της τέμνουσας στο $[1, t]$ είναι $t + 1$, εκτίμηση της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας: 2, η κλίση της τέμνουσας στο $[2, t]$ είναι $t + 2$, εκτίμηση της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας: 4.

29. Η τέμνουσα ευθεία στο $[-3, x]$ έχει κλίση $\frac{x^3+27}{x+3} = \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} = x^2 - 3x + 9$. Η εκτίμηση της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας είναι 27.

31. (α) Με 2 υποδιαστήματα το συνολικό εμβαδόν του ορθογωνίου $= 9/16$. Με 3 υποδιαστήματα το συνολικό εμβαδόν του ορθογωνίου $= 4/9$. Με 5 υποδιαστήματα το συνολικό εμβαδόν του ορθογωνίου $= 9/25$. Με 10 υποδιαστήματα το συνολικό εμβαδόν του ορθογωνίου $= 0.3025$. (β) $A(2) = 9/16$, $A(3) = 4/9$, $A(5) = 9/25$, $A(10) = 0.3025$ (γ) $A(100) = 0.255025$, $A(1000) = 0.25050025$, $A(10,000) = 0.2500500025$, υπόθεση $A = 1/4$.

Ενότητα 2.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. 1

2. π

3. 20

4. Ναι, $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ στο $c = 3$.

5. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$

6. Όχι, επειδή το $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ μπορεί να μην είναι ίσο με το $\lim_{x\to 5^+} f(x)$. **7.** Ναι

Ενότητα 2.2 Ασκήσεις

1.

x	0.998	0.999	0.9995	0.99999
$f(x)$	1.498501	1.499250	1.499625	1.499993

x	1.00001	1.0005	1.001	1.002
$f(x)$	1.500008	1.500375	1.500750	1.501500

Το όριο καθώς $x \to 1$ είναι $\frac{3}{2}$.

3.

y	1.998	1.999	1.9999
$f(y)$	0.59984	0.59992	0.599992

y	2.0001	2.001	2.002
$f(y)$	0.600008	0.60008	0.60016

Το όριο καθώς $y \to 2$ είναι $\frac{3}{5}$.

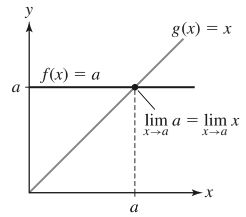
5.

t	$f(t)$	t	$f(t)$
0.002	0.004	-0.002	-0.004
0.001	0.002	-0.001	-0.002
0.0005	0.001	-0.0005	-0.001
0.00001	0.00002	-0.00001	-0.00002

Εκτίμηση ορίου: 0

7. 1.5 **9.** 21

11.



13. $|3x - 12| = 3|x - 4|$ **15.** $|(5x + 2) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|$

17. Υποθέστε ότι $|x| < 1$ έτσι ώστε $|x^2 - 0| = |x + 0||x - 0| = |x||x| < |x|$.

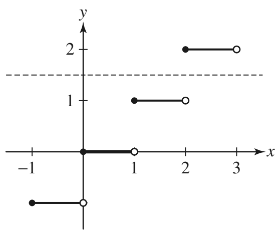
19. Αν $|x| < 1$, η $|4x+2|$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 6, οπότε $|4x^2+2x+5-5| = |4x^2+2x| = |x||4x+2| < 6|x|$.

21. $\frac{1}{2}$ **23.** $\frac{5}{3}$ **25.** 2 **27.** 1 **29.** 0

31. Καθώς $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$. Ομοίως, καθώς $x \to 4^+$, $f(x) \to \infty$. **33.** $-1/5$ **35.** $-\infty$ **37.** 0 **39.** 1

41. 2.718 (Η ακριβής απάντηση είναι e.) **43.** ∞

45.



(α) $c - 1$ (β) c (γ) 2

47. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ **49.** $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{6}$

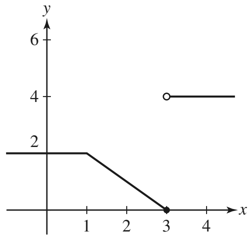
51. $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{4x^2+7}{x^3+8} = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{4x^2+7}{x^3+8} = \infty$ **53.** $\lim_{x\to 1^\pm} \dfrac{x^5+x-2}{x^2+x-2} = 2$

55.

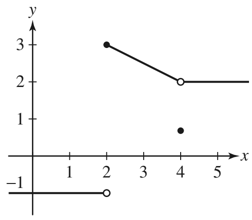
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$.
- $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 10$.

Οι κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι οι κατακόρυφες ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

57.



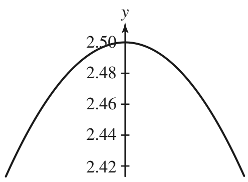
59.



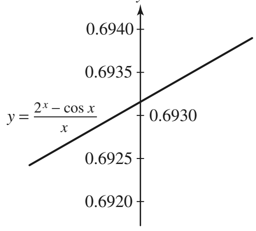
61.

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$
- $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$
- $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x\to 5^+} f(x) = -3$
- $\lim_{x\to 6^-} f(x) = \lim_{x\to 6^+} f(x) = \infty$

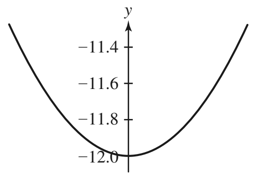
63. $\frac{5}{2}$



65. 0.693 (Η ακριβής απάντηση είναι ln 2.)



67. -12

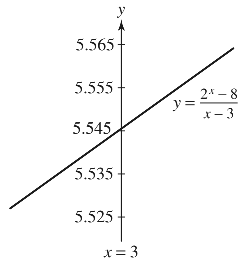


69. Για n άρτιο.

71. (α) Όχι (β) $f(\frac{1}{2n}) = 1$ για όλους τους ακεραίους n (γ) Στο $x = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$, η τιμή της $f(x)$ είναι πάντα -1.

73. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin n\theta}{\theta} = n$ **74.** $\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1} = \dfrac{n}{m}$

76. (α)



(β) $L = 5.545$

Ενότητα 2.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Υποθέστε ότι τα $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ υπάρχουν και τα δύο. Ο κανόνας του αθροίσματος δίνει

$$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

Υπό την προϋπόθεση ότι $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$, ο κανόνας του πηλίκου αναφέρει ότι

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$$

2. (β) **3.** (α)

Ενότητα 2.3 Ασκήσεις

1. 9 **3.** $\frac{1}{16}$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** 4.6 **9.** 1 **11.** 9 **13.** 1/8 **15.** $-\frac{2}{5}$ **17.** 10 **19.** $\frac{1}{5}$ **21.** $\frac{1}{5}$ **23.** $\frac{2}{5}$ **25.** 64

27. $\lim\limits_{x\to c} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{\left(\lim\limits_{x\to c} 1\right)}{\left(\lim\limits_{x\to c} (f(x))\right)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ **29.** 3 **31.** $\frac{1}{16}$ **33.** Όχι.

35. (α) 0 (β) $2/\pi$ (γ) Το όριο δεν υπάρχει. (δ) 0 **37.** $f(x) = 1/x$ και $g(x) = -1/x$.

39. $f(x) = 1/x$ και $g(x) = -1/x$. **41.** Γράψτε $g(t) = \frac{tg(t)}{t}$. **43.** (β)

Ενότητα 2.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Συνέχεια. **2.** $f(3) = \frac{1}{2}$ **3.** Όχι. **4.** Όχι, ναι.

5. (α) Λάθος. Η σωστή πρόταση είναι «Η f είναι συνεχής στο $x = a$ αν τα όρια από αριστερά και από δεξιά της

$f(x)$ καθώς $x \to a$ υπάρχουν και είναι ίσα με $f(a)$». (β) Σωστό (γ) Λάθος. Η σωστή πρόταση είναι «Αν τα όρια από αριστερά και από δεξιά της $f(x)$ καθώς $x \to a$ είναι ίσα μεταξύ τους αλλά δεν είναι ίσα με $f(a)$, τότε η f έχει αιρόμενη ασυνέχεια στο $x = a$».
6. Σωστό (δ) Λάθος. Η σωστή πρόταση είναι «Αν η f και η g είναι συνεχείς στο $x = a$ και $g(a) \neq 0$, τότε η f/g είναι συνεχής στο $x = a$».

Ενότητα 2.4 Ασκήσεις

1.
• Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο $x = 1$. Είναι συνεχής από αριστερά εκεί.
• Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο $x = 3$. Δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά εκεί.
• Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο $x = 5$. Είναι συνεχής από αριστερά εκεί.
Καμία από αυτές τις ασυνέχειες δεν είναι αιρόμενη.
3. $x = 3$, επαναπροσδιορίζουμε $g(3) = 4$.
5. Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο $x = 0$, όπου $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$. Η συνάρτηση f είναι επίσης ασυνεχής στο $x = 2$, όπου $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 6$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 6$. Η ασυνέχεια στο $x = 2$ είναι αιρόμενη. Ορίζοντας $f(2) = 6$ κάνει την f συνεχή στο $x = 2$.
7. Η $y = x$ και η $y = \sin x$ είναι συνεχείς. Το ίδιο ισχύει και για την $f(x) = x + \sin x$ από τον κανόνα συνέχειας (i).
9. Εφόσον η $y = x$ και η $y = \sin x$ είναι συνεχείς, το ίδιο ισχύει και για τις $y = 3x$ και $y = 4\sin x$ από τον κανόνα συνέχειας (ii). Επομένως, η $f(x) = 3x + 4\sin x$ είναι συνεχής από τον κανόνα συνέχειας (i).
11. Εφόσον η $y = x$ είναι συνεχής, το ίδιο ισχύει και για την $y = x^2$ από τον κανόνα συνέχειας (iii). Θυμηθείτε ότι οι σταθερές συναρτήσεις, όπως η 1, είναι συνεχείς. Επομένως, η $y = x^2 + 1$ είναι συνεχής από τον κανόνα συνέχειας (i). Τέλος, η $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής από τον κανόνα συνέχειας (iv) επειδή η $x^2 + 1$ δεν είναι ποτέ 0.
13. Η συνάρτηση f αποτελεί σύνθεση δύο συνεχών συναρτήσεων: της $y = \cos x$ και της $y = x^2$, οπότε η f είναι συνεχής από το Θεώρημα 5.
15. Οι συναρτήσεις $g(x) = 3^x$ και $h(x) = \cos 3x$ είναι συνεχείς (η δεύτερη από το Θεώρημα 5 αφού είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων). Επειδή η f είναι το γινόμενο των g και h, το Θεώρημα 1 (iii) συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής.
17. Ασυνεχής στο $x = 0$, στο οποίο υπάρχει άπειρη ασυνέχεια. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά στο $x = 0$.
19. Ασυνεχής στο $x = 1$, στο οποίο υπάρχει άπειρη ασυνέχεια. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά στο $x = 1$.
21. Ασυνεχής για άρτιους ακεραίους, στους οποίους υπάρχουν ασυνέχειες άλματος. Η συνάρτηση είναι συνεχής από δεξιά στους άρτιους ακεραίους αλλά δεν είναι συνεχής από αριστερά.
23. Άπειρες ασυνέχειες στα $x = \pm 2$. Η h δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά και στα δύο αυτά σημεία.
25. Ασυνέχεια στο $x = \frac{1}{2}$, στο οποίο υπάρχει άπειρη ασυνέχεια. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ούτε από δεξιά ούτε από αριστερά στο $x = \frac{1}{2}$.
27. Συνεχής για κάθε x.
29. Ασυνέχεια άλματος στο $x = 2$. Η συνάρτηση είναι συνεχής από αριστερά στο $x = 2$ αλλά όχι από δεξιά.
31. Αιρόμενη ασυνέχεια στο $x = -5$. Η f δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά στο $x = -5$.
33. Ασυνεχής όταν $t = \frac{(2n+1)\pi}{4}$, όπου n είναι ακέραιος. Για κάθε τέτοια τιμή του t υπάρχει άπειρη ασυνέχεια. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά σε οποιοδήποτε από αυτά τα σημεία ασυνέχειας.
35. Συνεχής παντού.

37. Ασυνεχής στο $x = 0$, στο οποίο υπάρχει άπειρη ασυνέχεια. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά στο $x = 0$.

39. Το πεδίο ορισμού είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Τόσο η $y = \sin x$ όσο και η $y = \cos x$ είναι συνεχείς σε αυτό το πεδίο ορισμού, οπότε η $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ είναι συνεχής σύμφωνα με τους κανόνες συνέχειας (i) και (ii).

41. Το πεδίο ορισμού είναι $x \geq 0$. Αφού οι $y = \sqrt{x}$ και $y = \sin x$ είναι συνεχείς, το ίδιο ισχύει και για την $f(x) = \sqrt{x}\sin x$ από τον κανόνα συνέχειας (iii).

43. Το πεδίο ορισμού είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Τόσο η $y = x^{2/3}$ όσο και η $y = 2^x$ είναι συνεχείς σε αυτό το πεδίο ορισμού, οπότε η $f(x) = x^{2/3}2^x$ είναι συνεχής σύμφωνα με τον κανόνα συνέχειας (iii).

45. Το πεδίο ορισμού είναι $x \neq 0$. Επειδή η συνάρτηση $y = x^{4/3}$ είναι συνεχής και μη μηδενική για $x \neq 0$, η $f(x) = x^{-4/3}$ είναι συνεχής για $x \neq 0$ από τον κανόνα συνέχειας (iv).

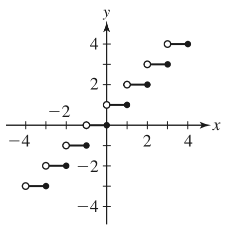
47. Το πεδίο ορισμού είναι όλα τα $x \neq \pm(2n-1)\pi/2$, όπου n είναι θετικός ακέραιος. Επειδή η $y = \tan x$ είναι συνεχής σε αυτό το πεδίο ορισμού, από τον κανόνα συνέχειας (iii) προκύπτει ότι η $f(x) = \tan^2 x$ είναι επίσης συνεχής σε αυτό το πεδίο ορισμού.

49. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = (x^4+1)^{3/2}$ είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Επειδή η $y = x^{3/2}$ και το πολυώνυμο $y = x^4 + 1$ είναι και τα δύο συνεχή, το ίδιο ισχύει και για τη σύνθετη συνάρτηση $f(x) = (x^4+1)^{3/2}$.

51. Το πεδίο ορισμού είναι όλα τα $x \neq \pm 1$. Επειδή οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = x^2$ είναι συνεχείς σε αυτό το πεδίο ορισμού, το ίδιο ισχύει και για τη σύνθετη συνάρτηση $y = \cos(x^2)$. Τέλος, επειδή το πολυώνυμο $y = x^2 - 1$ είναι συνεχές και μη μηδενικό για $x \neq \pm 1$, η συνάρτηση $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x^2-1}$ είναι συνεχής σύμφωνα με τον κανόνα συνέχειας (iv).

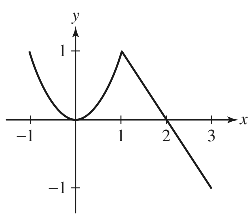
53. Δεξιό όριο στο $x = 1$: 9, αριστερό όριο στο $x = 1$: 4, αριστερό και δεξιό όριο στο $x = 2$: 8, η f είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 1$, η f είναι συνεχής στο $x = 2$.

55.

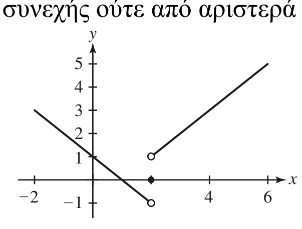


Η f έχει ασυνέχεια άλματος στο $x = n$ για κάθε ακέραιο n. Σε κάθε ασυνέχεια η f είναι συνεχής από αριστερά.

57. Η συνάρτηση f είναι συνεχής παντού.

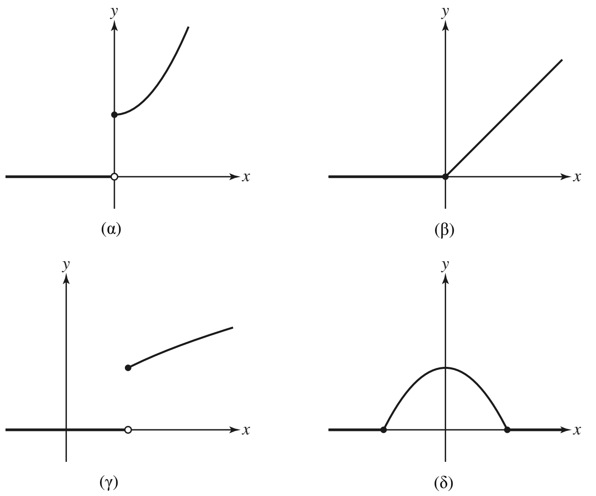


59. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά στο $x = 2$.



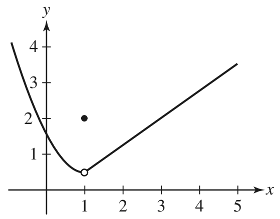
61. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8 \neq 10 = f(4)$

63.

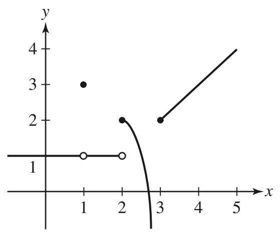


Η f είναι συνεχής στα (β) και (δ). Η f έχει ασυνέχεια στο $x = 0$ στο (α). Η f έχει ασυνέχεια στο $x = 2$ στο (γ).
65. $c = \frac{5}{3}$ **67.** $a = 2$ και $b = 1$ **69.** (α) Όχι (β) $g(1) = -\frac{\pi}{2}$

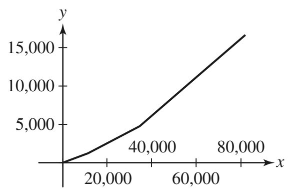
71.



73.



75. -6 **77.** $\frac{1}{3}$ **79.** -1 **81.** $\frac{1}{32}$ **83.** 27 **85.** 1000 **87.** $\frac{\pi}{2}$ **89.** Όχι. Θεωρήστε τις $f(x) = -x^{-1}$ και $g(x) = x^{-1}$.
91. Η $f(x) = |g(x)|$ αποτελεί σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων g και $y = |x|$.
93. Όχι



95. $f(x) = 3$ και $g(x) = \lfloor x \rfloor$ **97.** Σε αυτή την περίπτωση η $y = f(x)^2$ είναι η σταθερή συνάρτηση 1.

Ενότητα 2.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$ **2.** (α) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (β) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (γ) $f(x) = \frac{1}{x}$

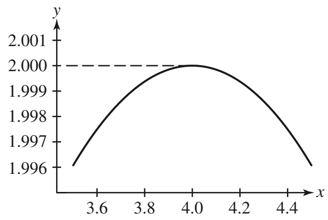
3. Η στρατηγική της απλοποίησης και της εισαγωγής βασίζεται στην απλοποίηση μιας απροσδιόριστης συνάρτησης σε κάποια που είναι συνεχής. Αφού γίνει η απλοποίηση, το όριο της συνάρτησης που απομένει προκύπτει με απευθείας υπολογισμό.

Ενότητα 2.5 Ασκήσεις

1. $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-36}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{(x-6)(x+6)}{x-6} = \lim_{x\to 6}(x+6) = 12$ **3.** 0 **5.** $\frac{1}{14}$ **7.** -1 **9.** $\frac{11}{10}$ **11.** 2 **13.** 1
15. 2 **17.** $\frac{1}{8}$ **19.** $-\frac{1}{4}$
21. Το όριο δεν υπάρχει.

- Καθώς $h \to 0+$, $\dfrac{\sqrt{h+2}-2}{h} \to -\infty$.
- Καθώς $h \to 0-$, $\dfrac{\sqrt{h+2}-2}{h} \to \infty$.

23. 2 **25.** $\frac{1}{4}$ **27.** 1 **29.** $-\frac{1}{2}$ **31.** 9 **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** -1, δεν υπάρχει, 0.
37. Εκτίμηση μέγιστου ύψους: 183.67 m.
39. $\lim_{x\to 4} f(x) \approx 2.00$, με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, αυτή η τιμή ταιριάζει με την τιμή 2 που πήραμε στην Άσκηση 23.



41. 12 **43.** -1 **45.** $\frac{4}{3}$ **47.** $2a$ **49.** $-4+5a$ **51.** $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ **53.** $3a^2$ **55.** $\frac{1}{4}$ **57.** $c=-1$ και $c=6$ **59.** $c=3$ **61.** $+$

Ενότητα 2.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, όχι.
2. Έστω ότι για $x \neq c$ (σε κάποιο διάστημα που περιέχει το c), $l(x) \le f(x) \le u(x)$ και ότι $\lim_{x\to c} l(x) = \lim_{x\to c} u(x) = L$. Τότε το $\lim_{x\to c} f(x)$ υπάρχει και $\lim_{x\to c} f(x) = L$.
3. (α)

Ενότητα 2.6 Ασκήσεις

1. $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$ **3.** $\lim_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{\pi}{x-1} = 0$ **5.** $\lim_{t\to 0}(2^t-1)\cos\frac{1}{t} = 0$ **7.** $\lim_{t\to 2}(t^2-4)\cos\frac{1}{t-2} = 0$
9. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos(\tan\theta) = 0$
11. Για κάθε $x \neq 1$ στο ανοικτό διάστημα $(0,2)$ που περιέχει το $x=1$, $\ell(x) \le f(x) \le u(x)$. Επιπλέον, $\lim_{x\to 1}\ell(x) = \lim_{x\to 1} u(x) = 2$. Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.
13. $\lim_{x\to 7} f(x) = 6$, όχι.
15. (α) *Δεν υπάρχουν επαρκείς πληροφορίες* (β) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ (γ) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

17. 1 **19.** 3 **21.** 1 **23.** 0 **25.** $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ **27.** 11 **29.** 9 **31.** $\frac{1}{5}$ **33.** $\frac{7}{3}$ **35.** $\frac{1}{25}$ **37.** 6 **39.** $-\frac{3}{4}$ **41.** $\frac{1}{2}$ **43.** $\frac{6}{5}$

45. 0 **47.** 0 **49.** 0 **51.** $-\frac{9}{2}$ **53.** $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos t}}{t} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-\cos t}}{t} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, δεν υπάρχει

55. (α)

x	$c-0.01$	$c-0.001$	$c+0.001$	$c+0.01$
$\dfrac{\sin x - \sin c}{x-c}$	0.999983	0.99999983	0.99999983	0.999983

Εδώ $c = 0$ και $\cos c = 1$

x	$c-0.01$	$c-0.001$	$c+0.001$	$c+0.01$
$\dfrac{\sin x - \sin c}{x-c}$	0.868511	0.866275	0.865775	0.863511

Εδώ $c = \frac{\pi}{6}$ και $\cos c = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866025$

x	$c-0.01$	$c-0.001$	$c+0.001$	$c+0.01$
$\dfrac{\sin x - \sin c}{x-c}$	0.504322	0.500433	0.499567	0.495662

Εδώ $c = \frac{\pi}{3}$ και $\cos c = \frac{1}{2}$

x	$c-0.01$	$c-0.001$	$c+0.001$	$c+0.01$
$\dfrac{\sin x - \sin c}{x-c}$	0.710631	0.707460	0.706753	0.703559

Εδώ $c = \frac{\pi}{4}$ και $\cos c = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707107$

x	$c-.01$	$c-.001$	$c+.001$	$c+.01$
$\dfrac{\sin x - \sin c}{x-c}$	0.005000	0.000500	-0.000500	-0.005000

Εδώ $c = \frac{\pi}{2}$ και $\cos c = 0$

(β) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{\sin x - \sin c}{x-c} = \cos c$

(γ)

x	$c-.01$	$c-.001$	$c+.001$	$c+.01$
$\dfrac{\sin x - \sin c}{x-c}$	-0.411593	-0.415692	-0.416601	-0.420686

Εδώ $c = 2$ και $\cos c = \cos 2 \approx -0.416147$

x	$c-0.01$	$c-0.001$	$c+0.001$	$c+0.01$
$\dfrac{\sin x - \sin c}{x-c}$	0.863511	0.865775	0.866275	0.868511

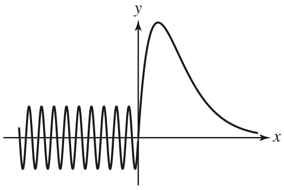
Εδώ $c = -\frac{\pi}{6}$ και $\cos c = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866025$

Ενότητα 2.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Λάθος (δ) Σωστό

2. (α) $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$ (β) $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ (γ) $\lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$

3.

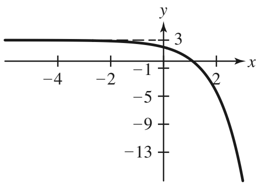


4. Αρνητικό **5.** Αρνητικό

6. Καθώς $x \to \infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, οπότε $\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin 0 = 0$. Από την άλλη πλευρά, $\frac{1}{x} \to \pm\infty$ καθώς $x \to 0$, και καθώς $\frac{1}{x} \to \pm\infty$, η $\sin\frac{1}{x}$ ταλαντώνεται απείρως συχνά.

Ενότητα 2.7 Ασκήσεις

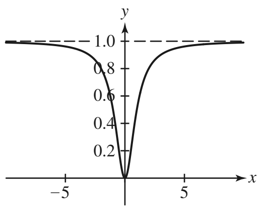
1. $y = 1$ και $y = 2$ **3.**



5. (α) Από τον παρακάτω πίνακα φαίνεται ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.

x	± 50	± 100	± 500	± 1000
$f(x)$	0.999600	0.999900	0.999996	0.999999

(β) Από την παρακάτω γραφική παράσταση φαίνεται επίσης ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.



(γ) Η οριζόντια ασύμπτωτη της f είναι η $y = 1$.

7. 1 **9.** 0 **11.** $\frac{7}{4}$ **13.** $-\infty$ **15.** ∞ **17.** $y = \frac{1}{4}$ **19.** $y = \frac{2}{3}$ και $y = -\frac{2}{3}$ **21.** $y = 0$ **23.** $y = 0$ και $y = 10$

25. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$. Η έκφραση «δεν την ακουμπά ποτέ» είναι λάθος. Εδώ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την οριζόντια ασύμπτωτη $y = 3$ για κάθε $x > 0$.

27. 0 **29.** 2 **31.** $\frac{1}{16}$ **33.** 0

35. $\frac{\pi}{2}$, η γραφική παράσταση της $y = \tan^{-1} x$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $y = \frac{\pi}{2}$.

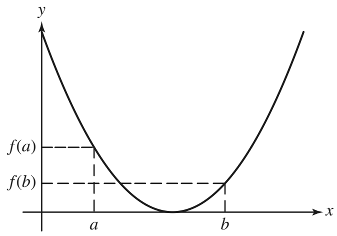
37. (α) $M \approx 1863.3$, $A \approx 9.808$, $k \approx 0.576$ (β) Περίπου 1863.3 εκατομμύρια (γ) Περίπου 2020

39. 0 **41.** ∞ **43.** $\ln\frac{3}{2}$ **45.** $-\frac{\pi}{2}$

49. (α) $\lim_{s\to\infty} R(s) = \lim_{s\to\infty} \dfrac{As}{K+s} = \lim_{s\to\infty} \dfrac{A}{1+\frac{K}{s}} = A$. (β) $R(K) = \dfrac{AK}{K+K} = \dfrac{AK}{2K} = \dfrac{A}{2}$ που είναι το μισό της οριακής τιμής (γ) 3.75 mM

Ενότητα 2.8 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Παρατηρήστε ότι η $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Επειδή $f(0) < 0.5 < f(1)$, το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα $c \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0.5$.
2. Πρέπει να υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου.
3. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η οριζόντια ευθεία $y = k$ για κάθε k μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ τουλάχιστον μία φορά.
4.

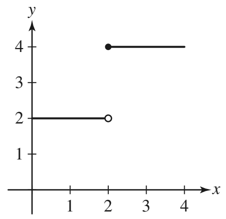


5. (α) Μερικές φορές σωστό (β) Πάντα σωστό (γ) Ποτέ σωστό (δ) Μερικές φορές σωστό

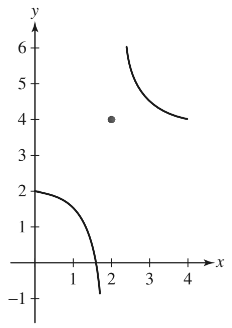
Ενότητα 2.8 Ασκήσεις

1. Παρατηρήστε ότι $f(1) = 2$ και $f(2) = 10$. Εφόσον η f είναι πολυώνυμο, είναι συνεχής παντού και ειδικότερα στο $[1, 2]$. Επομένως, από το ΘΕΤ υπάρχει ένα $c \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε $f(c) = 9$.
3. $g(0) = 0$ και $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{16}$. Η g είναι συνεχής για κάθε t μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{4}$ και $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi^2}{16}$. Επομένως, από το ΘΕΤ υπάρχει ένα $c \in [0, \frac{\pi}{4}]$ τέτοιο ώστε $g(c) = \frac{1}{2}$.
5. Έστω $f(x) = x - \cos x$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής με $f(0) = -1$ και $f(1) = 1 - \cos 1 \approx 0.46$. Επομένως, από το ΘΕΤ υπάρχει ένα $c \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(c) = c - \cos c = 0$.
7. Έστω ότι $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$ με $f(\frac{1}{4}) = -1$ και $f(2) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$. Επομένως, από το ΘΕΤ υπάρχει ένα $c \in \left[\frac{1}{4}, 2\right]$ τέτοιο ώστε $f(c) = \sqrt{c} + \sqrt{c+2} - 3 = 0$.
9. Έστω $f(x) = x^2$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής με $f(1) = 1$ και $f(2) = 4$. Επομένως, από το ΘΕΤ υπάρχει ένα $c \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε $f(c) = c^2 = 2$.
11. Για κάθε θετικό ακέραιο k, έστω $f(x) = x^k - \cos x$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f(0) = -1$ και $f(\frac{\pi}{2}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k > 0$. Επομένως, από το ΘΕΤ υπάρχει ένα $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(c) = c^k - \cos(c) = 0$.
13. Έστω $f(x) = 2^x + 3^x - 4^x$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ με $f(0) = 1 > 0$ και $f(2) = -3 < 0$. Επομένως, από το ΘΕΤ υπάρχει ένα $c \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(c) = 2^c + 3^c - 4^c = 0$.
15. Έστω $f(x) = e^x + \ln x$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής στο $[e^{-2}, 1]$ με $f(e^{-2}) = e^{e^{-2}} - 2 < 0$ και $f(1) = e > 0$. Επομένως, από το ΘΕΤ υπάρχει ένα $c \in (e^{-2}, 1) \subset (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(c) = e^c + \ln c = 0$.
17. Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2 στο θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Η f είναι πολυώνυμο και συνεχής παντού. $f(-3) = 170$, $f(-2) = -25$, $f(-1) = 2$, $f(0) = -1$, $f(1) = 2$, $f(2) = -25$ και $f(3) = 170$. Επομένως, η f έχει μια ρίζα σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα: $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ και η f πρέπει να έχει έξι διαφορετικές ρίζες.
19. Το ΘΕΤ δεν εφαρμόζεται επειδή η g δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$. Ωστόσο, αυτή η συνάρτηση παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $g(-1) = 1$ και $g(1) = 2$.
21. (α) $f(1) = 1$, $f(1.5) = 2^{1.5} - (1.5)^3 < 3 - 3.375 < 0$. Επομένως, $f(x) = 0$ για κάποια x μεταξύ 1 και 1.5. (β) $f(1.25) \approx 0.4253 > 0$ και $f(1.5) < 0$. Επομένως, $f(x) = 0$ για κάποιο x μεταξύ 1.25 και 1.5.
(γ) $f(1.375) \approx -0.0059$. Επομένως, $f(x) = 0$ για κάποιο x μεταξύ 1.25 και 1.375.
23. $[1.25, 1.5]$

25.



27.



29. Όχι, όχι. **31.** Τη χρονική στιγμή c.

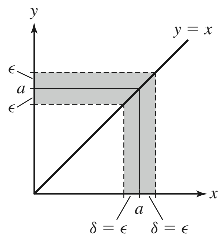
Ενότητα 2.9 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (γ) **2.** Το (β) και το (δ) είναι σωστά.

Ενότητα 2.9 Ασκήσεις

1. $L = 4$, $\epsilon = 0.8$ και $\delta = 0.1$

3.



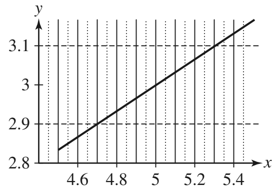
Με $\delta = \epsilon$, η απόσταση από το a είναι ϵ.

5. (α) $|f(x) - 35| = |8x + 3 - 35| = |8x - 32| = |8(x - 4)| = 8\,|x - 4|$ (β) Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρήστε $\delta = \epsilon/8$ και υποθέστε ότι $|x - 4| < \delta$. Από το μέρος (α), $|f(x) - 35| = 8|x - 4| < 8\delta$. Αντικαθιστώντας $\delta = \epsilon/8$, βλέπουμε ότι $|f(x) - 35| < 8\epsilon/8 = \epsilon$.

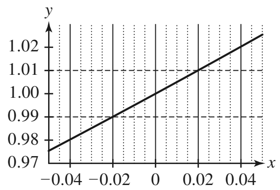
7. (α) Αν $0 < |x - 2| < \delta = .01$, τότε $|x| < 3$ και $\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| \leq |x - 2|\,(|x| + 2) < 5|x - 2| < 0.05$.
(β) Αν $0 < |x - 2| < \delta = .0002$, τότε $|x| < 2.0002$ και
$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| \leq |x - 2|\,(|x| + 2) < 4.0002|x - 2| < 0.00080004 < 0.0009$.
(γ) $\delta = 10^{-5}$

9. $\delta = 6 \times 10^{-4}$

11. $\delta = 0.25$



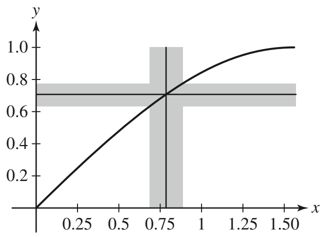
13. $\delta = 0.198$



15. (α) Εφόσον $|x-2|<1$, προκύπτει ότι $1<x<3$ και ειδικότερα $x>1$. Επειδή $x>1$, τότε $\dfrac{1}{x}<1$ και $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{2-x}{2x}\right| = \dfrac{|x-2|}{2x} < \dfrac{1}{2}|x-2|$ (β) Επιλέγουμε $\delta = .02$.

(γ) Έστω $\delta = \min\{1, 2\epsilon\}$ και υποθέστε ότι $|x-2|<\delta$. Τότε, από το μέρος (α) έχουμε $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}|x-2| < \dfrac{1}{2}\delta < \dfrac{1}{2}\cdot 2\epsilon = \epsilon$. Έστω ότι δίνεται ένα $\epsilon>0$. Τότε, όποτε $0<|x-2|<\delta=\min\{1,2\epsilon\}$, έχουμε $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}\delta \le \epsilon$.

17.



19. Για δεδομένο $\epsilon>0$, θέτουμε $\delta = \min\left\{|c|, \frac{\epsilon}{3|c|}\right\}$. Τότε, για $|x-c|<\delta$ έχουμε

$$|x^2-c^2| = |x-c|\,|x+c| < 3|c|\delta < 3|c|\frac{\epsilon}{3|c|} = \epsilon$$

21. Έστω ότι δίνεται ένα $\epsilon>0$. Θέτουμε $\delta=\min(1,3\epsilon)$. Αν $|x-4|<\delta$,

$$|\sqrt{x}-2| = |x-4|\left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right| < |x-4|\frac{1}{3} < \delta\frac{1}{3} < 3\epsilon\frac{1}{3} = \epsilon$$

23. Έστω ότι δίνεται ένα $\epsilon>0$. Θέτουμε $\delta=\min(1,\frac{\epsilon}{7})$ και υποθέτουμε $|x-1|<\delta$. Εφόσον $\delta<1$, $0<x<2$. Αφού η x^2+x+1 αυξάνεται καθώς το x αυξάνεται για $x>0$, $x^2+x+1<7$ για $0<x<2$, οπότε

$$\left|x^3-1\right| = |x-1|\left|x^2+x+1\right| < 7|x-1| < 7\frac{\epsilon}{7} = \epsilon$$

25. Έστω ότι δίνεται ένα $\epsilon>0$. Θέτουμε $\delta=\min(1,\frac{4}{5}\epsilon)$ και υποθέτουμε ότι $|x-2|<\delta$. Εφόσον $\delta<1$, $|x-2|<1$, οπότε $1<x<3$. Αυτό σημαίνει ότι $4x^2>4$ και $|2+x|<5$ έτσι ώστε $\frac{2+x}{4x^2}<\frac{5}{4}$. Παίρνουμε

$$\left|x^{-2}-\frac{1}{4}\right| = |2-x|\left|\frac{2+x}{4x^2}\right| < \frac{5}{4}|x-2| < \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\epsilon = \epsilon$$

27. Έστω L ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Έστω ότι $\delta>0$ είναι οποιοσδήποτε μικρός θετικός αριθμός. Θέτουμε $x=\frac{\delta}{2}$, το οποίο ικανοποιεί την $|x|<\delta$ και την $f(x)=1$. Θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

• ($|f(x) - L| \geq \frac{1}{2}$): Τελειώσαμε.
• ($|f(x) - L| < \frac{1}{2}$): Αυτό σημαίνει ότι $\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $x = -\frac{\delta}{2}$. Ισχύει $f(x) = -1$, οπότε $\frac{3}{2} < L - f(x)$.
Σε αμφότερες τις περιπτώσεις υπάρχει ένα x τέτοιο ώστε $|x| < \delta$, αλλά $|f(x) - L| \geq \frac{1}{2}$.
29. Έστω $\epsilon > 0$ και θέτουμε $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{2})$. Τότε, όποτε $|x - 1| < \delta$, προκύπτει ότι $0 < x < 2$. Αν $1 < x < 2$, τότε $\min(x, x^2) = x$ και

$$|f(x) - 1| = |x - 1| < \delta < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < x < 1$, τότε $\min(x, x^2) = x^2$, $|x + 1| < 2$ και

$$|f(x) - 1| = |x^2 - 1| = |x - 1|\,|x + 1| < 2\delta < \epsilon$$

Επομένως, όποτε $|x - 1| < \delta$, $|f(x) - 1| < \epsilon$.
33. Υποθέστε ότι $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Έστω ότι δίνεται ένα $\epsilon > 0$. Εφόσον $\lim_{x \to c} f(x) = L$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η συνθήκη $|x - c| < \delta$ επιβάλλει την $|f(x) - L| < \epsilon/|a|$. Υποθέστε ότι $|x - c| < \delta$. Τότε

$$|af(x) - aL| = |a||f(x) - L| < |a|(\epsilon/|a|) = \epsilon$$

Κεφάλαιο 2 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. Μέση ταχύτητα: περίπου 0.954 m/s, στιγμιαία ταχύτητα: περίπου 0.894 m/s.
3.

x	Κλίση τέμνουσας από 16 έως x	x	Κλίση τέμνουσας από 16 έως x
15.99	0.176804	16.01	0.176749
15.999	0.176779	16.001	0.176774
15.9999	0.176777	16.0001	0.176776

Εκτίμηση της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας: 0.1768
5. 1.50 **7.** 1.69 **9.** 2.00 **11.** 5 **13.** $-\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **17.** 2
19. Δεν υπάρχει,

$$\lim_{t \to 9-} \frac{t-6}{\sqrt{t}-3} = -\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{t \to 9+} \frac{t-6}{\sqrt{t}-3} = \infty$$

21. ∞ **23.** Δεν υπάρχει,

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^3 - 2x}{x - 1} = \infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to 1+} \frac{x^3 - 2x}{x - 1} = -\infty$$

25. 2 **27.** 0 **29.** $-\frac{1}{2}$ **31.** $3b^2$ **33.** $\frac{1}{9}$ **35.** ∞
37. Δεν υπάρχει,

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \theta \sec\theta = \infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}+} \theta \sec\theta = -\infty$$

39. Δεν υπάρχει,

$$\lim_{\theta \to 0-} \frac{\cos\theta - 2}{\theta} = \infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{\theta \to 0+} \frac{\cos\theta - 2}{\theta} = -\infty$$

41. ∞ **43.** ∞
45. Δεν υπάρχει,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$$

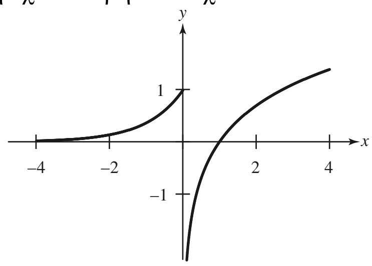
47. 0 **49.** 0

51. Σύμφωνα με τη γραφική παράσταση της f,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0+} f(x) = 1\\
\lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2+} f(x) = \infty\\
\lim_{x\to 4-} f(x) &= -\infty\\
\lim_{x\to 4+} f(x) &= \infty
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής από αριστερά και από δεξιά στο $x=0$ και δεν είναι συνεχής ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά στο $x=2$ και στο $x=4$.

53. Στο $x=0$ η συνάρτηση έχει άπειρη ασυνέχεια αλλά είναι συνεχής από αριστερά.



55. Η g έχει ασυνέχεια άλματος στο $x=-1$, η g είναι συνεχής από αριστερά στο $x=-1$.

57. $b=7$, η h έχει ασυνέχεια άλματος στο $x=-2$. **59.** Δεν έχει καμία οριζόντια ασύμπτωτη.

61. $y=2$ **63.** $y=1$ **65.** $y=0$ και $y=2n$

67. $M\approx 62.78$, $A\approx 5.278$, $k\approx 0.4737$, οριζόντιες ασύμπτωτες στο $y=0$ και στο $y=62.78$ (περίπου)

69.

$$B = B\cdot 1 = B\cdot L = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) = A$$

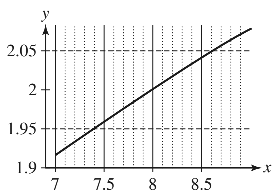
71. $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^3}$ και $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^5}$

75. Έστω $f(x)=x^2-\cos x$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(0)=-1<0$ και $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}>0$. Επομένως, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει κάποιο $c\in(0,\frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $f(c)=0$. Ως εκ τούτου, οι καμπύλες $y=x^2$ και $y=\cos x$ τέμνονται.

77. Έστω $f(x)=e^{-x^2}-x$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)=e^0-0=1>0$ και $f(1)=e^{-1}-1<0$. Επομένως, το ΘΕΤ εξασφαλίζει ότι υπάρχει κάποιο $c\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(c)=e^{-c^2}-c=0$.

79. $g(x)=\lfloor x\rfloor$. Στο διάστημα $x\in\left[\frac{a}{2+2\pi a},\frac{a}{2}\right]\subset[-a,a]$ η $\frac{1}{x}$ παίρνει τιμές από το $\frac{2}{a}$ ως το $\frac{2}{a}+2\pi$, οπότε η συνάρτηση του ημιτόνου καλύπτει μια πλήρη περίοδο και εμφανώς παίρνει κάθε τιμή από $-\sin a$ ως $\sin a$.

81. $\delta=0.55$,



83. Έστω $\epsilon>0$ και παίρνουμε $\delta=\epsilon/8$. Τότε $|x-(-1)|=|x+1|<\delta$, οπότε

$$|f(x)-(-4)| = |4+8x+4| = 8|x+1| < 8\delta = \epsilon$$

Κεφάλαιο 3

Ενότητα 3.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Β και Δ **2.** $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ και $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **3.** $a = 3$ και $h = 2$

4. Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \tan x$ στο $x = \frac{\pi}{4}$

5. (α) Η διαφορά στο ύψος μεταξύ των σημείων $(0.9, \sin 0.9)$ και $(1.3, \sin 1.3)$

(β) Η κλίση της τέμνουσας ευθείας μεταξύ των σημείων $(0.9, \sin 0.9)$ και $(1.3, \sin 1.3)$

(γ) Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας της γραφικής παράστασης στο $x = 0.9$

6. (α) Οριζόντια **7.** (β) Κατακόρυφη

Ενότητα 3.1 Ασκήσεις

1. $f'(3) = 30$ **3.** $f'(0) = 9$ **5.** $f'(-1) = -2$ **7.** $f'(1) = 5$

9. Κλίση της τέμνουσας ευθείας = 1, η τέμνουσα ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(2, f(2))$ και $(2.5, f(2.5))$ έχει μεγαλύτερη κλίση από την εφαπτόμενη ευθεία στο $x = 2$.

11. $f'(1) \approx 0$, $f'(2) \approx 0.8$ **13.** $f'(1) = f'(2) = 0$, $f'(4) = \frac{1}{2}$, $f'(7) = 0$ **15.** $f'(5.5)$ **17.** $f'(x) = 7$

19. $g'(t) = -3$ **21.** $y = 2x - 1$ **23.** Η εφαπτόμενη ευθεία σε οποιοδήποτε σημείο είναι η ίδια η ευθεία.

25. $f(-2+h) = \dfrac{1}{-2+h}, -\frac{1}{3}$ **27.** $f'(5) = -\dfrac{1}{10\sqrt{5}}$ **29.** $f'(3) = 22$, $y = 22x - 18$

31. $f'(3) = -11$, $y = -11t + 18$ **33.** $f'(0) = 1$, $y = x$ **35.** $f'(8) = -\dfrac{1}{64}$, $y = -\dfrac{1}{64}x + \dfrac{1}{4}$

37. $f'(-2) = -1$, $y = -x - 1$ **39.** $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}x + \frac{9}{2\sqrt{5}}$ **41.** $f'(4) = -\dfrac{1}{16}$, $y = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{3}{4}$

43. $f'(3) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $y = \dfrac{3}{\sqrt{10}}t + \frac{1}{\sqrt{10}}$ **45.** $f'(0) = 0$, $y = 1$

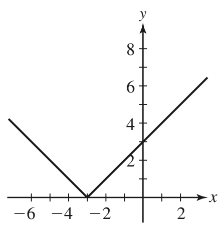
47.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0+}\frac{(1+h)^2-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0+}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0+}(2+h) = 2\end{aligned}$$

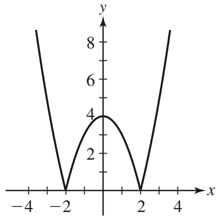
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{1-1}{h} = 0$$

Εφόσον αυτά τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα μεταξύ τους, το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ δεν υπάρχει και επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$. Επίσης, εφόσον αυτά τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα μεταξύ τους, η f έχει γωνία στη γραφική της παράσταση στο $x = 1$.

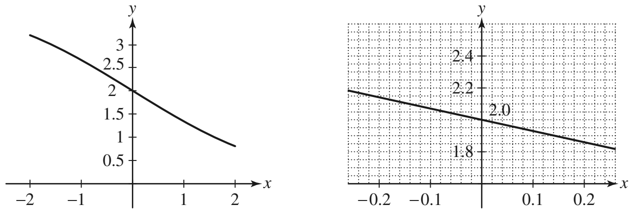
49. Η παράγωγος δεν υπάρχει στο $c = -3$. Υπάρχει γωνία εκεί.



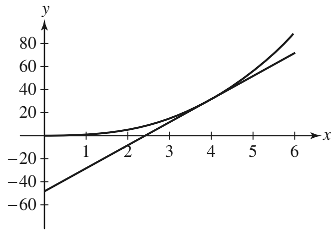
51. Η παράγωγος δεν υπάρχει στο $c = \pm 2$. Υπάρχουν γωνίες και στα δύο σημεία.



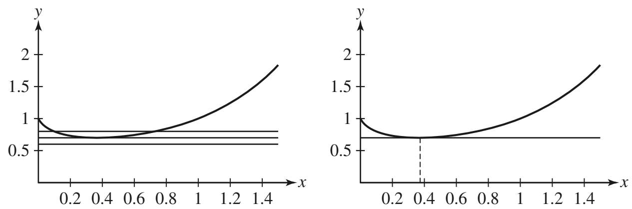
53. $f'(0) \approx -0.69$



55. Για $1 < x < 2.5$ και για $x > 3.5$ **57.** $f(x) = x^3$ και $a = 5$ **59.** $f(x) = \sin x$ και $a = \frac{\pi}{6}$
61. $f(x) = 5^x$ και $a = 2$ **63.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7071$
65.
• Στην καμπύλη (A) η $f'(1)$ είναι μεγαλύτερη από $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
Η καμπύλη κάμπτεται προς τα κάτω, οπότε η τέμνουσα ευθεία στα δεξιά σχηματίζει μικρότερη γωνία από την εφαπτόμενη ευθεία.
• Στην καμπύλη (B) η $f'(1)$ είναι μικρότερη από $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
Η καμπύλη κάμπτεται προς τα επάνω, οπότε η τέμνουσα ευθεία στα δεξιά σχηματίζει μεγαλύτερη γωνία από την εφαπτόμενη ευθεία.
67. (β) $f'(4) \approx 20.0000$ (γ) $y = 20x - 48$

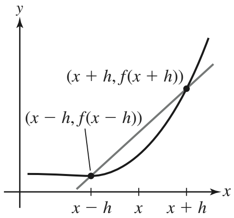


69. $c \approx 0.37$



71. $P'(293) \approx 0.00204$, $P'(313) \approx 0.00503$, $P'(333) \approx 0.01106$ με μονάδες atm/K
73. $P'(1997) \approx 0.10$, $P'(2001) \approx 0.35$, $P'(2005) \approx 0.89$, $P'(2009) \approx 2.36$ με μονάδες εκατομμύρια γαλόνια ανά έτος
75. $P'(303) \approx 0.00265$, $P'(313) \approx 0.004145$, $P'(333) \approx 0.00931$, $P'(343) \approx 0.013435$ με μονάδες atm/K
77. -0.375 kph·km/όχημα **79.** $i(3) = 0.06$ amperes **81.** $v'(4) \approx 160$, $C \approx 0.2$ farads

83. (α) Κλίση τέμνουσας $= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{(x+h)-(x-h)} = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$



(β) Η κλίση της τέμνουσας από x έως $x+h$ είναι $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η κλίση της τέμνουσας από $x-h$ έως x είναι $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. Ο μέσος όρος των δύο κλίσεων είναι τότε $\frac{1}{2}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

85. Έστω $f(x) = px^2 + qx + r$,

SDQ: $\big(f(a+h) - f(a-h)\big)/2h = 2h(2pa+q)/2h = 2pa+q$, $f'(a) = \lim_{h\to 0}\big(f(a+h)-f(a)\big)/h = 2pa+q$

Ενότητα 3.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. 8 **2.** $(f-g)'(1) = -2$ και $(3f+2g)'(1) = 19$ **3.** (α), (β), (γ) και (στ)

4. (α) Λάθος. Για παράδειγμα, η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη εκεί. (β) Σωστό

Ενότητα 3.2 Ασκήσεις

1. $f'(x) = 3$ **3.** $f'(x) = 3x^2$ **5.** $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **7.** $\left.\dfrac{d}{dx}x^4\right|_{x=-2} = 4(-2)^3 = -32$

9. $\left.\dfrac{d}{dt}t^{2/3}\right|_{t=8} = \dfrac{2}{3}(8)^{-1/3} = \dfrac{1}{3}$ **11.** $0.35x^{-0.65}$ **13.** $\sqrt{17}t^{\sqrt{17}-1}$ **15.** $f'(x) = 4x^3$, $y = 32x - 48$

17. $f'(x) = 5 - 16x^{-1/2}$, $y = -3x - 32$ **19.** (α) $\dfrac{d}{dx}12e^x = 12e^x$ (β) $\dfrac{d}{dt}(25t - 8e^t) = 25 - 8e^t$ (γ) $\dfrac{d}{dt}e^{t-3} = e^{t-3}$

21. $f'(x) = 6x^2 - 6x$ **23.** $f'(x) = \dfrac{20}{3}x^{2/3} + 6x^{-3}$ **25.** $g'(z) = -\dfrac{5}{2}z^{-19/14} - 5z^{-6}$ **27.** $f'(s) = \dfrac{1}{4}s^{-3/4} + \dfrac{1}{3}s^{-2/3}$

29. $g'(x) = 0$ **31.** $h'(t) = 5e^{t-3}$ **33.** $P'(s) = 32s - 24$ **35.** $f'(x) = -2x$ **37.** $g'(x) = -6x^{-5/2}$

39. 1 **41.** -60 **43.** $1 - e^4$

45.

- Η γραφική παράσταση στο (Α) αντιστοιχεί στην παράγωγο στο (ΙΙΙ).
- Η γραφική παράσταση στο (Β) αντιστοιχεί στην παράγωγο στο (Ι).
- Η γραφική παράσταση στο (Γ) αντιστοιχεί στην παράγωγο στο (ΙΙ).
- Η γραφική παράσταση στο (Δ) αντιστοιχεί στην παράγωγο στο (ΙΙΙ).

Η (Α) και η (Δ) έχουν την ίδια παράγωγο επειδή η γραφική παράσταση στο (Δ) αποτελεί απλώς κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της (Α).

47. Σημειώνουμε τη γραφική παράσταση στο (Α) ως f, τη γραφική παράσταση στο (Β) ως h και τη γραφική παράσταση στο (Γ) ως g.

49. Έστω $f(x) = mx + b$. Τότε,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (mx)' + (b)' && \text{(Κανόνας αθροίσματος)}\\ &= m(x)' + 0 && \text{(Κανόνας σταθερού πολλαπλασίου και κανόνας σταθεράς)}\\ &= m && \text{(Κανόνας πρώτης δύναμης)} \end{aligned}$$

51. Η (Β) μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου της f.

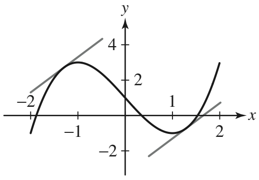
53. (α) $\dfrac{d}{dt}ct^3 = 3ct^2$ (β) $\dfrac{d}{dz}(5z + 4cz^2) = 5 + 8cz$ (γ) $\dfrac{d}{dy}(9c^2y^3 - 24c) = 27c^2y^2$

55. $x = \frac{1}{2}$ **57.** $a = 2$ και $b = -3$

59.

• $f'(x) = 3x^2 - 3 \geq -3$ αφού η $3x^2$ είναι μη αρνητική. Επίσης $f'(x) = m$ για $x \pm \sqrt{\frac{m+3}{3}}$. Υπάρχουν δύο τιμές του x αν $x > -3$, υπάρχει μία αν $x = -3$ και δεν υπάρχει καμία αν $x < -3$.

• Οι δύο παράλληλες εφαπτομένες με κλίση 2 φαίνονται στη γραφική παράσταση της f εδώ.



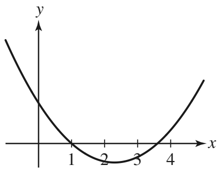
61. $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$

63. (α) $f'(0) = 1$, $y = x$ (β) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2e^h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} he^h = 0$. Η εφαπτόμενη ευθεία έχει κλίση 0 και διέρχεται από το σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$. Επομένως, η $y = 0$ είναι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας.

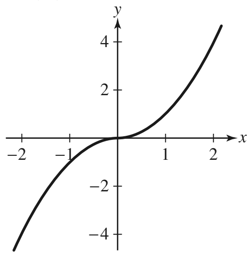
65. Περίπου -1.8×10^{-8} $\mathrm{W/m^2}$ ανά μέτρο.

67. $P'(303) \approx 0.00265$, $P'(313) \approx 0.004145$, $P'(323) \approx 0.006295$, $P'(333) \approx 0.00931$, $P'(343) \approx 0.013435$ με μονάδες atm/K, η $\frac{T^2}{P}\frac{dP}{dT}$ είναι περίπου σταθερή, που υποδεικνύει ότι ο νόμος Clausius-Clapeyron ισχύει και ότι $k \approx 5000$.

69.



71. Για $x < 0$, $f(x) = -x^2$ και $f'(x) = -2x$. Για $x > 0$, $f(x) = x^2$ και $f'(x) = 2x$. Επομένως, $f'(0) = 0$.



73. Φαίνεται ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $a = 0$. Επιπλέον, η εφαπτόμενη ευθεία δεν υπάρχει σε αυτό το σημείο.

75. Φαίνεται ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $a = 3$. Επιπλέον, η εφαπτόμενη ευθεία φαίνεται να είναι κατακόρυφη.

77. Φαίνεται ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $a = 0$. Επιπλέον, η εφαπτόμενη ευθεία δεν υπάρχει σε αυτό το σημείο.

79. $(1, 8)$ **81.** $\frac{10}{7}$

83. Η κατακόρυφη ευθεία τέμνει τον άξονα των x στο σημείο T με συντεταγμένες $(x + f(x)f'(x), 0)$. Το σημείο R έχει συντεταγμένες $(x, 0)$, οπότε η υποκάθετη είναι $|x + f(x)f'(x) - x| = |f(x)f'(x)|$.

85. Η εφαπτόμενη ευθεία της f στο $x = a$ είναι $y = 2ax - a^2$. Η τετμημένη επί την αρχή αυτής της ευθείας είναι $\frac{a}{2}$, οπότε η υποεφαπτόμενη είναι $a - a/2 = a/2$.

87. Η υποεφαπτόμενη είναι $\dfrac{1}{n}a$. **89.** $r \le \dfrac{1}{2}$
95. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c^+}(f(x)-f(c)) &= \lim_{x\to c^+}\left((x-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\\ &= \left(\lim_{x\to c^+}(x-c)\right)\left(\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\end{aligned}$$

Τώρα, $\lim\limits_{x\to c^+}(x-c)=0$ και από την υπόθεση το $\lim\limits_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ υπάρχει. Προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to c^+}(f(x)-f(c))=0$. Ομοίως, $\lim\limits_{x\to c^-}(f(x)-f(c))=0$. Αυτό υποδεικνύει ότι $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$ και επομένως η f είναι συνεχής στο c.

Ενότητα 3.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) Λάθος. Ο συμβολισμός fg συμβολίζει τη συνάρτηση της οποίας η τιμή στο x είναι $f(x)g(x)$. (β) Σωστό (γ) Λάθος. Η παράγωγος του γινομένου fg είναι $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. (δ) Λάθος. $\dfrac{d}{dx}(fg)\Big|_{x=4}=f(4)g'(4)+g(4)f'(4)$.
(δ) Σωστό

2. -1 **3.** 5

Ενότητα 3.3 Ασκήσεις

1. $f'(x)=10x^4+3x^2$ **3.** $f'(x)=e^x(x^2+2x)$ **5.** $\dfrac{dh}{ds}=-\dfrac{7}{2}s^{-3/2}+\dfrac{3}{2}s^{-5/2}+14$, $\dfrac{dh}{ds}\Big|_{s=4}=\dfrac{871}{64}$

7. $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-2)^2}$ **9.** $\dfrac{dg}{dt}=-\dfrac{4t}{(t^2-1)^2}$, $\dfrac{dg}{dt}\Big|_{t=-2}=\dfrac{8}{9}$ **11.** $g'(x)=-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

13. $f'(x)=3x^2x^{-3}+x^3(-3x^{-4})=3x^{-1}-3x^{-1}=0$. Εναλλακτικά, $f(x)=1$ και επομένως $f'(x)=0$.

15. $f'(t)=6t^2+2t-4$ **17.** $h'(t)=1$ για $t\ne 1$ **19.** $f'(x)=6x^5+4x^3+18x^2+5$

21. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{(x+10)^2}$, $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=3}=-\dfrac{1}{169}$ **23.** $f'(x)=1$ για $x\ge 0$ **25.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^5-20x^3+8x}{(x^2-5)^2}$, $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=2}=-80$

27. $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$, $\dfrac{dz}{dx}\Big|_{x=1}=-\dfrac{3}{4}$ **29.** $h'(t)=\dfrac{-2t^3-t^2+1}{(t^3+t^2+t+1)^2}$ **31.** $f'(x)=2e^2x$

33. $f'(x)=3x^2-6x-13$ **35.** $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ **37.** Για $z\ne -2$ και $z\ne 1$, $g'(z)=2z-1$

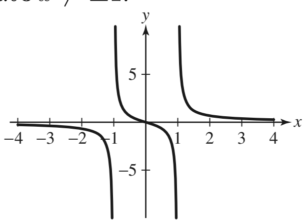
39. $f'(t)=\dfrac{-xt^2+8t-x^2}{(t^2-x)^2}$ **41.** $f'(x)=xP(x)$ **43.** $f'(x)=\dfrac{P(x)R(x)}{(Q(x))^2}$ **45.** $(fg)'(4)=-20$ και $(f/g)'(4)=0$

47. $G'(4)=-10$ **49.** $A'(3)=-4$ in^2 ανά λεπτό. Το εμβαδόν μειώνεται. **51.** $F'(0)=-7$ **53.** $\dfrac{d}{dx}e^{2x}=2e^{2x}$

55. Από το διάγραμμα της f βλέπουμε ότι η f μειώνεται στο πεδίο ορισμού της $\{x : x\ne \pm 1\}$. Επομένως, η $f'(x)$ πρέπει να είναι αρνητική. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου, βρίσκουμε ότι

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)(1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2},$$

το οποίο είναι αρνητικό για κάθε $x\ne\pm 1$.



57. $a = 1$ **59.** (α) Δεδομένου ότι $R(t) = N(t)S(t)$, προκύπτει ότι

$$\frac{dR}{dt} = N(t)S'(t) + S(t)N'(t)$$

(β) $\left.\dfrac{dR}{dt}\right|_{t=0} = 1{,}250{,}000$ δολάρια ανά μήνα

(γ) Ο όρος $5S(0)$ είναι μεγαλύτερος από τον όρο $10{,}000N(0)$. Επομένως, αν μπορεί να υλοποιηθεί μόνο το ένα σκέλος του εγχειρήματος, αυτό θα πρέπει να είναι το μέρος Α: αύξηση του αριθμού των καταστημάτων κατά πέντε ανά μήνα.

61.

- Στο $x = -1$, η εφαπτόμενη ευθεία είναι $y = \frac{1}{2}x + 1$.
- Στο $x = 1$, η εφαπτόμενη ευθεία είναι $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

63. Έστω $g = f^2 = ff$. Τότε $g' = \left(f^2\right)' = (ff)' = ff' + ff' = 2ff'$.

65. Έστω $p = fgh$. Τότε $p' = (fgh)' = f\,(gh' + hg') + ghf' = f'gh + fg'h + fgh'$.

67.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(xf(x)) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)f(x+h) - xf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(x\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x+h) \right) \\
&= x \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x+h) \\
&= xf'(x) + f(x)
\end{aligned}$$

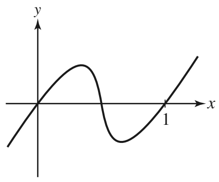
71. (α) Είναι πολλαπλή ρίζα (β) Δεν είναι πολλαπλή ρίζα

Ενότητα 3.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) ατμόσφαιρες/μέτρο (β) moles/(λίτρο · ώρα) **2.** 90 mph

3. Αν η ταχύτητα ενός κινούμενου αντικειμένου είναι αρνητική και μειώνεται, τότε το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται και επομένως το αντικείμενο επιταχύνεται.

4.



Ενότητα 3.4 Ασκήσεις

1. Αύξηση 10 τετραγωνικών μονάδων ανά μονάδα

3.

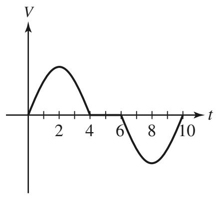
c	ROC της $f(x)$ ως προς x στο $x = c$
1	$f'(1) = \frac{1}{3}$
8	$f'(8) = \frac{1}{12}$
27	$f'(27) = \frac{1}{27}$

5. $d' = 2$ **7.** $dV/dr = 3\pi r^2$ **9.** (α) km/h (β) 100 km/h (γ) 0 km/h (δ) -50 km/h

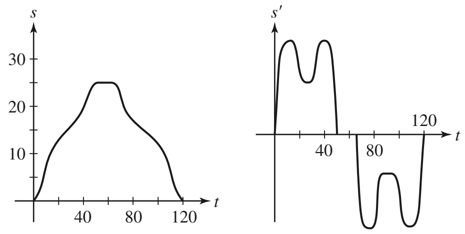
11. (α) (i) (β) (ii) (γ) (iii)

13. $t = 180$ ή 200, $dT/dt \approx -0.1°\text{C/min}$ **15.** (α) Γ (β) Α (γ) Β

17.



19.



21. $-8 \times 10^{-6}\ 1/\text{s}$

23. $\left.\dfrac{dT}{dh}\right|_{h=30} \approx 2.3°\text{C/km}$, $\left.\dfrac{dT}{dh}\right|_{h=70} \approx -2.8°\text{C/km}$, $\dfrac{dT}{dh} = 0$ στο διάστημα $[13, 23]$ και κοντά στα σημεία $h = 50$ και $h = 90$

25. $v'_{\text{esc}}(r) = -1.41 \times 10^7 r^{-3/2}$

27. Το σωματίδιο διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν $t = 0$ s και όταν $t = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ s. Το σωματίδιο είναι στιγμιαία ακίνητο όταν $t = 0$ s και όταν $t = 3$ s.

29. $\frac{9000}{49} \approx 183.7$ m **31.** Αρχική ταχύτητα: $v_0 = 19.6$ m/s, μέγιστο ύψος: 19.6 m **33.** (α) $\dfrac{dV}{dv} = -1$ (β) -4

35. Η $S'(3)$ είναι πιθανώς μεγαλύτερη επειδή μάλλον μαθαίνει με μεγαλύτερο ρυθμό μετά 3 ώρες διδασκαλίας παρά μετά 30 ώρες.

37. Ρυθμός μεταβολής του BSA ως προς τη μάζα: $\dfrac{\sqrt{5}}{20\sqrt{m}}$, $m = 70$ kg, ο ρυθμός μεταβολής είναι $\approx 0.0134 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$, $m = 80$ kg, ο ρυθμός μεταβολής είναι $\frac{1}{80} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$, ο BSA αυξάνεται πιο γρήγορα για μικρότερη σωματική μάζα.

39. 2 **41.** Το κόστος παραγωγής 2000 κουλουριών είναι \$796. Το κόστος του 2001ου κουλουριού είναι περίπου \$0.244, το οποίο δεν διαφέρει από το εκτιμώμενο κόστος.

45. (α) Το μέσο εισόδημα μεταξύ των νοικοκυριών στο κάτω r-οστό μέρος είναι

$$\frac{F(r)T}{rN} = \frac{F(r)}{r} \cdot \frac{T}{N} = \frac{F(r)}{r} A$$

(β) Το μέσο εισόδημα των νοικοκυριών που ανήκουν στο διάστημα $[r, r + \Delta r]$ είναι ίσο με

$$\frac{F(r + \Delta r)T - F(r)T}{\Delta r N} = \frac{F(r + \Delta r) - F(r)}{\Delta r} \cdot \frac{T}{N} = \frac{F(r + \Delta r) - F(r)}{\Delta r} A$$

(γ) Πάρτε το αποτέλεσμα από το μέρος (β) και θέστε $\Delta r \to 0$. Επειδή

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{F(r + \Delta r) - F(r)}{\Delta r} = F'(r)$$

βρίσκουμε ότι ένα νοικοκυριό στο $100r$-οστό ποσοστημόριο έχει εισόδημα $F'(r)A$.

(δ) Το σημείο P στο Σχήμα 15(β) έχει συντεταγμένη r ίση με 0.6, ενώ το σημείο Q έχει συντεταγμένη r περίπου ίση με 0.75. Επομένως, στην καμπύλη L_1 40% των νοικοκυριών έχουν $F'(r) > 1$ και επομένως έχουν εισόδημα άνω του μέσου όρου. Στην καμπύλη L_2 περίπου 25% των νοικοκυριών έχουν εισόδημα άνω του μέσου όρου.

49. Εξ ορισμού, η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(x, C(x))$ είναι

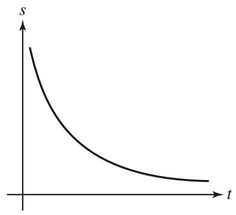
$$\frac{C(x)-0}{x-0} = \frac{C(x)}{x} = C_{\text{avg}}(x)$$

• Στο σημείο A το μέσο κόστος είναι μεγαλύτερο από το οριακό κόστος.
• Στο σημείο B το μέσο κόστος είναι μεγαλύτερο από το οριακό κόστος.
• Στο σημείο C το μέσο κόστος και το οριακό κόστος είναι σχεδόν ίσα.
• Στο σημείο D το μέσο κόστος είναι μικρότερο από το οριακό κόστος

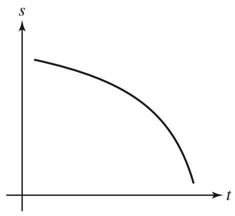
Ενότητα 3.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Η πρώτη παράγωγος των τιμών των μετοχών πρέπει να είναι θετική, ενώ η δεύτερη παράγωγος πρέπει να είναι αρνητική. Η πρώτη παράγωγος του επιπέδου του δοχείου πρέπει να είναι αρνητική, ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι θετική. Η πρώτη παράγωγος της απόστασης μεταξύ του αστεροειδή και της Γης είναι αρνητική και η δεύτερη παράγωγος είναι επίσης αρνητική.

2.



3.



4. Σωστό **5.** Όλα τα τετραγωνικά πολυώνυμα **6.** e^x **7.** $f^{(7)}(x) = 5040$, $f^{(8)}(x) = 0$

Ενότητα 3.5 Ασκήσεις

1. $y'' = 28$ και $y''' = 0$ **3.** $y'' = 12x^2 - 50$ και $y''' = 24x$ **5.** $y'' = 8\pi r$ και $y''' = 8\pi$

7. $y'' = -\frac{16}{5}t^{-6/5} + \frac{4}{3}t^{-4/3}$ και $y''' = \frac{96}{25}t^{-11/5} - \frac{16}{9}t^{-7/3}$ **9.** $y'' = -8z^{-3}$ και $y''' = 24z^{-4}$

11. $y'' = 12\theta + 14$ και $y''' = 12$ **13.** $y'' = -8x^{-3}$ και $y''' = 24x^{-4}$

15. $y'' = (x^5 + 10x^4 + 20x^3)e^x$ και $y''' = (x^5 + 15x^4 + 60x^3 + 60x^2)e^x$ **17.** $f^{(4)}(1) = 24$ **19.** $\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=1} = 54$

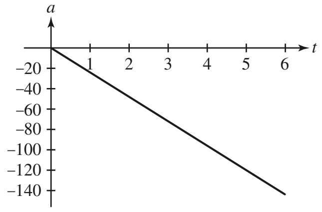
21. $\left.\frac{d^4x}{dt^4}\right|_{t=16} = \frac{3465}{134217728}$ **23.** $f'''(-3) = 4e^{-3} - 6$ **25.** $h''(1) = \frac{7}{4}e$

27. $y^{(0)}(0) = d$, $y^{(1)}(0) = c$, $y^{(2)}(0) = 2b$, $y^{(3)}(0) = 6a$, $y^{(4)}(0) = 24$ και $y^{(5)}(0) = 0$ **29.** $\frac{d^6}{dx^6}x^{-1} = 720x^{-7}$

31. $f^{(n)}(x) = (-1)^n (n+1)! x^{-(n+2)}$ **33.** $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2^n} x^{-(2n+1)/2}$

35. $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n) e^{-x}$

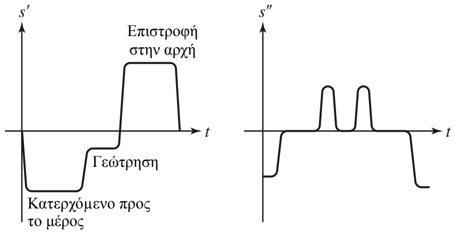
37. (α) $a(5) = -120\ \mathrm{m/min}^2$ (β) Η επιτάχυνση του ελικοπτέρου για $0 \leq t \leq 6$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αφού η επιτάχυνση του ελικοπτέρου είναι αρνητική, η ταχύτητα του ελικοπτέρου πρέπει να μειώνεται. Επειδή η ταχύτητα είναι θετική για $0^- \leq t < 5$, το ελικόπτερο επιβραδύνεται μεταξύ 0 και 5 min και επιταχύνεται μεταξύ 5 και 6 min.



39. (Α) f'' (Β) f' (Γ) f **41.** Περίπου από χρόνο 10 ως χρόνο 20 και από χρόνο 30 ως χρόνο 40 **43.** $n = 4, -1$

45. (α) $v(t) = -39.1$ m/s (β) $v(t) = -55.3$ m/s

47.



49.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{(x-1)^2} = (-1)^1 \frac{3\cdot 1}{(x-1)^{1+1}}, \\ f''(x) &= \frac{6}{(x-1)^3} = (-1)^2 \frac{3\cdot 2\cdot 1}{(x-1)^{2+1}}, \\ f'''(x) &= -\frac{18}{(x-1)^4} = (-1)^3 \frac{3\cdot 3!}{(x-1)^{3+1}} \text{ και} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{72}{(x-1)^5} = (-1)^4 \frac{3\cdot 4!}{(x-1)^{4+1}} \end{aligned}$$

Από το παρατηρούμενο μοτίβο συμπεραίνουμε ότι

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{3\cdot k!}{(x-1)^{k+1}}$$

51. 99! **53.** $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$, $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

Ενότητα 3.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) $\dfrac{d}{dx}(\sin x + \cos x) = -\sin x + \cos x$ (β) $\dfrac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$ (γ) $\dfrac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$

2. (α) Αυτή η συνάρτηση μπορεί να παραγωγιστεί χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου. (β) Δεν έχουμε μελετήσει ακόμα πώς παραγωγίζουμε μια συνάρτηση σαν αυτή. (γ) Αυτή η συνάρτηση μπορεί να παραγωγιστεί χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου.

3. (α) $y = x$ (β) $y = 1$

4. Το πηλίκο διαφορών για τη συνάρτηση $f(x) = \sin x$ περιλαμβάνει την έκφραση $\sin(x+h)$. Χρησιμοποιείται ο τύπος της πρόσθεσης για τη συνάρτηση του ημιτόνου για να αναπτύξουμε αυτή την έκφραση ως

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$$

.

Ενότητα 3.6 Ασκήσεις

1. $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ **3.** $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$ **5.** $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ **7.** $f'(x) = \sin x + x\cos x$

9. $H'(t) = \sec t + 2\sin t \sec^2 t \tan t$ **11.** $f'(\theta) = \sec\theta\big(\sec^2\theta + \tan^2\theta\big)$

13. $f'(x) = \big(8x^3 + 4x^{-2}\big)\sec x + \big(2x^4 - 4x^{-1}\big)\sec x \tan x$ **15.** $y' = \dfrac{\theta\sec\theta\tan\theta - \sec\theta}{\theta^2}$ **17.** $R'(y) = \dfrac{4\cos y - 3}{\sin^2 y}$

19. $f'(x) = \dfrac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$ **21.** $f'(x) = e^x(\cos x + \sin x)$ **23.** $f'(\theta) = e^\theta(5\sin\theta + 5\cos\theta - 4\tan\theta - 4\sec^2\theta)$

25. $y = 1$ **27.** $y = \frac{2}{3}t + \big(3\sqrt{3} - 2\pi\big)/9$ **29.** $y = \big(1 - \sqrt{3}\big)\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + 1 + \sqrt{3}$ **31.** $y = x + 1$

33. $y = 2e^{\pi/2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + e^{\pi/2}$ **35.** $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του πηλίκου.

37. $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του πηλίκου.

39. $f''(\theta) = 2\cos\theta - \theta\sin\theta$

41. $y'' = 2\sec^2 x \tan x$

$y''' = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x$

43.

• Τότε $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ και $f^{(5)}(x) = -\sin x$.

• Αντίστοιχα, οι διαδοχικές παράγωγοι της f εναλλάσσονται κυκλικά μεταξύ των

$$\{-\sin x, -\cos x, \sin x, \cos x\}$$

με αυτή τη σειρά. Εφόσον το 8 είναι πολλαπλάσιο του 4, έχουμε $f^{(8)}(x) = \cos x$.

• Αφού το 36 είναι πολλαπλάσιο του 4, έχουμε $f^{(36)}(x) = \cos x$. Επομένως, $f^{(37)}(x) = -\sin x$.

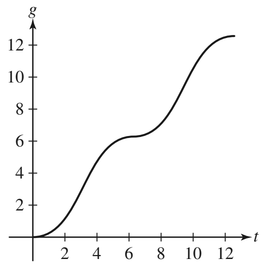
45. Αν $r = 0$, τότε $f^{(n)}(x) = \sin x$. Αν $r = 1$, τότε $f^{(n)}(x) = \cos x$. Αν $r = 2$, τότε $f^{(n)}(x) = -\sin x$. Αν $r = 3$, τότε $f^{(n)}(x) = -\cos x$.

47. (α) Από $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, έχουμε $f(x) + g(x) = 1$. Πάρτε την παράγωγο και των δύο μελών αυτής της εξίσωσης για να πάρετε $f'(x) + g'(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $f'(x) = -g'(x)$.

(β) $f'(x) = 2\sin x\cos x$ και $g'(x) = 2(\cos x)(-\sin x) = -2\sin x\cos x$. Επομένως, $f'(x) = -g'(x)$.

49. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

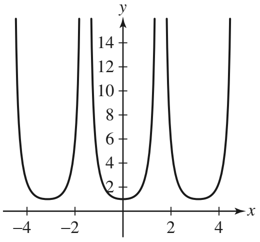
51. (α)



(β) Εφόσον $g'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ για κάθε t, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας της g είναι πάντα μη αρνητική.

(γ) $t = 0, 2\pi, 4\pi$

53. $f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Παρατηρήστε ότι η $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ έχει αριθμητή 1, επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει λύση. Η ελάχιστη κλίση μιας εφαπτόμενης ευθείας της $\tan x$ είναι 1. Παρακάτω σημειώνεται η γραφική παράσταση της f'.



55. $\frac{dR}{d\theta} = \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)\cos(2\theta)$. $\frac{dR}{d\theta} = 0$ όταν $\cos(2\theta) = 0$ και για $0 \le \theta \le \pi/2$ που παρατηρείται μόνο όταν $\theta = \pi/4$. Το αντίστοιχο εύρος είναι

$$\left(\frac{2v_0^2}{g}\right)\sin(\pi/4)\cos(\pi/4) = \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g}$$

57.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left((-\sin x)\frac{\sin h}{h} + (\cos x)\frac{\cos h - 1}{h}\right) \\ &= (-\sin x)\cdot 1 + (\cos x)\cdot 0 = -\sin x \end{aligned}$$

Ενότητα 3.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) Η εξωτερική συνάρτηση είναι η $\sqrt{x}$ και η εσωτερική συνάρτηση είναι η $4x + 9x^2$.
(β) Η εξωτερική συνάρτηση είναι η $\tan x$ και η εσωτερική συνάρτηση είναι η $x^2 + 1$.
(γ) Η εξωτερική συνάρτηση είναι η x^5 και η εσωτερική συνάρτηση είναι η $\sec x$.
(δ) Η εξωτερική συνάρτηση είναι η x^4 και η εσωτερική συνάρτηση είναι η $1 + e^x$.
2. Η συνάρτηση $\frac{x}{x+1}$ μπορεί να παραγωγιστεί χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου και οι συναρτήσεις $\sqrt{x}\cdot\sec x$ και xe^x μπορούν να παραγωγιστούν χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου. Οι συναρτήσεις $\tan(7x^2 + 2)$, $x\sqrt{\sec x}$ και $\sin(e^x)$ απαιτούν τον κανόνα της αλυσίδας.
3. (β) **4.** Δεν έχουμε επαρκείς πληροφορίες για να υπολογίσουμε την $F'(4)$. Μας λείπει η τιμή της $f'(1)$.

Ενότητα 3.7 Ασκήσεις

1.

$f(g(x))$	$f'(u)$	$f'(g(x))$	$g'(x)$	$(f\circ g)'$
$(x^4+1)^{3/2}$	$\frac{3}{2}u^{1/2}$	$\frac{3}{2}(x^4+1)^{1/2}$	$4x^3$	$6x^3(x^4+1)^{1/2}$

3.

$f(g(x))$	$f'(u)$	$f'(g(x))$	$g'(x)$	$(f\circ g)'$
$\tan(x^4)$	$\sec^2 u$	$\sec^2(x^4)$	$4x^3$	$4x^3\sec^2(x^4)$

5. $4(x + \sin x)^3(1 + \cos x)$ **7.** (α) $2x\sin(9 - x^2)$ (β) $\dfrac{\sin(x^{-1})}{x^2}$ (γ) $-\sec^2 x \sin(\tan x)$ **9.** 12

11. Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό, $f(x) = 4x^4 - 20x^2 + 25$, οπότε $f'(x) = 16x^3 - 40x = 8x(2x^2 - 5)$. Για να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του γινομένου, γράφουμε $f(x) = (2x^2 - 5)(2x^2 - 5)$.
Έχουμε $f'(x) = (4x)(2x^2 - 5) + (2x^2 - 5)(4x) = 8x(2x^2 - 5)$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, $f'(x) = 2(2x^2 - 5)(4x) = 8x(2x^2 - 5)$.

13. $12x^3(x^4+5)^2$ **15.** $\dfrac{7}{2\sqrt{7x-3}}$ **17.** $-2(x^2+9x)^{-3}(2x+9)$ **19.** $-4\cos^3\theta\sin\theta$ **21.** $9(2\cos\theta+5\sin\theta)^8(5\cos\theta-2\sin\theta)$
23. e^{x-12} **25.** $2\cos(2x+1)$ **27.** $e^{x+x^{-1}}\left(1-x^{-2}\right)$

29.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(g(x)) &= -\sin(x^2+1)(2x) = -2x\sin(x^2+1)\\ \frac{d}{du}g(f(u)) &= -2\sin u\cos u\end{aligned}$$

31. $2x\cos\left(x^2\right)$ **33.** $\dfrac{t}{\sqrt{t^2+9}}$ **35.** $\dfrac{2}{3}\left(x^4-x^3-1\right)^{-1/3}\left(4x^3-3x^2\right)$ **37.** $\dfrac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}$ **39.** $-\dfrac{\sec(1/x)\tan(1/x)}{x^2}$
41. $(1-\sin\theta)\sec^2(\theta+\cos\theta)$ **43.** $-18te^{2-9t^2}$ **45.** $(2x+4)\sec^2(x^2+4x)$ **47.** $\cos(1-3x)+3x\sin(1-3x)$
49. $2(4t+9)^{-1/2}$ **51.** $4(\sin x - 3x^2)(x^3+\cos x)^{-5}$ **53.** $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2\sin 2x}}$ **55.** $\dfrac{x\cos(x^2)-3\sin 6x}{\sqrt{\cos 6x+\sin(x^2)}}$
57. $3(\tan^2 x\sec^2 x + x^2\sec^2(x^3))$ **59.** $\dfrac{-1}{\sqrt{z+1}\,(z-1)^{3/2}}$ **61.** $\dfrac{\sin(-1)-\sin(1+x)}{(1+\cos x)^2}$ **63.** $-35x^4\cot^6\left(x^5\right)\csc^2\left(x^5\right)$
65. $-180x^3\cot^4\left(x^4+1\right)\csc^2\left(x^4+1\right)\left(1+\cot^5\left(x^4+1\right)\right)^8$ **67.** $24(2e^{3x}+3e^{-2x})^3(e^{3x}-e^{-2x})$
69. $4(x+1)(x^2+2x+3)e^{(x^2+2x+3)^2}$ **71.** $\dfrac{1}{8\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$ **73.** $-\dfrac{k}{3}(kx+b)^{-4/3}$
75. $2\cos\left(x^2\right)-4x^2\sin\left(x^2\right)$ **77.** $-336(9-x)^5$ **79.** $\left.\dfrac{dv}{dP}\right|_{P=1.5} = \dfrac{290\sqrt{3}}{3}\dfrac{\text{m}}{\text{s}\cdot\text{atm}}$

81. (α) Όταν $r = 3$, $\dfrac{dV}{dt} = 1.6\pi(3)^2 \approx 45.24\ \text{cm}^3/\text{s}$.
(β) Όταν $t = 3$, έχουμε $r = 1.2$. Επομένως, $\dfrac{dV}{dt} = 1.6\pi(1.2)^2 \approx 7.24\ \text{cm}^3/\text{s}$.
83. $L'(t) = \frac{6.8\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right)$. 1η Δεκεμβρίου: $L'(255) \approx -0.019$ h/ημέρα ≈ -1.1 min/ημέρα. 1η Ιανουαρίου: $L'(286) \approx 0.012$ h/ημέρα ≈ 0.7 min/ημέρα. 1η Φεβρουαρίου: $L'(317) \approx 0.04$ h/ημέρα ≈ 2.4 min/ημέρα. Η διάρκεια των ημερών μειώνεται στο τέλος του φθινοπώρου αλλά στη συνέχεια αυξάνεται όταν αρχίζει ο χειμώνας. Καθώς προχωρά ο χειμώνας, ο ρυθμός αύξησης της διάρκειας των ημερών αυξάνεται.
85. $\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}$ **87.** $W'(10) \approx 0.3566$ kg/έτος **89.** (α) -9 (β) $-3/2$ (γ) 18 **91.** $5\sqrt{3}$ **93.** 12 **95.** $\dfrac{1}{16}$
97. $\left.\dfrac{dP}{dt}\right|_{t=3} = -0.727\ \dfrac{\text{δολάρια}}{\text{έτος}}$ **99.** $\dfrac{dP}{dh} = -4.08569\times10^{-13}\,(288.14-0.00649\,h)^{4.256}$ **101.** 0.0973 kelvins/έτος
103. $f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$ **105.** Θέτουμε $u = h(x)$, $v = g(u)$ και $w = f(v)$. Τότε

$$\frac{dw}{dx} = \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{df}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = f'(g(h(x))g'(h(x))h'(x)$$

109. Για $n = 1$ βρίσκουμε

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

όπως απαιτείται. Τώρα, υποθέστε ότι για κάποιον θετικό ακέραιο k

$$\frac{d^k}{dx^k}\sin x = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

Τότε

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\sin x = \frac{d}{dx}\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Ενότητα 3.8 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ο κανόνας της αλυσίδας

2. (α) Αυτό είναι σωστό (β) Αυτό είναι σωστό (γ) Αυτό είναι λάθος. Επειδή η παραγώγιση γίνεται ως προς τη μεταβλητή x, απαιτείται ο κανόνας της αλυσίδας για να πάρουμε

$$\frac{d}{dx}\sin(y^2) = 2y\cos(y^2)\frac{dy}{dx}$$

3. Υπάρχουν δύο λάθη στην απάντηση του Jason. Αρχικά, ο Jason θα έπρεπε να είχε εφαρμόσει τον κανόνα του γινομένου στον δεύτερο όρο για να πάρει
$\frac{d}{dx}(2xy) = 2x\frac{dy}{dx} + 2y$
Δεύτερον, θα έπρεπε να είχε εφαρμόσει τον γενικό κανόνα δύναμης στον τρίτο όρο για να πάρει

$$\frac{d}{dx}y^3 = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

4. (β) **5.** $g(x) = \tan^{-1} x$ **6.** Οι παράγωγοι των $\sin^{-1} x$ και $\cos^{-1} x$ είναι η μία αντίθετη της άλλης.

7. $\dfrac{d}{dx}a^2 = 0,\ \dfrac{d}{dx}x^2 = 2x,\ \dfrac{d}{dx}y^2 = 2y\dfrac{dy}{dx}$

Ενότητα 3.8 Ασκήσεις

1. $(2,1),\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{3}$ **3.** $\dfrac{d}{dx}\left(x^2y^3\right) = 3x^2y^2y' + 2xy^3$ **5.** $\dfrac{d}{dx}\left(\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\right) = 3\left(x + yy'\right)\sqrt{x^2+y^2}$

7. $\sqrt[3]{y} + \frac{1}{3}xy^{-2/3}\dfrac{dy}{dx}$ **9.** $\dfrac{d}{dx}\dfrac{y}{y+1} = \dfrac{y'}{(y+1)^2}$ **11.** $y' = -\dfrac{2x}{9y^2}$ **13.** $y' = \dfrac{2xy + 6x^2y - 1}{1 - x^2 - 2x^3}$ **15.** $R' = -\dfrac{3R}{5x}$

17. $y' = \dfrac{y(y^2 - x^2)}{x(y^2 - x^2 - 2xy^2)}$ **19.** $y' = \dfrac{9}{4}x^{1/2}y^{5/3}$ **21.** $y' = \dfrac{(2x+1)y^2}{y^2 - 1}$ **23.** $y' = \dfrac{1 - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + \sin y}$

25. $y' = \dfrac{e^y - 2y}{2x + 3y^2 - xe^y}$ **27.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^y}$ **29.** $5/4$ **31.** $\dfrac{1}{4\sqrt{15}}$ **33.** $\dfrac{7}{\sqrt{1 - 49x^2}}$ **35.** $\dfrac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

37. $\tan^{-1} x + \dfrac{x}{x^2+1}$ **39.** $\dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$ **41.** $\dfrac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}$ **43.** $\dfrac{3(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}$ **45.** 0

47. $\cos y = x$, οπότε η έμμεση παραγώγιση δίνει $-\sin(y)y' = 1$ ή $\dfrac{dy}{dx} = -\csc y = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

49. Αφού $1 + \tan^2 y = \sec^2 y$ και $\sec y = x, \Rightarrow \tan y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$. Αν $x \geq 1$, $\operatorname{arcsec} x = y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan y \geq 0$. Αν $x \leq -1$, $\operatorname{arcsec} x = y \in \left(\pi/2, \pi\right] \Rightarrow \tan y = -\sqrt{x^2-1} \leq 0$.

51. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της $x + yx^{-1} = 1$ με x παίρνουμε $x^2 + y = x$, οπότε οι δύο εκφράσεις ορίζουν την ίδια καμπύλη εκτός αν $x = 0$. Αφού $y = x - x^2$, η παραγώγιση της πρώτης μορφής δίνει

$$y' = \frac{y}{x} - x = \frac{x - x^2}{x} - x = 1 - 2x$$

53. $\dfrac{1}{4}$ **55.** $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ **57.** $y = -2x + 2$ **59.** $y = -\dfrac{12}{5}x + \dfrac{32}{5}$ **61.** $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{4}{3}$

63. Η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια στα σημεία $(-1, \sqrt{3})$ και $(-1, -\sqrt{3})$.

65. Η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια στα

$$\left(\frac{2\sqrt{78}}{13}, -\frac{4\sqrt{78}}{13}\right) \qquad \text{και} \qquad \left(-\frac{2\sqrt{78}}{13}, \frac{4\sqrt{78}}{13}\right)$$

67. Στο $(0, 2^{1/4})$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2^{1/4}-1}{2^{11/4}}$ και η εφαπτόμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = \left(\frac{-2^{1/4}-1}{2^{11/4}}\right)x + 2^{1/4}$. Στο $(0, -2^{1/4})$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2^{1/4}}{2^{11/4}}$ και η εφαπτόμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = \left(\frac{1-2^{1/4}}{2^{11/4}}\right)x - 2^{1/4}$

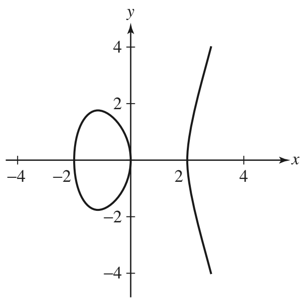
69. $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ **71.** $x = \dfrac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{2}$

73.

- Στο $(1, 2)$ $y' = \dfrac{1}{3}$
- Στο $(1, -2)$ $y' = -\dfrac{1}{3}$
- Στο $(1, \frac{1}{2})$ $y' = \dfrac{11}{12}$
- Στο $(1, -\frac{1}{2})$ $y' = -\dfrac{11}{12}$

75. Υπάρχουν κατακόρυφες εφαπτόμενες ευθείες σε έξι σημεία $(\pm 1, 0)$ και $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

77. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y}{3x^2 - 4}$, προκύπτει ότι $\frac{dx}{dy} = 0$ όταν $y = 0$, οπότε η εφαπτόμενη ευθεία σε αυτή την καμπύλη είναι κατακόρυφη στα σημεία όπου η καμπύλη τέμνει τον άξονα των x.

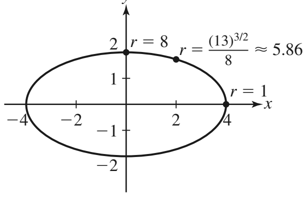


79. Με έμμεση παραγώγιση, $y' = \frac{y}{1-x}$ και $y'' = \frac{2y}{(1-x)^2}$. Επιλύοντας την αρχική εξίσωση ως προς y, παίρνουμε $y = \frac{2}{1-x}$. Παραγωγίζοντας, παίρνουμε $y' = \frac{2}{(1-x)^2}$ και $y'' = \frac{4}{(1-x)^3}$. Αν αντικαταστήσουμε την $y = \frac{2}{1-x}$ στις εκφράσεις για τις y' και y'' που πήραμε με έμμεση παραγώγιση, λαμβάνουμε τις εκφράσεις που παίρνουμε με άμεση παραγώγιση.

81. $y'' = (y^2 - 2xyy')/y^4 = (y^2 - 2xyx/y^2)/y^4 = (y^3 - 2x^2)/y^5$

83. (α) $y' = -y^2/(2xy+1), y'|(1,1) = -1/3$ (β) $y'' = (2y^3 - 2xy^2y' - 2yy')/(2xy+1)^2, y''|(1,1) = 10/27$

85. (α) $r = \dfrac{(16y^2 + x^2)^{3/2}}{64}$ (β) Στο $(4, 0)$ $r = 1$. Στο $(2, \sqrt{3})$ $r = \dfrac{13^{3/2}}{8} \approx 5.86$. Στο $(0, 2)$ $r = 8$.

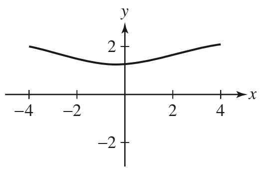


87. $\dfrac{dy}{dt} = -6x^{-3}\dfrac{dx}{dt}$ **89.** $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\left(\dfrac{y - 4x}{4y^3 - x}\right)$

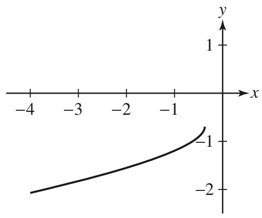
91. Οι παράγωγοι αυτών των δύο καμπυλών είναι $y' = x/y$ και $y' = -y/x$ αντίστοιχα. Οπότε σε οποιοδήποτε σημείο (x, y) που ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις, η κλίση της μίας εφαπτόμενης ευθείας θα είναι η αντίθετη και αντίστροφη της άλλης κλίσης. Δηλαδή, οι εφαπτόμενες ευθείες θα είναι κάθετες.

93.

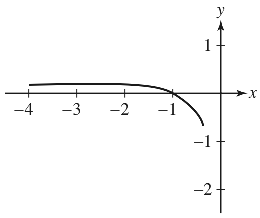
• Άνω κλάδος:



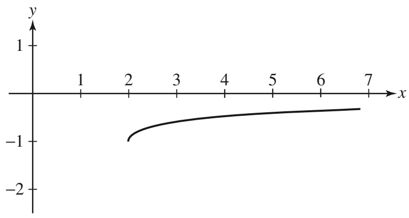
• Κάτω κλάδος της κάτω αριστερής καμπύλης:



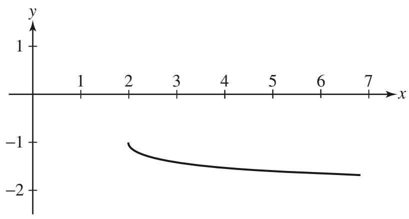
• Άνω μέρος της κάτω αριστερής καμπύλης:



• Άνω μέρος της κάτω δεξιάς καμπύλης:



• Κάτω μέρος της κάτω δεξιάς καμπύλης:



Ενότητα 3.9 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $\ln 4$ **2.** $\dfrac{1}{10}$ **3.** e^2 **4.** e^3 **5.** $y^{(100)} = \cosh x$ και $y^{(101)} = \sinh x$

Ενότητα 3.9 Ασκήσεις

1. $\frac{d}{dx} x \ln x = \ln x + 1$ **3.** $\frac{d}{dx} 2^{x^3} = 2^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot \ln 2$ **5.** $\frac{d}{dx} \ln(9x^2 - 8) = \frac{18x}{9x^2 - 8}$ **7.** $\frac{d}{dx} (\ln x)^2 = \frac{2}{x} \ln x$

9. $\frac{d}{dx} e^{(\ln x)^2} = \frac{2}{x} \ln x \cdot e^{(\ln x)^2}$ **11.** $\frac{d}{dx} \ln(\ln x) = \frac{1}{x \ln x}$ **13.** $\frac{d}{dx} (\ln(\ln x))^3 = \frac{3(\ln(\ln x))^2}{x \ln x}$

15. $\frac{d}{dx} \ln((x+1)(2x+9)) = \frac{4x+11}{(x+1)(2x+9)}$ **17.** $\frac{d}{dx} 11^x = \ln 11 \cdot 11^x$

19. $\frac{d}{dx} \frac{2^x - 3^{-x}}{x} = \frac{x(2^x \ln 2 + 3^{-x} \ln 3) - (2^x - 3^{-x})}{x^2}$ **21.** $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2}$ **23.** $\frac{d}{dt} \log_3(\sin t) = \frac{\cot t}{\ln 3}$

25. $y = 36 \ln 6(x-2)+36$ **27.** $y = 3^{20} \ln 3(t-2)+3^{18}$ **29.** $y = 5^{-1}$ **31.** $y = -1(t-1)+\ln 4$ **33.** $y = \frac{12}{25 \ln 5}(z-3)+2$

35. $y = \frac{8}{\ln 2}\left(w - \frac{1}{8}\right)-3$ **37.** $y' = 2x+14$ **39.** $y' = 3x^2-12x-79$ **41.** $y' = \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)}\right)$

43. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x+2)}{(2x+1)(3x+2)}} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x+2}\right)$ **45.** $\frac{d}{dx} x^{3x} = x^{3x}(3 + 3\ln x)$

47. $\frac{d}{dx} x^{e^x} = x^{e^x}\left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln x\right)$ **49.** $y' = x^{\cos x}\big((\cos x)/x - \sin x \ln x\big)$ **51.** $\frac{d}{dx} \sinh(9x) = 9\cosh(9x)$

53. $\frac{d}{dt} \cosh^2(9-3t) = -6\cosh(9-3t)\sinh(9-3t)$ **55.** $\frac{d}{dx}\sqrt{\cosh x + 1} = \frac{1}{2}(\cosh x + 1)^{-1/2} \sinh x$

57. $\frac{dy}{dt} = -\frac{\operatorname{csch} t(\operatorname{csch} t + 2\operatorname{sech} t)}{(1+\tanh t)^2}$ **59.** $\frac{d}{dx} \sinh(\ln x) = \frac{\cosh(\ln x)}{x}$ **61.** $\frac{d}{dx} \tanh(e^x) = e^x \operatorname{sech}^2(e^x)$

63. $\frac{d}{dx} \operatorname{sech}(\sqrt{x}) = -\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sech}\sqrt{x}\tanh\sqrt{x}$ **65.** $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x \coth x = -\operatorname{csch} x \coth x$ **67.** $\frac{d}{dx} \cosh^{-1}(3x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}$

69. $\frac{d}{dx} (\sinh^{-1}(x^2))^3 = 3(\sinh^{-1}(x^2))^2 \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$ **71.** $\frac{d}{dx} e^{\cosh^{-1} x} = e^{\cosh^{-1} x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

73. $\frac{d}{dt} \tanh^{-1}(\ln t) = \frac{1}{t(1-(\ln t)^2)}$ **75.** $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cosh x} = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\left(\frac{1}{\cosh x}\right)\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

79. Στο $h = 60$ m, $v \approx 15.57$ m/s και $dv/dh \approx 0.052$ m/s ανά μέτρο.

81. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \left(\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}\right) a^x$ Εφόσον αυτό το όριο είναι ίσο με την $f'(x)$ και αφού $f'(x) = (\ln a)a^x$, έπεται ότι $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln a$.

85. (α) $\frac{dP}{dT} = -\frac{1}{T \ln 10}$ (β) $\Delta P \approx -0.054$ **87.** $\frac{d}{dx} e^{n \ln x} = (e^{n \ln x})(n)\left(\frac{1}{x}\right) = n(x^n)(x^{-1}) = nx^{n-1}$

Ενότητα 3.10 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Όταν $x = -3$, $\frac{dy}{dt} = -18$. Όταν $x = 2$, $\frac{dy}{dt} = 12$. Όταν $x = 5$, $\frac{dy}{dt} = 30$.
2. Όταν $x = -4$, $\frac{dy}{dt} = 96$. Όταν $x = 2$, $\frac{dy}{dt} = 24$. Όταν $x = 6$, $\frac{dy}{dt} = 216$.
3. Έστω ότι s και V παριστάνουν το μήκος της πλευράς και τον αντίστοιχο όγκο ενός κύβου. Βρείτε το $\frac{dV}{dt}$ αν $\frac{ds}{dt} = 0.5$ cm/s.
4. $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ **5.** Βρείτε το $\frac{dh}{dt}$ αν $\frac{dV}{dt} = 2$ cm^3/min. **6.** Βρείτε το $\frac{dV}{dt}$ αν $\frac{dh}{dt} = 1$ cm/min.

Ενότητα 3.10 Ασκήσεις

1. 0.039 ft/min **3.** (α) $100\pi \approx 314.16$ m^2/min (β) $24\pi \approx 75.40$ m^2/min **5.** 27000π cm^3/min

7. 9600π cm^2/min **9.** Όταν $h = 1$, $\frac{dh}{dt} = \frac{9}{8\pi} \approx 0.36$ m/min. Όταν $h = 2$, $\frac{dh}{dt} = \frac{9}{2\pi} \approx 1.43$ m/min.
11. -0.632 m/s **13.** $x \approx 4.737$ m, $\frac{dx}{dt} \approx 0.405$ m/s **15.** $\frac{1000\pi}{3} \approx 1047.20$ cm^3/s **17.** 0.675 m/s

19. (α) 594.6 km/h (β) 0 km/h **21.** 1.22 km/min **23.** $\frac{1200}{241} \approx 4.98$ rad/h

25. (α) $\frac{100\sqrt{13}}{13} \approx 27.735$ km/h (β) 112.963 km/h **27.** $\sqrt{16.2} \approx 4.025$ m **29.** $\frac{5}{3}$ m/s **31.** -1.92 kPa/min

33. $-\frac{1}{8}$ rad/s **35.** (β) Όταν $x = 1$, $L'(t) = 0$, όταν $x = 2$, $L'(t) = \frac{16}{3}$ **37.** $-4\sqrt{5} \approx -8.94$ ft/s **39.** -0.79 m/min

41. Έστω ότι η εξίσωση $y = f(x)$ περιγράφει το σχήμα της τροχιάς του τρένου. Παίρνοντας την παράγωγο $\frac{d}{dt}$ και των δύο πλευρών αυτής της εξίσωσης έχουμε $\frac{dy}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$.

43. (α) Ο τύπος της απόστασης δίνει

$$L = \sqrt{(x - r\cos\theta)^2 + (-r\sin\theta)^2}$$

Επομένως

$$L^2 = (x - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta$$

(β) Από το (α) έχουμε

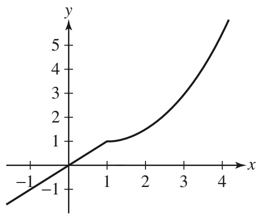
$$0 = 2(x - r\cos\theta)\left(\frac{dx}{dt} + r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) + 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

(γ) $-80\pi \approx -251.33$ cm/min

45. (γ) $\frac{3\sqrt{5}}{250} \approx 0.027$ m/min

Κεφάλαιο 3 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. 3, η κλίση της τέμνουσας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(2, 7)$ και $(0, 1)$ στη γραφική παράσταση της $f(x)$.
3. $\approx \frac{7}{3}$, η τιμή του πηλίκου διαφορών είναι μεγαλύτερη από την τιμή της παραγώγου.
5. $f'(1) = 1$, $y = x - 1$ **7.** $f'(4) = -\frac{1}{16}$, $y = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{2}$ **9.** $-2x$ **11.** $\frac{1}{(2-x)^2}$ **13.** $f'(1)$, όπου $f(x) = \sqrt{x}$
15. $f'(\pi)$, όπου $f(t) = \sin t\cos t$ **17.** $f(4) = -2$, $f'(4) = 3$ **19.** Η (Γ) είναι η γραφική παράσταση της $f'(x)$.
21.



23. (α) 8.05 cm/έτος (β) Μεγαλύτερο στο πρώτο μισό
(γ) $h'(3) \approx 7.8$ cm/έτος, $h'(8) \approx 6.0$ cm/έτος $\left(\text{χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του πηλίκου διαφορών } h'(t) \approx \frac{h(t+1)-h(t)}{1}\right)$

25. Η $A'(t)$ μετράει τον ρυθμό μεταβολής της παραγωγής οχημάτων στις Ηνωμένες Πολιτείες,
$A'(1971) \approx 0.25$ εκατομμύρια οχήματα/έτος,
$\left(\text{χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του πηλίκου διαφορών } A'(t) \approx \frac{A(t+1)-A(t)}{1}\right)$ η $A'(1974)$ θα ήταν αρνητική.

27. (β) **29.** $15x^4 - 14x$ **31.** $-7.3t^{-8.3}$ **33.** $\dfrac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)^2}$ **35.** $6(4x^3 - 9)(x^4 - 9x)^5$ **37.** $27x(2 + 9x^2)^{1/2}$

39. $\dfrac{2-z}{2(1-z)^{3/2}}$ **41.** $2x-\dfrac{3}{2}x^{-5/2}$ **43.** $\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-1/2}\left(1+\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-1/2}\left(1+\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)\right)$

45. $-3t^{-4}\sec^2(t^{-3})$ **47.** $-6\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x$ **49.** $\dfrac{1+\sec t-t\sec t\tan t}{(1+\sec t)^2}$ **51.** $\dfrac{8\csc^2\theta}{(1+\cot\theta)^2}$

53. $y'=-100x^{99}\sin(x^{100})$ **55.** $-36e^{-4x}$ **57.** $(4-2t)e^{4t-t^2}$ **59.** $\dfrac{8x}{4x^2+1}$ **61.** $\dfrac{2\ln s}{s}$ **63.** $\cot\theta$

65. $\sec(z+\ln z)\tan(z+\ln z)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$ **67.** $-2(\ln 7)(7^{-2x})$ **69.** $\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}\cdot\dfrac{1}{x}$ **71.** $-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}\csc^{-1}x}$

73. $\dfrac{2\ln s}{s}s^{\ln s}$ **75.** $2(\sin^2 t)^t(t\cot t+\ln\sin t)$ **77.** $2t\cosh(t^2)$ **79.** $\dfrac{e^x}{1-e^{2x}}$ **81.** $\alpha=0$ και $\alpha>1$ **83.** -27

85. $-\dfrac{57}{16}$ **87.** -18 **89.** $(-1,-1)$ και $(3,7)$ **91.** $a=\dfrac{1}{6}$ **93.** $72x-10$ **95.** $-(2x+3)^{-3/2}$

97. $8x^2\sec^2(x^2)\tan(x^2)+2\sec^2(x^2)$ **99.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y^2}$ **101.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+4x}{1-2xy}$ **103.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

105. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{4y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4y^2-x^2}{16y^3}$

107. Για το διάγραμμα στα αριστερά, η κόκκινη, η πράσινη και η μπλε καμπύλη είναι αντίστοιχα οι γραφικές παραστάσεις των f, f' και f''. Για το διάγραμμα στα δεξιά, η πράσινη, η κόκκινη και η μπλε καμπύλη είναι αντίστοιχα οι γραφικές παραστάσεις των f, f' και f''.

109. $\dfrac{(x+1)^3}{(4x-2)^2}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4}{2x-1}\right)$ **111.** $4e^{(x-1)^2}e^{(x-3)^2}(x-2)$ **113.** $\dfrac{e^{3x}(x-2)^2}{(x+1)^2}\left(3+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x+1}\right)$

115. $\frac{dh}{dt}=\frac{20}{240+15(4)}=\frac{1}{15}$ m/min **117.** $\frac{ds}{dt}=\frac{476}{6\sqrt{5536}}\approx 1.066$ km/min

119. (α) $\frac{d\theta}{dt}=-\frac{5}{4\sqrt{3}}\approx -0.72$ rad/s

(β) $\frac{dD}{dt}=\dfrac{16+24-\frac{20}{\sqrt{3}}-12\sqrt{3}-8\sqrt{3}}{8\sqrt{2-\sqrt{3}}}\approx -1.49$ cm/s

$\frac{dD}{dt}=\frac{15-10\sqrt{3}}{3\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Κεφάλαιο 4

Ενότητα 4.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Σωστό **2.** $g(1.2)-g(1)\approx 0.8$ **3.** $f(2.1)\approx 1.3$

4. Σύμφωνα με τη γραμμική προσέγγιση προκύπτει ότι έως ενός μικρού σφάλματος η μεταβολή του εξερχόμενου Δf είναι ευθέως ανάλογη με τη μεταβολή του εισερχόμενου Δx όταν το Δx είναι μικρό.

Ενότητα 4.1 Ασκήσεις

1. $\Delta f\approx 0.12$ **3.** $\Delta f\approx -0.00222$ **5.** $\Delta f\approx 0.003333$ **7.** $\Delta f\approx 0.0074074$

9. $\Delta f\approx 0.05$, το σφάλμα είναι 0.000610, το ποσοστιαίο σφάλμα είναι 1.24%.

11. $\Delta f\approx -0.03$, το σφάλμα είναι 0.0054717, το ποσοστιαίο σφάλμα είναι 22.31%.

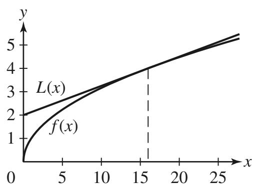
13. $\Delta f\approx 0.1$, $f(26)\approx 5.1$, σφάλμα ≈ 0.00098

15. $\Delta f\approx -0.0005$, $f(101)\approx 0.0995$, σφάλμα ≈ 0.000004

17. $\Delta f \approx \dfrac{1}{12} \approx 0.08333, f(9) \approx 2.08333$, σφάλμα ≈ 0.00325
19. $\Delta f \approx -0.1, f(-0.1) \approx 0.9$, σφάλμα ≈ 0.0048 **21.** $L(x) = 4x - 3, f(0.96) \approx 0.84$
23. $L(x) = x - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1.1\pi}{4}\right) \approx 0.5785$ **25.** $L(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1, f(0.08) \approx 0.96$
27. $L(x) = \dfrac{1}{2}e(x+1), f(0.85) \approx 2.5144$ **29.** $\Delta y \approx -0.007$ **31.** $\Delta y \approx -0.026667$
33. $f(4.03) \approx 2.01$ **35.** Η διαφορά $\sqrt{2.1} - \sqrt{2}$ είναι μεγαλύτερη από την $\sqrt{9.1} - \sqrt{9}$.
37. $R(9) = 25110$ ευρώ, αν η p αυξηθεί κατά 0.5 ευρώ, τότε $\Delta R \approx 585$ ευρώ, από την άλλη πλευρά, αν η p μειωθεί κατά 0.5 ευρώ, τότε $\Delta R \approx -585$ ευρώ.
39. $\Delta L \approx -0.00171$ cm
41. (α) $\Delta P \approx -0.434906$ kilopascals (kPa) (β) Η πραγματική μεταβολή της πίεσης είναι -0.418274 kPa, το ποσοστιαίο σφάλμα είναι 3.98%.
43. (α) $\Delta W \approx W'(R)\Delta x = -\dfrac{2wR^2}{R^3}h = -\dfrac{2wh}{R} \approx -0.0005wh$ (β) $\Delta W \approx -0.7$ λίβρες (lb)
45. (α) $\Delta h \approx 0.71$ cm (β) $\Delta h \approx 1.02$ cm (γ) Το φαινόμενο είναι μεγαλύτερο σε μεγαλύτερες ταχύτητες.
47. (α) Αν $\theta = 34°$ (π.χ., $t = \frac{17}{90}\pi$), τότε

$$\Delta s \approx s'(t)\Delta t = \frac{625}{16}\cos\left(\frac{17}{45}\pi\right)\Delta t = \frac{625}{16}\cos\left(\frac{17}{45}\pi\right)\Delta\theta \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.255\Delta\theta$$

(β) Αν $\Delta\theta = 2°$, αυτό δίνει $\Delta s \approx 0.51$ ft, περίπτωση στην οποία η βολή δεν θα ήταν επιτυχημένη έχοντας αποκλίνει κατά μισό πόδι.
(γ) $\Delta s \approx 2.897$ ft
49. $\Delta V \approx 4\pi(25)^2(0.5) \approx 3927$ cm^3, $\Delta S \approx 8\pi(25)(0.5) \approx 314.2$ cm^2
51. $P = 6$ atm, $\Delta P \approx \pm 0.45$ atm **53.** $f(2) = 8$
55. $\sqrt{16.2} \approx L(16.2) = 4.025$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της L φαίνονται παρακάτω. Επειδή η γραφική παράσταση της L βρίσκεται πάνω από αυτή της f, περιμένουμε ότι η εκτίμηση από τη γραμμική προσέγγιση είναι πολύ μεγάλη.



57. $\dfrac{1}{\sqrt{17}} \approx L(17) \approx 0.24219$, το ποσοστιαίο σφάλμα είναι 0.14%.
59. $\dfrac{1}{(10.03)^2} \approx L(10.03) = 0.00994$, το ποσοστιαίο σφάλμα είναι 0.0027%.
61. $(64.1)^{1/3} \approx L(64.1) \approx 4.002083$, το ποσοστιαίο σφάλμα είναι 0.000019%.
63. $\cos^{-1}(0.52) \approx L(0.02) = 1.024104$, το ποσοστιαίο σφάλμα είναι 0.015%.
65. $e^{-0.012} \approx L(-0.012) = 0.988$, το ποσοστιαίο σφάλμα είναι 0.0073%.
67. Έστω $f(x) = \sqrt{x}$. Τότε $f(9) = 3$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ και $f'(9) = \frac{1}{6}$. Επομένως, από τη γραμμική προσέγγιση

$$f(9+h) - f(9) = \sqrt{9+h} - 3 \approx \frac{1}{6}h$$

Επιπλέον, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, οπότε $|f''(x)| = \frac{1}{4}x^{-3/2}$. Επειδή αυτή είναι μια φθίνουσα συνάρτηση, προκύπτει ότι για $x \geq 9$

$$K = \max|f''(x)| \leq |f''(9)| = \frac{1}{108} < 0.01$$

Από τον παρακάτω πίνακα βλέπουμε ότι για $h = 10^{-n}$, $1 \leq n \leq 4$, $E \leq \frac{1}{2}Kh^2$.

h	$E = \left\lvert\sqrt{9+h} - 3 - \frac{1}{6}h\right\rvert$	$\frac{1}{2}Kh^2$
10^{-1}	4.604×10^{-5}	5.00×10^{-5}
10^{-2}	4.627×10^{-7}	5.00×10^{-7}
10^{-3}	4.629×10^{-9}	5.00×10^{-9}
10^{-4}	4.627×10^{-11}	5.00×10^{-11}

69. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(2,1)} = -\dfrac{1}{3}$, $y \approx L(2.1) = 0.967$ **71.** $L(x) = -\dfrac{14}{25}x + \dfrac{36}{25}$, $y \approx L(-1.1) = 2.056$

73. Έστω $f(x) = x^2$. Τότε

$$\Delta f = f(5+h) - f(5) = (5+h)^2 - 5^2 = h^2 + 10h$$

και

$$E = |\Delta f - f'(5)h| = |h^2 + 10h - 10h| = h^2 = \frac{1}{2}(2)h^2 = \frac{1}{2}Kh^2$$

Ενότητα 4.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ένα κρίσιμο σημείο είναι μια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στο οποίο είτε $f'(x) = 0$ είτε η $f'(x)$ δεν υπάρχει.
2. (β) **3.** (β)
4. (α) Λάθος. Για παράδειγμα, το $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(x) = x^3$ αλλά δεν είναι ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο. (β) Λάθος. Για παράδειγμα, το μέγιστο της $f(x) = x^2 + 1$ στο $[1, 2]$ είναι 5, που παρατηρείται στο $x = 2$, αλλά $f'(2) \neq 0$. (γ) Σωστό (δ) Λάθος. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x^3$ έχει μοναδικό τοπικό ελάχιστο στο $[-1, 3]$ στο $x = 0$, αλλά το ολικό ελάχιστο στο $[-1, 3]$ παρατηρείται στο άκρο $x = 3$.

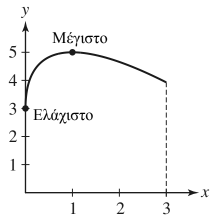
Ενότητα 4.2 Ασκήσεις

1. (α) 3, 5, 7 (β) Μέγιστο: 6, ελάχιστο: 1 (γ) Τοπικό μέγιστο 5 στο $x = 5$, τοπικά ελάχιστα: 3 στο $x = 3$ και 1 στο $x = 7$ (δ) Το $[2, 6]$ είναι ένα παράδειγμα. (ε) Το $(0, 2)$ είναι ένα παράδειγμα. (στ) Το $(4, 6)$ είναι ένα παράδειγμα.

3. $x = 1$ **5.** $x = -3$ και $x = 6$ **7.** $x = 2$ **9.** $x = \pm 1$ **11.** $t = 3$ και $t = -1$

13. $x = -\frac{1}{2}$ **15.** $\theta = \dfrac{n\pi}{2}$ **17.** $x = \dfrac{1}{e}$ **19.** $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$

21. (α) Κρίσιμο σημείο στο $x = 2$, $f(2) = -1$ (β) Ελάχιστο: -1, μέγιστο: 17 (γ) Ελάχιστο: 1, μέγιστο: 71
23. $x = \dfrac{\pi}{4}$, μέγιστη τιμή: $\sqrt{2}$, ελάχιστη τιμή: 1 **25.** Μέγιστο $= 5$, ελάχιστο $= 3$.



27. Ελάχιστο: $f(-1) = 3$, μέγιστο: $f(2) = 21$ **29.** Ελάχιστο: $f(0) = 0$, μέγιστο: $f(3) = 9$
31. Ελάχιστο: $f(4) = -24$, μέγιστο: $f(6) = 8$ **33.** Ελάχιστο $= -19$, μέγιστο $= 3$.
35. Ελάχιστο: $f(1) = 5$, μέγιστο: $f(2) = 28$ **37.** Ελάχιστο: $f(2) = -128$, μέγιστο: $f(-2) = 128$
39. Ελάχιστο: $f(6) = 18.5$, μέγιστο: $f(5) = 26$ **41.** Ελάχιστο: $f(1) = -1$, μέγιστο: $f(0) = f(3) = 0$

43. Ελάχιστο: $f(0) = 2\sqrt{6} \approx 4.9$, μέγιστο:$f(2) = 4\sqrt{2} \approx 5.66$

45. Ελάχιστο: $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -0.589980$, μέγιστο: $f(4) \approx 0.472136$

47. Ελάχιστο: $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, μέγιστο:$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

49. Ελάχιστο: $f(0) = -1$, μέγιστο: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \approx -0.303493$

51. Τα $x = \frac{1}{3}$ και $x = -1$ είναι κρίσιμα σημεία. Ελάχιστο: -2, μέγιστο: 10.

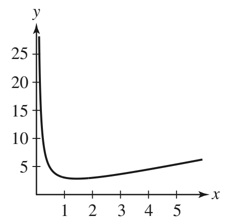
53. Ελάχιστο: $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.685$, μέγιστο: $g\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{5}{3}\pi + \sqrt{3} \approx 6.968$

55. Ελάχιστο: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0.570796$, μέγιστο: $f(0) = 0$

57. Ελάχιστο: $f(1) = 0$, μέγιστο: $f(e) = e^{-1} \approx 0.367879$

59. Ελάχιστο: $f(1) = 3e - e^2 \approx 0.765789$, μέγιστο: $f\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{9}{4}$

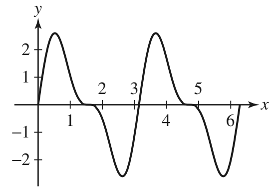
61.



Φαίνεται να υπάρχει ένα ελάχιστο μεταξύ του $x = 1$ και του $x = 2$. Εφόσον $f(x) \to \infty$ καθώς το x τείνει στο 0 από δεξιά, δεν υπάρχει μέγιστη τιμή. Χρησιμοποιώντας τον λογισμό, η ελάχιστη τιμή είναι $2\sqrt{2}$ και παρατηρείται για $x = \sqrt{2}$.

63. (δ) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$,$\frac{3\pi}{2}$ και $\frac{11\pi}{6}$, η μέγιστη τιμή είναι $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{7\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και η ελάχιστη τιμή είναι $f(\frac{5\pi}{6}) = f(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(ε) Μπορούμε να δούμε ότι υπάρχουν έξι σημεία όπου η γραφική παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη μεταξύ του 0 και του 2π, όπως προβλέψαμε. Υπάρχουν τέσσερα τοπικά ακρότατα και δύο σημεία, στα $(\frac{\pi}{2}, 0)$ και $(\frac{3\pi}{2}, 0)$, όπου η γραφική παράσταση δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο.



65. Κρίσιμο σημείο: $x = 2$, ελάχιστη τιμή: $f(2) = 0$, μέγιστη: $f(0) = f(4) = 2$

67. Κρίσιμο σημείο: $x = 2$, ελάχιστη τιμή: $f(2) = 0$, μέγιστη: $f(4) = 20$ **69.** $c = 1$ **71.** $c = \frac{15}{4}$

73. $f(0) < 0$ και $f(2) > 0$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Δεν μπορεί να υπάρχει άλλη ρίζα επειδή $f'(x) \geq 4$ για κάθε x.

75. Δεν μπορεί να υπάρχει ρίζα $c > 0$ επειδή $f'(x) > 4$ για κάθε $x > 0$. **79.** $b \approx 2.86$

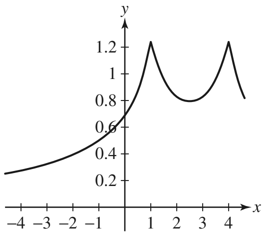
81. (α) $F = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{v_2^2}{v_1^2}\right)\left(1 + \dfrac{v_2}{v_1}\right)$ (β) Η $F(r)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν $r = 1/3$. (γ) Αν το v_2 ήταν 0, τότε δεν θα πέρναγε καθόλου αέρας μέσα από την τουρμπίνα, το οποίο δεν είναι ρεαλιστικό.

85.

- Η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 1]$ είναι

$$f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{1/(b-a)}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a/(b-a)} - \left(\frac{a}{b}\right)^{b/(b-a)}$$

- $\dfrac{1}{4}$ **87.** Κρίσιμα σημεία: $x = 1$, $x = 4$ και $x = \frac{5}{2}$, μέγιστη τιμή: $f(1) = f(4) = \frac{5}{4}$, ελάχιστη τιμή: $f(-5) = \frac{17}{70}$



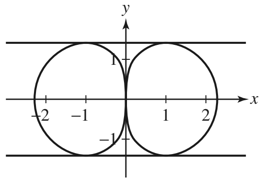
89. (α) Επομένως, υπάρχουν τέσσερα σημεία στα οποία η παράγωγος είναι μηδέν:

$$(-1, -\sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (1, \sqrt{2})$$

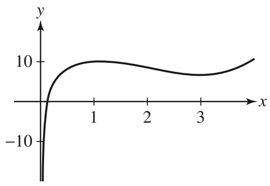
Υπάρχουν επίσης κρίσιμα σημεία όπου δεν υπάρχει η παράγωγος:

$$(0, 0), (\pm\sqrt[4]{27}, 0)$$

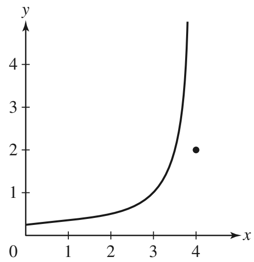
(β) Η καμπύλη $27x^2 = (x^2 + y^2)^3$ και οι οριζόντιες ασύμπτωτές της σχεδιάζονται εδώ.



91.



93.



95. Αν $f(x) = a \sin x + b \cos x$, τότε $f'(x) = a \cos x - b \sin x$, οπότε η $f'(x) = 0$ συνεπάγεται ότι $a \cos x - b \sin x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\tan x = \frac{a}{b}$. Τότε

$$\sin x = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{και} \quad \cos x = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Επομένως,

$$f(x) = a \sin x + b \cos x = a\frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b\frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

97. Έστω $f(x) = x^2 + rx + s$ και υποθέστε ότι η $f(x)$ παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Αυτό θα εξασφαλίσει ότι η f έχει δύο πραγματικές ρίζες. Από τον τύπο του τριωνύμου οι ρίζες της f είναι

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4s}}{2}$$

Παρατηρήστε ότι το μέσο μεταξύ αυτών των ριζών είναι

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-r+\sqrt{r^2-4s}}{2}+\frac{-r-\sqrt{r^2-4s}}{2}\right)=-\frac{r}{2}$$

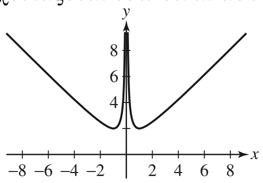
Έπειτα, $f'(x) = 2x + r = 0$ όταν $x = -\frac{r}{2}$ και, επειδή η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή που ανοίγει προς τα πάνω, προκύπτει ότι το $f(-\frac{r}{2})$ είναι ελάχιστο.

99. $b > \frac{1}{4}a^2$

101.

• Έστω f μια συνεχής συνάρτηση με $f(a)$ και $f(b)$ τοπικά ελάχιστα στο διάστημα $[a, b]$. Από το Θεώρημα 1, η $f(x)$ πρέπει να έχει ελάχιστο και μέγιστο στο $[a, b]$. Εφόσον τα τοπικά ελάχιστα παρατηρούνται στα $f(a)$ και $f(b)$, το μέγιστο πρέπει να παρατηρείται σε κάποιο άλλο σημείο του διαστήματος, ας πούμε c, όπου το $f(c)$ είναι ένα τοπικό μέγιστο.

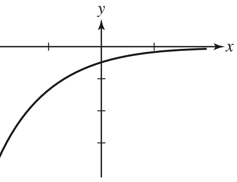
• Η γραφική παράσταση που σχεδιάζεται εδώ είναι ασυνεχής στο $x = 0$.



Ενότητα 4.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $m = 3$ **2.** (γ)

3. Ναι. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει μια συνάρτηση που παίρνει μόνο αρνητικές τιμές αλλά έχει θετική παράγωγο.



4. (α) Το $f(c)$ πρέπει να είναι τοπικό μέγιστο. (β) Όχι

5. $f(x) = \sec x$ και $f(x) = \csc x$ **6.** Η $f(x) = |\sin x|$ είναι ένα παράδειγμα.

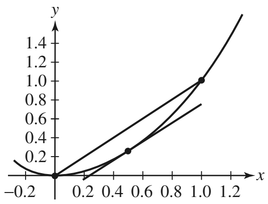
Ενότητα 4.3 Ασκήσεις

1. $c = 4$ **3.** $c = \dfrac{3\pi}{4}$ ή $\dfrac{7\pi}{4}$ **5.** $c = \pm\sqrt{7}$ **7.** $c = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-e^{-6}}{6}\right)$

9. Η κλίση της τέμνουσας ευθείας μεταξύ του $x = 0$ και του $x = 1$ είναι

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$$

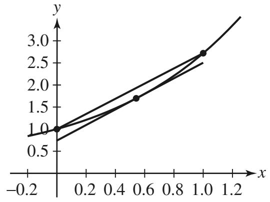
Εφόσον $f'(x) = 2x$, λύνοντας την $2c = 1$ παίρνουμε $c = \dfrac{1}{2}$. Μια γραφική παράσταση της f και της εφαπτόμενης ευθείας φαίνεται εδώ:



11. Η κλίση της τέμνουσας ευθείας μεταξύ του $x = 0$ και του $x = 1$ είναι

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = e - 1$$

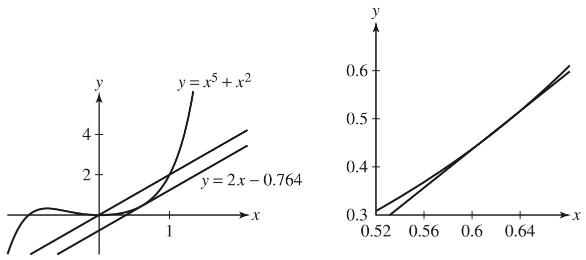
Εφόσον $f'(x) = e^x$, λύνοντας την $e^c = e - 1$ παίρνουμε $c = \ln(e - 1)$. Μια γραφική παράσταση της f και της εφαπτόμενης ευθείας φαίνεται εδώ:



13. Η κλίση μεταξύ του $x = 0$ και του $x = 1$ είναι

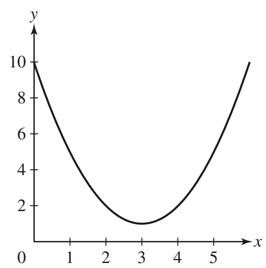
$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 0}{1} = 2$$

Φαίνεται ότι η τετμημένη x του σημείου επαφής είναι περίπου 0.62.

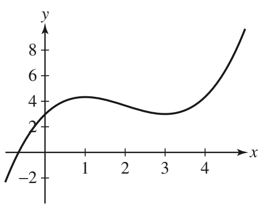


15. Η παράγωγος είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty, 1) \cup (3, 5)$ και αρνητική στα διαστήματα $(1, 3) \cup (5, 6)$. **17.** Το $f(2)$ είναι τοπικό μέγιστο. Το $f(4)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

19.



21.



23. Κρίσιμο σημείο: $c = 3$, αφού η παράγωγος αλλάζει πρόσημο από $+$ σε $-$, αυτό είναι σημείο τοπικού μεγίστου.
25. Κρίσιμα σημεία: $c = -2$ και $c = 0$. Αφού η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο από $+$ σε $-$ στο $c = -2$, αυτό είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Αφού η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο από $-$ σε $+$ στο $c = 0$, αυτό είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

27. $c = \frac{7}{2}$

x	$\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$	$7/2$	$\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

29. $c = 0, 8$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 8)$	8	$(8, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

31. $c = -2, -1, 1$

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

33. $c = -2, -1$

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

35. $c = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\neq$	$\nearrow$

37. $c = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/5}$

x	$(0, \left(\frac{3}{2}\right)^{2/5})$	$\frac{3}{2}^{2/5}$	$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2/5}, \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$

39. Κρίσιμα σημεία: $x = -1$ (τοπικό μέγιστο), $x = 1$ (τοπικό ελάχιστο), $(-\infty, -1)$ αύξουσα, $(-1, 0)$ φθίνουσα, $(0, 1)$ αύξουσα, $(1, \infty)$ αύξουσα

41. $c = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

43. $c = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\neg$	$\nearrow$

45. $c = \frac{\pi}{2}$ και $c = \pi$

x	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	π	$(\pi, 2\pi)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

47. $c = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ και $\frac{11\pi}{6}$

x	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$	$\frac{7\pi}{6}$	$\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

x	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$	$\frac{11\pi}{6}$	$\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$
f'	0	$-$	0	$+$
f	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

49. $c = 0$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$

51. $c = -\frac{\pi}{4}$

x	$\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

53. $c = \pm 1$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$

55. Κρίσιμο σημείο: $x = 2$ (τοπικό ελάχιστο), $(-\infty, 0)$ αύξουσα, $(0, 2)$ φθίνουσα, $(2, \infty)$ αύξουσα

57. $c = 0$, η f' είναι θετική στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, \infty)$ και είναι απροσδιόριστη στο 0, η f είναι αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, \infty)$, το $x = 0$ δεν είναι ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	$-$	$\nearrow$

59. Μέγιστο $= e^{(1/e)}$, παρατηρείται στο $x = 1/e$ **61.** $f'(x) > 0$ για κάθε x

63. Η μεταβολή της απόστασής σας ήταν 115 mi και η μεταβολή του χρόνου σας ήταν 95 min. Επομένως, η μέση ταχύτητά σας ήταν $115/95$ mi/min και αυτό είναι περίπου 72.63 mi/h. Το θεώρημα μέσης τιμής συνεπάγεται ότι αν η μέση ταχύτητα ήταν 72.63 mi/h, τότε σε κάποια χρονική στιγμή θα πρέπει να είχατε στιγμιαία ταχύτητα 72.63 mi/h. Σε αυτή τη στιγμή η ταχύτητά σας ξεπερνούσε τα 70 mi/h.

65. $f'(x) < 0$ για $x < 500$, οπότε $800^2 + 200^2 = f(200) > f(400) = 600^2 + 400^2$.

67. Κάθε σημείο $c \in (a, b)$

75. (α) Έστω $g(x) = \cos x$ και $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Τότε $f(0) = g(0) = 1$ και $g'(x) = -\sin x \geq -x = f'(x)$ για $x \geq 0$ σύμφωνα με την Άσκηση 73. Εφαρμόστε τώρα την Άσκηση 73 για να συμπεράνετε ότι $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ για $x \geq 0$.
(β) Έστω $g(x) = \sin x$ και $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3$. Τότε $f(0) = g(0) = 0$ και $g'(x) = \cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 = f'(x)$ για $x \geq 0$ από το μέρος (α). Εφαρμόστε τώρα την Άσκηση 73 για να συμπεράνετε ότι $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ για $x \geq 0$.
(γ) Έστω $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ και $f(x) = \cos x$. Τότε $f(0) = g(0) = 1$ και $g'(x) = -x + \frac{1}{6}x^3 \geq -\sin x = f'(x)$ για $x \geq 0$ από το μέρος (β). Εφαρμόστε τώρα την Άσκηση 73 για να συμπεράνετε ότι $\cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ για $x \geq 0$.
(δ) Η επόμενη ανίσωση της σειράς είναι $\sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, που ισχύει για $x \geq 0$.

77.

• Έστω $f''(x) = 0$ για κάθε x. Τότε $f'(x) =$ σταθερή για κάθε x. Εφόσον $f'(0) = m$, συμπεραίνουμε ότι $f'(x) = m$ για κάθε x.

• Έστω $g(x) = f(x) - mx$. Τότε $g'(x) = f'(x) - m = m - m = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $g(x) =$ σταθερή για όλα τα x και συνεπώς $f(x) - mx =$ σταθερό για κάθε x. Με αναδιάταξη της πρότασης, $f(x) = mx +$ σταθερό. Εφόσον $f(0) = b$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) = mx + b$ για κάθε x.

79. (α) Έστω $g(x) = f(x)^2 + f'(x)^2$. Τότε

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)(-f(x)) = 0$$

Επειδή $g'(0) = 0$ για κάθε x, η $g(x) = f(x)^2 + f'(x)^2$ πρέπει να είναι μια σταθερή συνάρτηση. Για να βρούμε την τιμή της C, μπορούμε να αντικαταστήσουμε οποιονδήποτε αριθμό x. Ειδικότερα, για το πρόβλημα αυτό θέλουμε να αντικαταστήσουμε το $x = 0$ και βρίσκουμε $C = f(0)^2 + f'(0)^2$. Επομένως,

$$f(x)^2 + f'(x)^2 = f(0)^2 + f'(0)^2$$

(β) Έστω $f(x) = \sin x$. Τότε $f'(x) = \cos x$ και $f''(x) = -\sin x$, οπότε $f''(x) = -f(x)$. Τέλος, αν πάρουμε $f(x) = \sin x$, το αποτέλεσμα του μέρους (α) εξασφαλίζει ότι

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 0 + 1 = 1$$

Ενότητα 4.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) αύξουσα **2.** Το $f(c)$ είναι τοπικό μέγιστο. **3.** Λάθος

4. Λάθος. Για παράδειγμα, με $f(x) = x^4$ έχουμε $f''(0) = 0$, αλλά δεν υπάρχει σημείο καμπής στο $x = 0$ καθώς η κυρτότητα δεν αλλάζει εκεί.

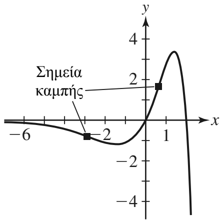
5. Όχι. Ένα σημείο καμπής είναι ένα σημείο στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης όπου αλλάζει η κυρτότητα. Εφόσον η f δεν ορίζεται στο $x = 0$, δεν υπάρχει σημείο στη γραφική παράσταση της f στο $x = 0$ και επομένως δεν υπάρχει σημείο καμπής που να αντιστοιχεί στη μεταβολή της κυρτότητας που παρατηρείται πηγαίνοντας από αρνητικές προς θετικές τιμές του x.

6. Ναι. Για παράδειγμα, για $f(x) = x^3$ υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο στο $x = 0$ και το $(0, 0)$ είναι σημείο καμπής.

Ενότητα 4.4 Ασκήσεις

1. (α) Στο Γ έχουμε $f''(x) < 0$ για κάθε x. (β) Στο Α η $f''(x)$ πηγαίνει από το $+$ στο $-$. (γ) Στο Β έχουμε $f''(x) > 0$ για κάθε x. (δ) Στο Δ η $f''(x)$ πηγαίνει από το $-$ στο $+$.

3.



Σημεία καμπής $\left(-1-\sqrt{3}, (-6-4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}}\right)$ και $\left(-1+\sqrt{3}, (-6+4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}}\right)$

5. Κυρτή παντού, δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

7. Κυρτή για $x < -\sqrt{3}$ και για $0 < x < \sqrt{3}$, κοίλη για $-\sqrt{3} < x < 0$ και για $x > \sqrt{3}$, σημεία καμπής στο $x = 0$ και στο $x = \pm\sqrt{3}$.

9. Κυρτή για $0 < \theta < \pi$, κοίλη για $\pi < \theta < 2\pi$, σημείο καμπής στο $\theta = \pi$.

11. Κοίλη για $0 < x < 9$, κυρτή για $x > 9$, σημείο καμπής όταν $x = 9$.

13. Κυρτή για $(0, 1)$, κοίλη για $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, σημεία καμπής στα $x = 0$ και $x = 1$.

15. Κυρτή για $|x| > 1$, κοίλη για $|x| < 1$, σημεία καμπής στα $x = -1$ και $x = 1$.

17. $(-\infty, -1)$ κυρτή, $(-1, 0)$ κοίλη, $(0, \infty)$ κυρτή, σημείο καμπής: $(0, 0)$.

19. Κοίλη για $x < \frac{2}{3}$, κυρτή για $x > \frac{2}{3}$, σημείο καμπής στο $x = \frac{2}{3}$.

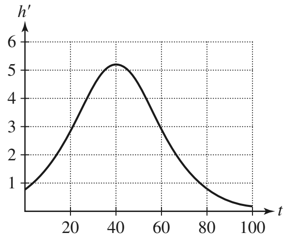
21. Κοίλη για $x < \frac{1}{2}$, κυρτή για $x > \frac{1}{2}$, σημείο καμπής στο $x = \frac{1}{2}$.

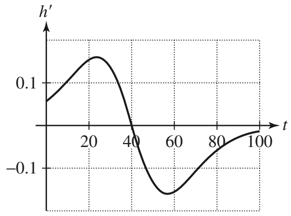
23. $(-\infty, -\sqrt{3/2})$ κοίλη, $(-\sqrt{3/2}, 0)$ κυρτή, $(0, \sqrt{3/2})$ κοίλη, $(\sqrt{3/2}, \infty)$ κυρτή, σημεία καμπής: $(-\sqrt{3/2}, (-\sqrt{3/2})e^{-3/2}), (0, 0), (\sqrt{3/2}, (\sqrt{3/2})e^{-3/2})$.

25. (α) Ξεκινάει σε απόσταση 100 km και κινείται προς τα εμάς με ολοένα μικρότερες ταχύτητες, σταματάει όταν φτάσει σε εμάς (μετά 2 h), στη συνέχεια αλλάζει κατεύθυνση και επιστρέφει σε απόσταση 100 km, κινούμενο με αυξανόμενες ταχύτητες.

(β) Η ταχύτητα είναι πάντα αύξουσα. Όταν το ασθενοφόρο κινείται προς τα εμάς (αρνητική ταχύτητα), αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα μειώνεται. Όταν απομακρύνεται, σημαίνει ότι η ταχύτητα αυξάνεται.

27. Κοντά στο σημείο καμπής η καμπύλη είναι περίπου ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(55, 200)$ και $(35, 100)$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής είναι περίπου $\frac{200-100}{55-35} = 5$ cm/ημέρα. Οπότε, όταν ο ρυθμός ανάπτυξης αρχίζει να επιβραδύνεται, το ύψος αυξάνεται με περίπου 5 cm/ημέρα. Τα διαγράμματα της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου είναι





29. Τα σημεία καμπής είναι τα a, d και f. Η συνάρτηση είναι κοίλη στο $[0, a) \cup (d, f)$.

31. (α) Η f είναι αύξουσα στο $(0, 0.4)$.

(β) Η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0.4, 1) \cup (1, 1.2)$.

(γ) Η f είναι κυρτή στο $(0, 0.17) \cup (0.64, 1)$.

(δ) Η f είναι κοίλη στο $(0.17, 0.64) \cup (1, 1.2)$.

33. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 3$ και $x = 5$, το $f(3) = 54$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(5) = 50$ είναι τοπικό ελάχιστο.

35. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0$ και $x = 1$, το $f(0) = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο και το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου δεν καταλήγει σε συμπέρασμα στο $x = 1$.

37. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = -4$ και $x = 2$, το $f(-4) = -16$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(2) = -4$ είναι τοπικό ελάχιστο.

39. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0$ και $x = \frac{2}{9}$, το $f\left(\frac{2}{9}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο, η $f''(x)$ δεν ορίζεται στο $x = 0$, οπότε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί εκεί.

41. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \pi$, το $f(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο, το $f(\frac{\pi}{3})$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(\pi)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

43. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, το $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

45. Το κρίσιμο σημείο είναι το $x = e^{-1/3}$, το $f\left(e^{-1/3}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

47.

x	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

x	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	I	$\smile$

49.

t	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$

t	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$	I	$\frown$

51. $f''(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

x	0	$\left(0, (2)^{2/3}\right)$	$(2)^{2/3}$	$\left((2)^{2/3}, \infty\right)$
f'	U	$-$	0	$+$
f	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

53.

x	$\left(-\infty, -3\sqrt{3}\right)$	$-3\sqrt{3}$	$\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$	$3\sqrt{3}$	$\left(3\sqrt{3}, \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$

x	$(-\infty, -9)$	-9	$(-9, 0)$	0	$(0, 9)$	9	$(9, \infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	I	$\smile$	I	$\frown$	I	$\smile$

55.

x	$\left(-\infty, -\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}\right)$	$-\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}$	$\left(-\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}, 0\right)$	0
f''	$-$	$-$	$-$	απροσδ.

$\left(0, \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}\right)$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}$	$\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}, \infty\right)$
$+$	$+$	$+$

57.

θ	$(0, \pi)$	π	$(\pi, 2\pi)$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\neg$	$\nearrow$

θ	0	$(0, \pi)$	π	$(\pi, 2\pi)$	2π
f''	0	$-$	0	$+$	0
f	$\neg$	$\frown$	I	$\smile$	$\neg$

59.

x	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
f'	$+$
f	$\nearrow$

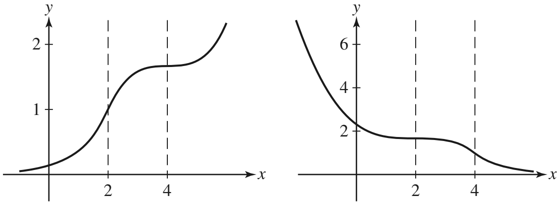
x	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	Ι	$\smile$

61.

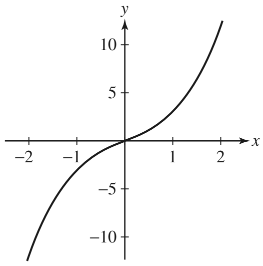
x	$\left(0, 1+\sqrt{3}\right)$	$1+\sqrt{3}$	$\left(1+\sqrt{3}, \infty\right)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Μ	$\searrow$

x	$(0, 4)$	4	$(4, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	Ι	$\smile$

63.



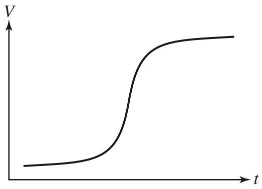
65.



67. (α) Κοντά στην αρχή της επιδημίας, η γραφική παράσταση της R είναι κυρτή. Προς το τέλος της επιδημίας, η R είναι κοίλη.

(β) «Η επιδημία υποχωρεί: ο αριθμός των νέων περιστατικών μειώνεται».

69. Το σημείο καμπής πρέπει να παρατηρείται όταν το ύψος του νερού ισούται με την ακτίνα της σφαίρας. Μια πιθανή γραφική παράσταση του V φαίνεται παρακάτω.



71. (α) $f'(u) = \dfrac{be^{b(a-u)}}{(1+e^{b(a-u)})^2} > 0$ (β) $u = a$

73. (α) Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

(β) Δίνεται ότι $f''(c) > 0$. Από το μέρος (α) προκύπτει ότι

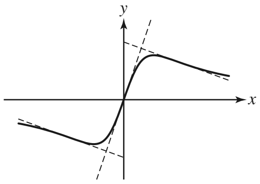
$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)}{h}>0$$

Με άλλα λόγια, για αρκετά μικρό h

$$\frac{f'(c+h)}{h}>0$$

Τώρα, αν το h είναι αρκετά μικρό αλλά αρνητικό, τότε η $f'(c+h)$ πρέπει επίσης να είναι αρνητική (έτσι ώστε ο λόγος $f'(c+h)/h$ να είναι θετικός) και $c+h<c$. Από την άλλη πλευρά, αν το h είναι αρκετά μικρό αλλά θετικό, τότε η $f'(c+h)$ πρέπει επίσης να είναι θετική και $c+h>c$. Επομένως, υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα (a,b) που περιέχει το c έτσι ώστε $f'(x)<0$ για $a<x<c$ και $f'(c)>0$ για $c<x<b$. Τέλος, επειδή η $f'(x)$ αλλάζει από αρνητική σε θετική στο $x=c$, η $f(c)$ πρέπει να είναι τοπικό ελάχιστο.

75. (β) Η $f(x)$ έχει σημεία καμπής στο $x=0$ και στο $x=\pm 1$. Το διάγραμμα δείχνει τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$ και τις εφαπτόμενες ευθείες σε κάθε ένα από τα σημεία καμπής. Είναι σαφές ότι κάθε εφαπτόμενη ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f στο σημείο καμπής.



77. Έστω $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Τότε

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

και

$$f''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+6a_3x+2a_2$$

Αν $n\geq 3$ και περιττό, τότε το $n-2$ είναι επίσης περιττό και η f'' είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού. Επομένως, η f'' πρέπει να παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Προκύπτει ότι η $f''(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα c έτσι ώστε η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο c. Η συνάρτηση f θα έχει τότε σημείο καμπής στο $x=c$. Από την άλλη πλευρά, οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$, x^4 και x^8 είναι πολυώνυμα άρτιου βαθμού που δεν έχουν σημεία καμπής.

Ενότητα 4.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Δεν είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ **2.** Όχι

3. Δεν εφαρμόζετε τον κανόνα του πηλίκου στο $\frac{\ln(1-x)}{x}$. Παραγωγίζετε ξεχωριστά τον αριθμητή και τον παρονομαστή και εργάζεστε με τη νέα έκφραση πηλίκου που λαμβάνετε με αυτόν τον τρόπο.

4. Η συνάρτηση δεν έχει απροσδιόριστη μορφή στο $x=0$. Έχει τη μορφή 0^∞, που αντιστοιχεί σε ένα όριο που ισούται με 0.

5. Είναι συνεχής συνάρτηση.

Ενότητα 4.5 Ασκήσεις

1. Δεν εφαρμόζεται ο κανόνας L'Hôpital. **3.** Δεν εφαρμόζεται ο κανόνας L'Hôpital.

5. Δεν εφαρμόζεται ο κανόνας L'Hôpital. **7.** Δεν εφαρμόζεται ο κανόνας L'Hôpital.

9. 0 **11.** Πηλίκο της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, $-\frac{9}{2}$ **13.** Πηλίκο της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, 0 **15.** Πηλίκο της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, 0 **17.** $\frac{5}{6}$ **19.** $-\frac{3}{5}$

21. $-\frac{7}{3}$ **23.** $\frac{9}{7}$ **25.** $\frac{2}{7}$ **27.** 1 **29.** 2 **31.** -1 **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** 0 **37.** $-\frac{2}{\pi}$ **39.** 1 **41.** Δεν υπάρχει **43.** 0 **45.** $\ln a$

47. e **49.** $e^{-3/2}$ **51.** 1 **53.** $\dfrac{1}{\pi}$

55.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos mx}{\cos nx}=\begin{cases}(-1)^{(m-n)/2}, & m, n \text{ άρτιο}\\ \text{δεν υπάρχει}, & m \text{ άρτιο}, n \text{ περιττό}\\ 0 & m \text{ περιττό}, n \text{ άρτιο}\\ (-1)^{(m-n)/2}\frac{m}{n}, & m, n \text{ περιττό}\end{cases}$$

57. (α) ∞ (β) 1 **59.** $\frac{9000}{49}\approx 183.7$ m

61. (α) Εδώ $f(x)\to 1$, οπότε $\ln f(x)\to 0$ και $g(x)\to\infty$, επομένως η $g(x)\ln f(x)$ έχει την απροσδιόριστη μορφή $\infty\cdot 0$.

(β) Εδώ $f(x)\to\infty$, οπότε $\ln f(x)\to\infty$ και $g(x)\to 0$, επομένως η $g(x)\ln f(x)$ έχει τη μορφή $0\cdot\infty$.

63. (α) $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=e^0=1$

(β) Η f είναι αύξουσα για $0<x<e$, είναι φθίνουσα για $x>e$ και έχει μέγιστο για $x=e$. Η μέγιστη τιμή είναι $f(e)=e^{1/e}\approx 1.444668$.

65. Τίποτα από τα δύο **67.** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{a}x^{-a}=0$

71. (α) $1\le 2+\sin x\le 3$, οπότε

$$\frac{x}{x^2+1}\le\frac{x(2+\sin x)}{x^2+1}\le\frac{3x}{x^2+1}$$

Από το θεώρημα παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(2+\sin x)}{x^2+1}=0$$

(β) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x(2+\sin x)\ge\lim_{x\to\infty} x=\infty$ και $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}(x^2+1)=\infty$, αλλά το

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\cos x)+(2+\sin x)}{2x}$$

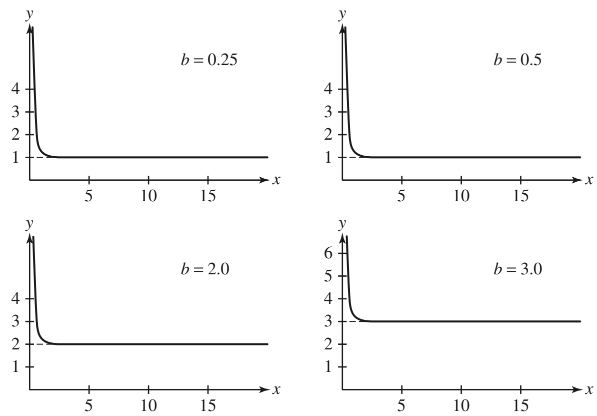
δεν υπάρχει αφού η $\cos x$ ταλαντώνεται. Αυτό δεν παραβιάζει τον κανόνα L'Hôpital αφού το θεώρημα αναφέρει σαφώς ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

«υπό την προϋπόθεση ότι το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει».

73. (α) Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 70, βλέπουμε ότι $G(b)=e^{H(b)}$. Επομένως, $G(b)=1$ αν $0\le b\le 1$ και $G(b)=b$ αν $b>1$.

(β)



75. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k e^{1/x^2}}$. Έστω $t = 1/x$. Καθώς $x \to 0,\ t \to \infty$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k e^{1/x^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^k}{e^{t^2}} = 0$$

από την Άσκηση 72.

77. Για $x \neq 0$, $f'(x) = e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right)$. Εδώ, $P(x) = 2$ και $r = 3$. Υποθέτουμε ότι $f^{(k)}(x) = \frac{P(x)e^{-1/x^2}}{x^r}$. Τότε

$$f^{(k+1)}(x) = e^{-1/x^2}\left(\frac{x^3P'(x) + (2 - rx^2)P(x)}{x^{r+3}}\right)$$

που είναι στην επιθυμητή μορφή. Επιπλέον, από την Άσκηση 74 $f'(0) = 0$. Υποθέστε ότι $f^{(k)}(0) = 0$. Τότε

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{P(x)e^{-1/x^2}}{x^{r+1}} = P(0) \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{r+1}} = 0$$

81. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$. Για να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα L'Hôpital ώστε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, πρέπει να γνωρίζουμε ότι η παράγωγος του $\sin x$ είναι το $\cos x$, αλλά για να βρούμε την παράγωγο του $\sin x$ πρέπει να μπορούμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

83. (α) $e^{-1/6} \approx 0.846481724$

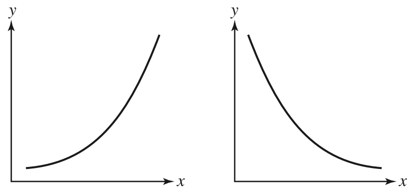
x	1	0.1	0.01
$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$	0.841471	0.846435	0.846481

(β) $1/3$

x	± 1	± 0.1	± 0.01
$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$	0.412283	0.334001	0.333340

Ενότητα 4.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ένα τόξο με τον συνδυασμό προσήμων $++$ (αύξουσα, κυρτή) φαίνεται εδώ στα αριστερά. Ένα τόξο με τον συνδυασμό προσήμων $-+$ (φθίνουσα, κυρτή) φαίνεται εδώ στα δεξιά.



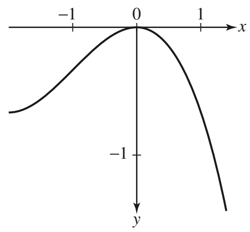
2. (γ) **3.** Το $x = 4$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Ενότητα 4.6 Ασκήσεις

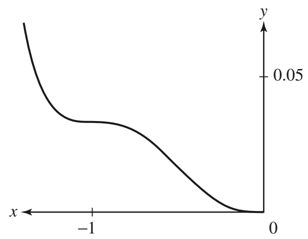
1.

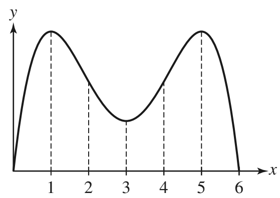
• Στο Α η f είναι φθίνουσα και κυρτή, οπότε $f' < 0$ και $f'' > 0$.
• Στο Β η f είναι αύξουσα και κυρτή, οπότε $f' > 0$ και $f'' > 0$.
• Στο Γ η f είναι αύξουσα και κοίλη, οπότε $f' > 0$ και $f'' < 0$.
• Στο Δ η f είναι φθίνουσα και κοίλη, οπότε $f' < 0$ και $f'' < 0$.
• Στο Ε η f είναι φθίνουσα και κυρτή, οπότε $f' < 0$ και $f'' > 0$.
• Στο ΣΤ η f είναι αύξουσα και κυρτή, οπότε $f' > 0$ και $f'' > 0$.
• Στο Ζ η f είναι αύξουσα και κοίλη, οπότε $f' > 0$ και $f'' < 0$.

3. Αυτή η συνάρτηση μεταβάλλεται από κυρτή σε κοίλη στο $x = -1$ και από αύξουσα σε φθίνουσα στο $x = 0$.

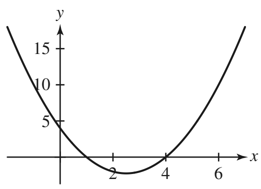


5. Η συνάρτηση είναι φθίνουσα παντού και αλλάζει από κυρτή σε κοίλη στο $x = -1$ και από κοίλη σε κυρτή στο $x = -\frac{1}{2}$.

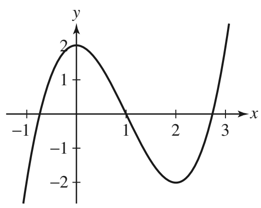




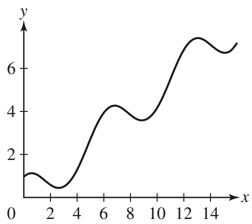
7.



9.

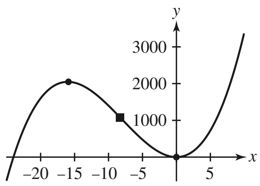


11.

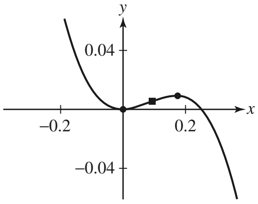


13.

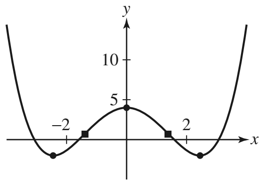
15. Τοπικό μέγιστο στο $x = -16$, τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ και σημείο καμπής στο $x = -8$.



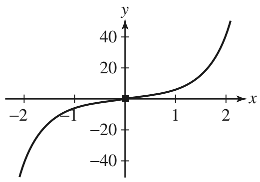
17. Το $f(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο, το $f(\frac{1}{6})$ είναι τοπικό μέγιστο και υπάρχει ένα σημείο καμπής στο $x = \frac{1}{12}$.



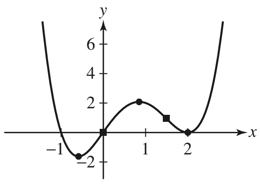
19. Η f έχει τοπικά ελάχιστα στα $x = \pm\sqrt{6}$, τοπικό μέγιστο στο $x = 0$ και σημεία καμπής στα $x = \pm\sqrt{2}$.



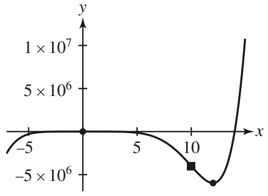
21. Η γραφική παράσταση δεν έχει κρίσιμα σημεία και είναι παντού αύξουσα, με κρίσιμο σημείο στο $(0, 0)$.



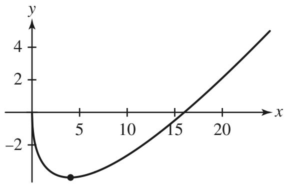
23. Τα $f\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$ και $f(2)$ είναι τοπικά ελάχιστα και το $f\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο. Σημεία καμπής είναι τα $x = 0$ και $x = \frac{3}{2}$.



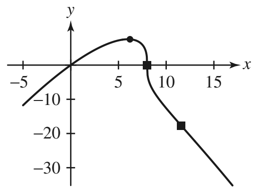
25. Το $f(0)$ είναι τοπικό μέγιστο, το $f(12)$ είναι τοπικό ελάχιστο και υπάρχει ένα σημείο καμπής στο $x = 10$.



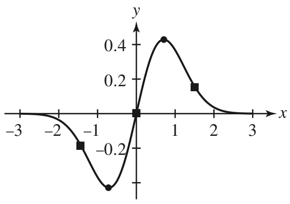
27. Το $f\,(4)$ είναι τοπικό ελάχιστο και η γραφική παράσταση είναι κυρτή.



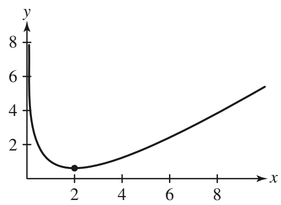
29. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x = 6$ και σημεία καμπής στα $x = 8$ και $x = 12$.



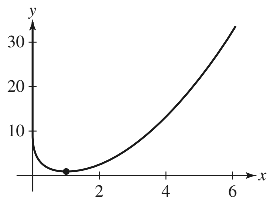
31. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, τοπικό μέγιστο στο $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, σημεία καμπής στο $x = 0$ και στο $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ και οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$.



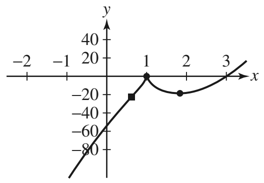
33. Το $f\,(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο και η γραφική παράσταση είναι παντού κυρτή.



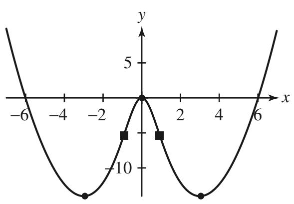
35. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ και καθόλου σημεία καμπής. Είναι παντού κυρτή. Έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.



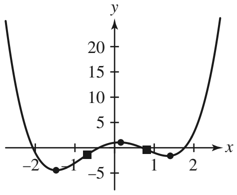
37. Η γραφική παράσταση έχει σημείο καμπής στο $x = \frac{3}{5}$, τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ (στο οποίο η γραφική παράσταση έχει γωνία) και τοπικό ελάχιστο στο $x = \frac{9}{5}$.



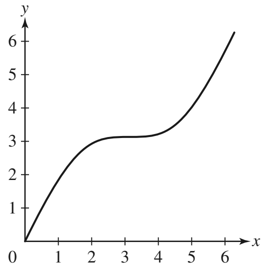
39. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x = 0$, τοπικό ελάχιστο στο $x = \pm 3$ και σημεία καμπής στα $x = \pm\sqrt{-6 + 3\sqrt{5}}$.



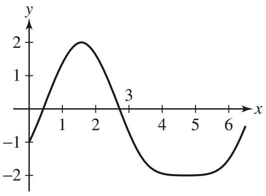
41. Η f έχει τοπικά ελάχιστα στο $x = -1.473$ και στο $x = 1.347$, τοπικό μέγιστο στο $x = 0.126$ και σημεία καμπής στα $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.



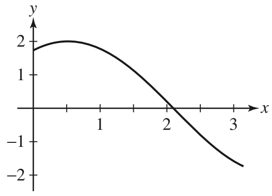
43. Η γραφική παράσταση έχει σημείο καμπής στο $x = \pi$ και κανένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο.



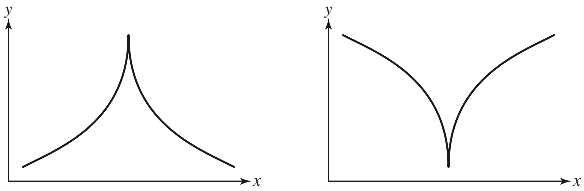
45. Τοπικό μέγιστο στο $x = \frac{\pi}{2}$, τοπικό ελάχιστο στο $x = \frac{3\pi}{2}$ και σημεία καμπής στο $x = \frac{\pi}{6}$ και στο $x = \frac{5\pi}{6}$.



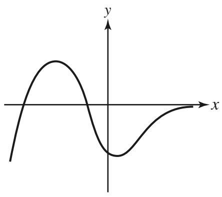
47. Τοπικό μέγιστο στο $x = \frac{\pi}{6}$ και σημείο καμπής στο $x = \frac{2\pi}{3}$.



49. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει ένα σημείο όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη μετάβαση από αύξουσα σε φθίνουσα ή από φθίνουσα σε αύξουσα.

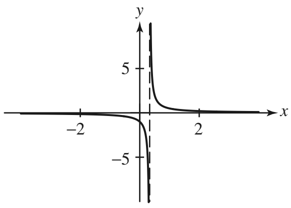


51.

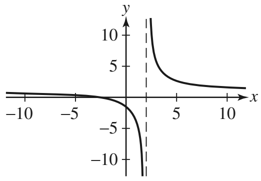


53. Η (B) είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$. Η (A) είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$.

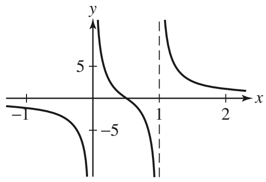
55. Η f είναι φθίνουσα για κάθε $x \neq \frac{1}{3}$, είναι κυρτή για $x > \frac{1}{3}$, κοίλη για $x < \frac{1}{3}$ και έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = \frac{1}{3}$.



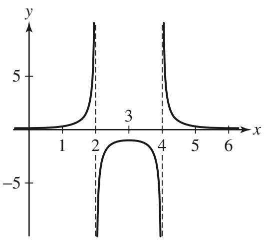
57. Η f είναι φθίνουσα για κάθε $x \neq 2$, είναι κυρτή για $x > 2$, κοίλη για $x < 2$ και έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$.



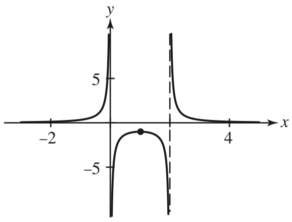
59. Η f είναι φθίνουσα για κάθε $x \neq 0, 1$, είναι κυρτή για $0 < x < \frac{1}{2}$ και $x > 1$, κοίλη για $x < 0$ και $\frac{1}{2} < x < 1$ και έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ και κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = 0$ και $x = 1$.



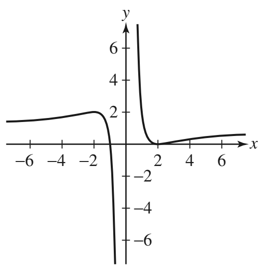
61. Η f είναι αύξουσα για $x < 0$ και $0 < x < 1$ και φθίνουσα για $1 < x < 2$ και $x > 2$. Η f είναι κυρτή για $x < 0$ και $x > 2$ και κοίλη για $0 < x < 2$. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ και κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = 0$ και $x = 2$.



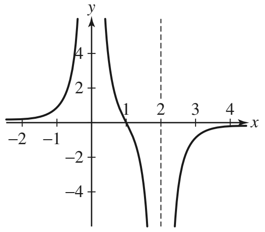
63. Η f είναι αύξουσα για $x < 2$ και για $2 < x < 3$, είναι φθίνουσα για $3 < x < 4$ και για $x > 4$ και έχει τοπικό μέγιστο στο $x = 3$. Η f είναι κυρτή για $x < 2$ και για $x > 4$ και κοίλη για $2 < x < 4$. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ και κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = 2$ και $x = 4$.



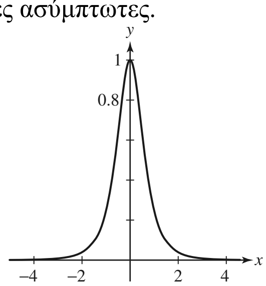
65. Η f είναι αύξουσα για $|x| > 2$ και φθίνουσα για $-2 < x < 0$ και για $0 < x < 2$. Η f είναι κοίλη για $-2\sqrt{2} < x < 0$ και για $x > 2\sqrt{2}$ και κυρτή για $x < -2\sqrt{2}$ και για $0 < x < 2\sqrt{2}$. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 0$.



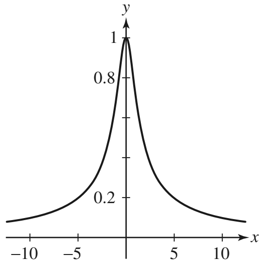
67. Η f είναι αύξουσα για $x < 0$ και για $x > 2$ και φθίνουσα για $0 < x < 2$. Η f είναι κυρτή για $x < 0$ και για $0 < x < 1$, είναι κοίλη για $1 < x < 2$ και για $x > 2$ και έχει σημείο καμπής στο $x = 1$. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ και κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = 0$ και $x = 2$.



69. Η f είναι αύξουσα για $x < 0$, φθίνουσα για $x > 0$ και έχει τοπικό μέγιστο στο $x = 0$. Η f είναι κυρτή για $|x| > 1/\sqrt{5}$, κοίλη για $|x| < 1/\sqrt{5}$ και έχει σημεία καμπής στα $x = \pm 1/\sqrt{5}$. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ και δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.



71. Η f είναι αύξουσα για $x < 0$ και φθίνουσα για $x > 0$. Η f είναι κοίλη για $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ και κυρτή για $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ και δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.



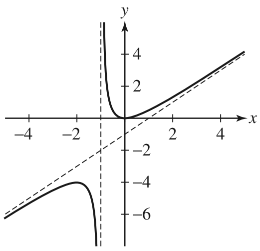
73. (α) Από τον κανόνα του πηλίκου $P'(x) = \frac{(1+Ae^{-kx})(0)-(M)(-k)Ae^{-kx}}{(1+Ae^{-kx})^2} = \frac{MAke^{-kx}}{(1+Ae^{-kx})^2}$.
Από τον κανόνα του πηλίκου

$$\begin{aligned} P''(x) &= \frac{\begin{array}{l}(1+Ae^{-kx})^2(-MAk^2e^{-kx}) \\ \quad -(MAke^{-kx})(2)(1+Ae^{-kx})(-k)(Ae^{-kx})\end{array}}{(1+Ae^{-kx})^4} \\ &= \frac{(1+Ae^{-kx})(-MAk^2e^{-kx})(1+Ae^{-kx}-2Ae^{-kx})}{(1+Ae^{-kx})^4} \\ &= \frac{MAk^2e^{-kx}(Ae^{-kx}-1)}{(1+Ae^{-kx})^3} \end{aligned}$$

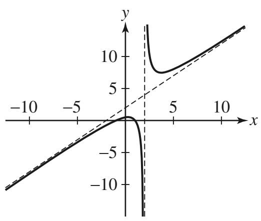
(β) Καθώς $x \to -\infty$, $Ae^{-kx} \to \infty$ και επομένως $\frac{M}{1+Ae^{-kx}} \to 0$. Καθώς $x \to \infty$, $Ae^{-kx} \to 0$ και επομένως $\frac{M}{1+Ae^{-kx}} \to M$.
(γ) Εφόσον τα A, M και k είναι όλα θετικά, όλοι οι παράγοντες στον αριθμητή του P' είναι θετικοί. Ο παρονομαστής είναι επίσης θετικός και επομένως $P'(x) > 0$ για κάθε x. Έπεται ότι η P είναι αύξουσα για κάθε x.
(δ) Η $P''(x)$ είναι θετική όταν $Ae^{-kx} - 1 > 0$, είναι μηδέν όταν $Ae^{-kx} - 1 = 0$ και αρνητική όταν $Ae^{-kx} - 1 < 0$. Λύνοντας την $Ae^{-kx} - 1 = 0$, παίρνουμε $x = \frac{\ln A}{k}$. Για $x < \frac{\ln A}{k}$, $Ae^{-kx} - 1 > 0$ και $P''(x) > 0$, που συνεπάγεται ότι η P είναι κυρτή. Για $x > \frac{\ln A}{k}$, $Ae^{-kx} - 1 < 0$ και $P''(x) < 0$, που συνεπάγεται ότι η P είναι κοίλη. Επομένως, παρατηρείται ένα σημείο καμπής στο $x = \frac{\ln A}{k}$. $P(\frac{\ln A}{k}) = \frac{M}{2}$ και επομένως το σημείο καμπής είναι $\left(\frac{\ln A}{k}, \frac{M}{2}\right)$.
77. Η f είναι αύξουσα για $x < -2$ και για $x > 0$, είναι φθίνουσα για $-2 < x < -1$ και για $-1 < x < 0$, έχει τοπικό ελάχιστο $x = 0$, τοπικό μέγιστο για $x = -2$, είναι κοίλη στο $(-\infty, -1)$ και κυρτή στο $(-1, \infty)$. Η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = -1$. Με τη διαίρεση πολυωνύμων $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ και

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x+1} - (x-1)\right) = 0$$

που συνεπάγεται ότι η πλάγια ασύμπτωτη είναι η $y = x - 1$.



79. Η $y = x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f. Έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = 2+\sqrt{3}$, τοπικό μέγιστο στο $x = 2-\sqrt{3}$ και η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2)$ και κυρτή στο $(2, \infty)$. Έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 2$.



Ενότητα 4.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $b + h + \sqrt{b^2 + h^2} = 10$
2. Αν η συνάρτηση τείνει στο άπειρο στα άκρα του διαστήματος, τότε η συνάρτηση πρέπει να εμφανίζει μια ελάχιστη τιμή σε κάποιο κρίσιμο σημείο.
3. Όχι.

Ενότητα 4.7 Ασκήσεις

1. (α) $y = \frac{3}{2} - x$ (β) $A = x(\frac{3}{2} - x) = \frac{3}{2}x - x^2$ (γ) Κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ (δ) Το μέγιστο εμβαδόν 0.5625 m^2 επιτυγχάνεται για $x = y = \frac{3}{4}$ m.

3. Μια πλευρά μήκους 6 και δύο μήκους 3 **5.** 4 και 32

7. Χρησιμοποιούμε περίπου 5.28 m του σύρματος για τον κύκλο. **9.** 20 και 20 **11.** $x = 40, y = 20$

13. (α) Το κουτί πρέπει να είναι κύβος με μήκος πλευράς $12^{1/3}$.

(β) Το κουτί πρέπει να είναι κύβος με μήκος πλευράς $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

15. Για μέγιστο εμβαδόν οι διαστάσεις πρέπει να είναι

$$x = \frac{300}{1 + \pi/4}\text{ m} \qquad \text{και} \qquad y = \frac{150}{1 + \pi/4}\text{ m}$$

όπου x είναι το πλάτος του σχήματος και επομένως η διάμετρος του ημικυκλίου και y είναι το ύψος του ορθογώνιου τομέα.

17. Τετράγωνο με μήκος πλευράς $4\sqrt{2}$.

19. (α) Έχουμε $T(x) = \frac{\sqrt{900+x^2}}{r} + \frac{50-x}{h}$. Επομένως, $T'(x) = \frac{x}{r\sqrt{900+x^2}} - \frac{1}{h}$. Θέτοντας $T'(x) = 0$ και επιλύοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{x}{r\sqrt{900 + x^2}} - \frac{1}{h} \\
\frac{x}{r\sqrt{900 + x^2}} &= \frac{1}{h} \\
\frac{xh}{r} &= \sqrt{900 + x^2} \\
\frac{x^2h^2}{r^2} &= 900 + x^2 \\
x^2\left(\frac{h^2}{r^2} - 1\right) &= 900 \\
x &= \frac{30}{\sqrt{(h/r)^2 - 1}}
\end{aligned}$$

Αν $r \geq h$, τότε $(h/r)^2 - 1 < 0$, που συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει λύση της $T'(x) = 0$ και επομένως δεν υπάρχει κρίσιμο σημείο.

(β) Εφόσον ο αριθμητής της έκφρασης και το κρίσιμο σημείο είναι μη μηδενικός, το κρίσιμο σημείο είναι επίσης μη μηδενικό. Παρατηρήστε ότι για δεδομένο r, καθώς $h \to \infty$, $\frac{30}{\sqrt{(h/r)^2-1}} \to 0$ και επομένως κάνοντας το h αρκετά μεγάλο, μπορούμε να πάρουμε το κρίσιμο σημείο απειροστά κοντά στο 0.

21. Περίπου 1.43 m **23.** $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ **25.** $(0.632784, -1.090410)$ **27.** $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ **29.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$

31. 60 cm πλάτος επί 100 cm ύψος για το πλήρες πόστερ (48 cm επί 80 cm και το εκτυπωμένο υλικό).

33. Ακτίνα: $\sqrt{\frac{2}{3}}R$, μισό ύψος: $\frac{R}{\sqrt{3}}$

35. $x = 10\sqrt{5} \approx 22.36$ m και $y = 20\sqrt{5} \approx 44.72$ m, όπου x είναι το μήκος του τοίχου και y είναι το μήκος μιας προσκείμενης πλευράς.

37. 1.0718 **39.** $LH + \frac{1}{2}(L^2 + H^2)$ **41.** $y = -3x + 24$

45. $s = 3\sqrt[3]{4}$ m και $h = 2\sqrt[3]{4}$ m, όπου s είναι το μήκος της πλευράς της βάσης του κουτιού και h είναι το ύψος του κουτιού.

47. (α) Κάθε τμήμα έχει μήκος 600 m και πλάτος 400 m. (β) 240,000 m^2

49. $N \approx 58.14$ lb και $P \approx 77.33$ lb **51.** \$990

53. 1.2 εκατομμύρια ευρώ σε εξοπλισμό και 600,000 ευρώ σε εργασία.

55. Ο Βrκaion κολυμπάει διαγώνια προς ένα σημείο που βρίσκεται 20.2 m προς τα κάτω του ρεύματος και έπειτα τρέχει για την υπόλοιπη διαδρομή.

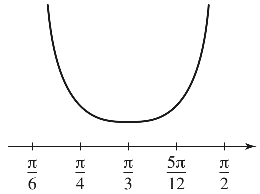
59. $A = B = 30$ cm **61.** $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

65. (α) 900 m^2 όταν $x = -10$ (β) $[0, 20]$, 800 m^2 όταν $x = 0$

67. $\theta = \arctan(0.4) \approx 21.8^\circ$ or 0.3805 rad **69.** (β) $\left(\dfrac{17}{0.003}\right)^{1/4} \approx 8.676247$ (δ) $\nu_d \approx 11.418583, D(\nu_d) \approx 191.741$ km

71. $s = \left(\dfrac{b^{2/3}}{2^{2/3}} + h^{2/3}\right)^{3/2}$ **73.** $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$

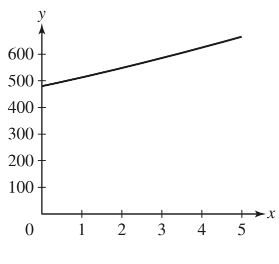
75. (α) Η τιμή $\alpha = 0$ αντιστοιχεί σε βολή της μπάλας απευθείας προς το καλάθι, ενώ η $\alpha = \pi/2$ αντιστοιχεί σε κατακόρυφη βολή της μπάλας προς τα πάνω. Σε καμία από τις δύο περιπτώσεις δεν είναι δυνατόν να μπει η μπάλα στο καλάθι. Αν η γωνία α είναι εξαιρετικά κοντά στο 0, η μπάλα βάλλεται σχεδόν απευθείας προς το καλάθι. Από την άλλη πλευρά, αν η γωνία α είναι εξαιρετικά κοντά στο $\pi/2$, η μπάλα βάλλεται σχεδόν κατακόρυφα. Σε οποιαδήποτε από αυτές τις περιπτώσεις η μπάλα πρέπει να κινηθεί με τεράστια ταχύτητα.
(β) Το ελάχιστο παρατηρείται εμφανώς όταν $\theta = \pi/3$.



(γ) $v^2 = \dfrac{16d}{F(\theta)}$, οπότε η v^2 είναι ελάχιστη όταν η $F(\theta)$ είναι μέγιστη.
(δ) Ένα κρίσιμο σημείο της F παρατηρείται όπου $\cos(\alpha - 2\theta) = 0$ έτσι ώστε $\alpha - 2\theta = -\frac{\pi}{2}$ (αρνητικό επειδή $2\theta > \theta > \alpha$) και αυτό μας δίνει $\theta = \alpha/2 + \pi/4$. Η ελάχιστη τιμή $F(\theta_0)$ παρατηρείται για $\theta_0 = \alpha/2 + \pi/4$.
(ε) Αντικαθιστούμε $\theta_0 = \alpha/2 + \pi/4$. Από το Σχήμα 38 βλέπουμε ότι

$$\cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \qquad \text{και} \qquad \sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

(στ) Αυτό δείχνει ότι η ελάχιστη ταχύτητα που απαιτείται για να ρίξουμε τη μπάλα στο καλάθι μειώνεται καθώς αυξάνεται το ύψος του ανθρώπου. Αυτό δείχνει έναν από τους τρόπους για τους οποίους το ύψος είναι πλεονέκτημα στις ελεύθερες βολές: ένας ψηλότερος αθλητής δεν χρειάζεται να ρίξει τόσο δυνατά τη μπάλα για να φτάσει στο καλάθι.



77. (α) Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$\theta(x) = \tan^{-1}\frac{c - f(x)}{x} - \tan^{-1}\frac{b - f(x)}{x}$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
&\theta'(x)\\
&= \frac{b-(f(x)-xf'(x))}{x^2+(b-f(x))^2} - \frac{c-(f(x)-xf'(x))}{x^2+(c-f(x))^2}\\
&= (b-c)\frac{x^2-bc+(b+c)(f(x)-xf'(x))-(f(x))^2+2xf(x)f'(x)}{(x^2+(b-f(x))^2)(x^2+(c-f(x))^2)}\\
&= (b-c)\frac{(x^2+(xf'(x))^2-(bc-(b+c)(f(x)-xf'(x))+(f(x)-xf'(x))^2)}{(x^2+(b-f(x))^2)(x^2+(c-f(x))^2)}\\
&= (b-c)\frac{(x^2+(xf'(x))^2-(b-(f(x)-xf'(x)))(c-(f(x)-xf'(x)))}{(x^2+(b-f(x))^2)(x^2+(c-f(x))^2)}
\end{aligned}
$$

(β) Το σημείο Q είναι η τεταγμένη y επί την αρχή της ευθείας που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο P. Η εξίσωση αυτής της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

Η τεταγμένη y του Q είναι τότε $f(x)-xf'(x)$.
(γ) Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$
\begin{aligned}
BQ &= b-(f(x)-xf'(x)),\\
CQ &= c-(f(x)-xf'(x))
\end{aligned}
$$

και

$$PQ=\sqrt{x^2+(f(x)-(f(x)-xf'(x)))^2}=\sqrt{x^2+(xf'(x))^2}$$

Συγκρίνοντας αυτές τις εκφράσεις με τον αριθμητή της $d\theta/dx$, προκύπτει ότι η $\frac{d\theta}{dx}=0$ είναι ισοδύναμη με την

$$PQ^2=BQ\cdot CQ$$

(δ) Η εξίσωση $PQ^2=BQ\cdot CQ$ είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{PQ}{BQ}=\frac{CQ}{PQ}$$

Με άλλα λόγια, οι πλευρές CQ και PQ του τριγώνου ΔQCP έχουν μήκος ανάλογο με τις πλευρές PQ και BQ του τριγώνου ΔQPB. Εφόσον $\angle PQB=\angle CQP$, προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΔQCP και ΔQPB είναι όμοια.

Ενότητα 4.8 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ένα **2.** Κάθε όρος της μεθόδου του Νεύτωνα θα παραμείνει x_0. **3.** Η μέθοδος του Νεύτωνα θα αποτύχει.
4. Ναι, αυτή είναι μια λογική περιγραφή. Ο αναγωγικός τύπος για τη μέθοδο του Νεύτωνα εξήχθη λύνοντας την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην $y=f(x)$ στο x_0 ως προς την τετμημένη x επί την αρχή.

Ενότητα 4.8 Ασκήσεις

1.

n	1	2	3
x_n	2.5	2.45	2.44948980

3.

n	1	2	3
x_n	2.16666667	2.15450362	2.15443469

5.

n	1	2	3
x_n	0.28540361	0.24288009	0.24267469

7. Παίρνουμε $x_0 = -1.4$, με βάση το διάγραμμα, και στη συνέχεια υπολογίζουμε

n	1	2	3
x_n	-1.330964467	-1.328272820	-1.328268856

9. $r_1 \approx 0.259$ και $r_2 \approx 2.543$ **11.** $\sqrt{11} \approx 3.317$, μια αριθμομηχανή δίνει 3.31662479.
13. $2^{7/3} \approx 5.040$, μια αριθμομηχανή δίνει 5.0396842. **15.** 2.093064358 **17.** -2.225 **19.** $x \approx 2.331$ **21.** 1.749
23. $x = 4.49341$, που είναι περίπου ίσο με 1.4303π **25.** $(2.7984, -0.941684)$
27. (α) $P \approx \$156.69$ (β) $b \approx 1.02121$, το επιτόκιο είναι περίπου 25.45%.
29. (α) Ο τομέας SAB είναι η φέτα OAB έχοντας αφαιρέσει το τρίγωνο OBS. Ο OAB είναι ένας κεντρικός τομέας με τόξο θ και ακτίνα $\overline{OA} = a$ και επομένως έχει εμβαδόν $\frac{a^2\theta}{2}$. Το OBS είναι τρίγωνο με ύψος $a\sin\theta$ και μήκος βάσης $\overline{OS} = ea$. Επομένως, το εμβαδόν του τομέα είναι

$$\frac{a^2}{2}\theta - \frac{1}{2}ea^2\sin\theta = \frac{a^2}{2}(\theta - e\sin\theta)$$

(β) Εφόσον ο δεύτερος νόμος του Κέπλερ δηλώνει ότι το εμβαδόν του τομέα είναι ανάλογο του χρόνου t από τότε που ο πλανήτης πέρασε από το σημείο A, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \pi a^2\,(t/T) &= a^2/2\,(\theta - e\sin\theta) \\ 2\pi\frac{t}{T} &= \theta - e\sin\theta \end{aligned}$$

(γ) Από τη σκοπιά του Ηλίου, ο Ερμής έχει διαγράψει γωνία περίπου 1.76696 ακτίνια $= 101.24°$. Επομένως, ο Ερμής έχει διαγράψει περισσότερο από το ένα τέταρτο της διαδρομής του (από την οπτική της κεντρικής γωνίας) σε αυτόν τον χρόνο.
31. (α)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{-xn}}{-x_n e^{-x_n} + e^{-x_n}} = x_n - \frac{x_n}{1 - x_n} = \frac{x_n - x_n^2 - x_n}{1 - x_n} = \frac{x_n^2}{x_n - 1}$$

(β)

0	0.8
1	-3.2
2	-2.4381
3	-1.72895
4	-1.09539
5	-0.57263
6	-0.20851
7	-0.03597
8	-0.00125
9	-1.6×10^{-6}
10	-2.4×10^{-12}

0	5
1	6.25
2	7.440476
3	8.595744
4	9.727397
5	10.84198
6	11.94358
7	13.03496
8	14.11805
9	15.19428
10	16.26473

Φαίνεται ότι με $x_0 = 0.8$ η ακολουθία συγκλίνει στη ρίζα στο 0, αλλά με $x_0 = 5$ η ακολουθία αποκλίνει.
33. Η ακολουθία των επαναλήψεων αποκλίνει θεαματικά, αφού $x_n = (-2)^n x_0$.
35. (α) Έστω $f(x) = \frac{1}{x} - c$. Τότε

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{1}{x} - c}{-x^{-2}} = 2x - cx^2$$

(β) Για $c = 10.3$ έχουμε $f(x) = \frac{1}{x} - 10.3$ και επομένως $x_{n+1} = 2x_n - 10.3x_n^2$.

• Πάρτε $x_0 = 0.1$.

n	1	2	3
x_n	0.097	0.0970873	0.09708738

• Πάρτε $x_0 = 0.5$.

n	1	2	3
x_n	−1.575	−28.7004375	−8541.66654

(γ) Η γραφική παράσταση είναι μη συνεκτική. Αν $x_0 = 0.5$, το $(x_1, f(x_1))$ βρίσκεται στο άλλο σκέλος της γραφικής παράστασης, το οποίο δεν θα συγκλίνει ποτέ σε κάποιο σημείο με τη μέθοδο του Νεύτωνα.

37. $\theta \approx 1.2757$, επομένως $h = L\dfrac{1-\cos\theta}{2\sin\theta} \approx 1.11181$

39. (α) $a = 46.95$ (β) $s = 29.24$

41. (α) $a \approx 28.46$ (β) Το $\Delta L = 1$ ft δίνει $\Delta s \approx 0.61$, το $\Delta L = 5$ δίνει $\Delta s \approx 3.05$.

(γ) $s(161)-s(160) = 0.62$, πολύ κοντά στην προσέγγιση που παίρνουμε με τη γραμμική προσέγγιση. Το $s(165)-s(160) = 3.02$ είναι και πάλι πολύ κοντά στην προσέγγιση που παίρνουμε με τη γραμμική προσέγγιση.

Κεφάλαιο 4 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. $8.1^{1/3} - 2 \approx 0.00833333$, το σφάλμα είναι 3.445×10^{-5}.

3. $625^{1/4} - 624^{1/4} \approx 0.002$, το σφάλμα είναι 1.201×10^{-6}. **5.** $\frac{1}{1.02} \approx 0.98$, το σφάλμα είναι 3.922×10^{-4}.

7. $L(x) = 5 + \dfrac{1}{10}(x-25)$ **9.** $L(r) = 36\pi(r-2)$ **11.** $L(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}(2-x)$ **13.** $\Delta s \approx 0.632$

15. (α) Αύξηση \$1500 στο εισόδημα. (β) Μια μικρή αύξηση της τιμής θα προκαλούσε μείωση στο εισόδημα.

19. $c = \dfrac{3}{\ln 4} \approx 2.164 \in (1, 4)$

21. Έστω $x > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, το θεώρημα μέσης τιμής εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα $c \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \qquad \text{ή} \qquad f(x) = f(0) + xf'(c)$$

Τώρα δίνεται ότι $f(0) = 4$ και $f'(x) \le 2$ για $x > 0$. Επομένως, για κάθε $x \ge 0$

$$f(x) \le 4 + x(2) = 2x + 4$$

23. Το $x = \frac{2}{3}$ και το $x = 2$ είναι κρίσιμα σημεία. Το $f\left(\frac{2}{3}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο, ενώ το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

25. Τα $x = 0$, $x = -2$ και $x = -\frac{4}{5}$ είναι κρίσιμα σημεία. Το $f(-2)$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο, το $f\left(-\frac{4}{5}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

27. Το $\theta = \dfrac{3\pi}{4} + n\pi$ είναι κρίσιμο σημείο για όλους τους ακεραίους n. Το $g\left(\dfrac{3\pi}{4} + n\pi\right)$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο για κάποιον ακέραιο n.

29. Η μέγιστη τιμή είναι 21. Η ελάχιστη τιμή είναι -11. **31.** Η ελάχιστη τιμή είναι -1. Η μέγιστη τιμή είναι $\dfrac{5}{4}$.

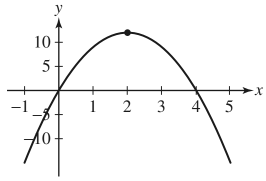
33. Η ελάχιστη τιμή είναι -1. Η μέγιστη τιμή είναι 3.

35. Η ελάχιστη τιμή είναι $12 - 12\ln 12 \approx -17.818880$. Η μέγιστη τιμή είναι $40 - 12\ln 40 \approx -4.266553$.

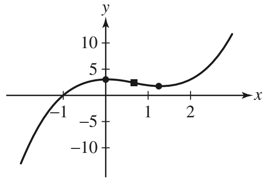
37. Τα κρίσιμα σημεία είναι το $x = 1$ και το $x = 3$. Η ελάχιστη τιμή είναι 2, παρατηρείται στο $x = 3$ και η μέγιστη τιμή είναι 17, παρατηρούμενη στο δεξιό άκρο του διαστήματος $x = 8$.

39. $x = \dfrac{4}{3}$ **41.** $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **43.** $x = 1$ και $x = 4$

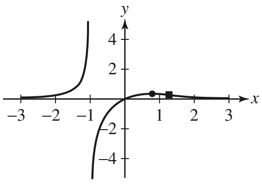
45. Δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες. Ούτε κατακόρυφες ασύμπτωτες.



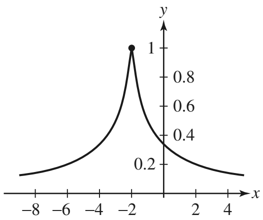
47. Δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες. Ούτε κατακόρυφες ασύμπτωτες.



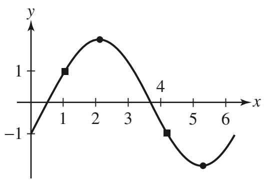
49. Η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.



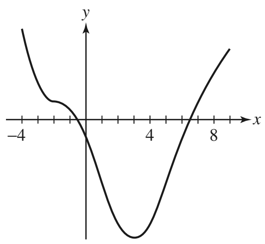
51. Οριζόντια ασύμπτωτη η $y = 0$. Δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.



53.

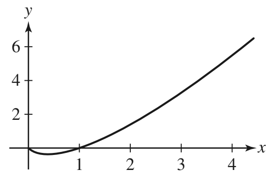


55.

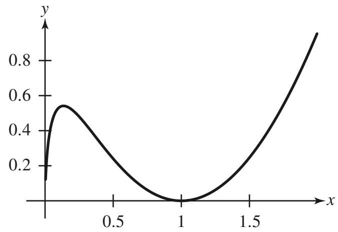


57. $b = \sqrt[3]{12}$ m και $h = \frac{1}{3}\sqrt[3]{12}$ m **61.** $\dfrac{16}{9}\pi$ **67.** $\sqrt[3]{25} = 2.9240$ **69.** Το $(0, \frac{2}{e})$ είναι τοπικό ελάχιστο.

71. Τοπικό ελάχιστο το $x = e^{-1}$. Δεν υπάρχουν σημεία καμπής. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln x = \infty$



73. Τοπικό μέγιστο στο $x = e^{-2}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$. Σημείο καμπής στο $x = e^{-1}$, $\lim\limits_{x\to 0+} x(\ln x)^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln x)^2 = \infty$



75. Καθώς $x \to \infty$, τόσο το $2x - \sin x$ όσο και το $3x + \cos 2x$ τείνει στο άπειρο, οπότε ο κανόνας L'Hôpital εφαρμόζεται στο $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - \sin x}{3x + \cos 2x}$, ωστόσο το όριο που προκύπτει, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 - \cos x}{3 - 2\sin 2x}$, δεν υπάρχει εξαιτίας της ταλάντωσης των $\sin x$ και $\cos x$. Για να υπολογίσουμε το όριο, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - \sin x}{3x + \cos 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{\sin x}{x}}{3 + \frac{\cos 2x}{x}} = \frac{2}{3}$$

77. 4 **79.** 0 **81.** 3 **83.** $\ln 2$ **85.** $\dfrac{1}{6}$ **87.** 2

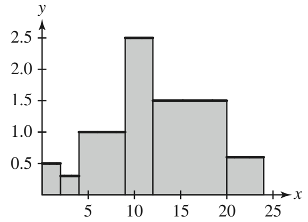
Κεφάλαιο 5

Ενότητα 5.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

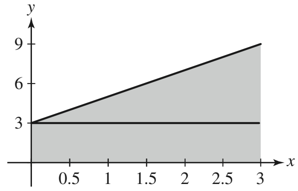
1. Τα δεξιά άκρα των υποδιαστημάτων είναι τότε $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5$, ενώ τα αριστερά άκρα είναι $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}$.
2. (α) $\frac{9}{2}$ (β) $\frac{3}{2}$ και 2 **3.** (α) *Είναι* ίδια (β) *Όχι* ίδια (γ) *Είναι* ίδια (δ) *Είναι* ίδια
4. Ο πρώτος όρος στο άθροισμα $\sum\limits_{j=0}^{100} j$ ισούται με μηδέν, οπότε μπορεί να παραληφθεί. Από την άλλη πλευρά, ο πρώτος όρος στο $\sum\limits_{j=0}^{100} 1$ δεν είναι μηδέν.
5. Στο $[3, 7]$ η συνάρτηση $f(x) = x^{-2}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Ενότητα 5.1 Ασκήσεις

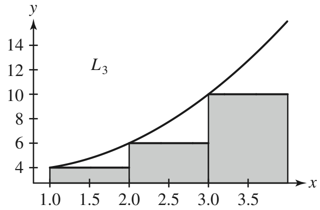
1. Στο διάστημα $[0, 3]$: 0.96 km, στο διάστημα $[1, 2.5]$: 0.5 km
3. 28.5 cm. Το παρακάτω σχήμα είναι μια γραφική παράσταση της βροχόπτωσης ως συνάρτηση του χρόνου. Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής παριστάνει τη συνολική βροχόπτωση.

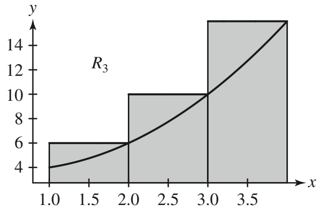


5. $L_5 = 46$, $R_5 = 44$ **7.** (α) $L_6 = 16.5$, $R_6 = 19.5$ (β) Μέσω της γεωμετρίας (δείτε το σχήμα), το ακριβές εμβαδόν είναι $A = 18$. Επομένως, το L_6 υποεκτιμά το πραγματικό εμβαδόν ($L_6 - A = -1.5$), ενώ το R_6 υπερεκτιμά το πραγματικό εμβαδόν ($R_6 - A = +1.5$).



9. $R_3 = 32$, $L_3 = 20$. Το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση είναι μεγαλύτερο από L_3 αλλά μικρότερο από R_3.





11. $R_3 = 2.5$, $M_3 = 2.875$, $L_6 = 3.4375$
13. (α) $L_4 = 1.75$ (β) $R_4 = 3.75$ (γ) Το πραγματικό εμβαδόν A κάτω από την καμπύλη $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τη σχέση $L_4 < A < R_4$.
15. $L_4 \approx 2.1730$ **17.** $R_6 \approx 1.2963$ **19.** $M_5 \approx 1.30$ **21.** $L_4 \approx 0.410236$

23. $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k^7$ **25.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{5}(2^k + 2)$ **27.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)(i+2)}$ **29.** (α) 45 (β) 24 (γ) 99

31. (α) -1 (β) 13 (γ) 12 **33.** 15,050 **35.** 352,800 **37.** 1,093,350 **39.** 41,650 **41.** $-123{,}165$ **43.** $\dfrac{1}{2}$ **45.** $\dfrac{1}{3}$

47. 18, η περιοχή κάτω από τη γραφική παράσταση είναι τρίγωνο με βάση 2 και ύψος 18.
49. 12, η περιοχή κάτω από την καμπύλη είναι τραπέζιο με μήκος βάσης 4 και ύψη 2 και 4.
51. 2, η περιοχή κάτω από την καμπύλη στο $[0, 2]$ είναι τρίγωνο με βάση και ύψος 2.

53. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} R_N = 16$ **55.** $R_N = \dfrac{26}{3} + \dfrac{8}{n} + \dfrac{4}{3n^2}$, εμβαδόν $= \dfrac{26}{3}$ **57.** $R_N = 222 + \dfrac{189}{N} + \dfrac{27}{N^2}$, 222

59. $R_N = 2 + \dfrac{6}{N} + \dfrac{8}{N^2}$, 2 **61.** $R_N = (b-a)(2a+1) + (b-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{N}$, $(b^2 + b) - (a^2 + a)$

63. Το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^4$ και του άξονα των x στο διάστημα $[0, 1]$.

65. Το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της $y = e^x$ και του άξονα των x στο διάστημα $[-2, 3]$.

67. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)$ **69.** $\displaystyle\lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty} \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{15 + \frac{8j}{N}}$

71. $\lim_{N\to\infty} M_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} \tan\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\left(j - \frac{1}{2}\right)\right)$

73. Παριστάνει το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ και του άξονα των x στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό είναι το τμήμα του κυκλικού δίσκου $x^2 + y^2 \leq 1$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Ως εκ τούτου, το εμβαδόν είναι $\frac{\pi}{4}$.

75. Από τις τρεις προσεγγίσεις, η R_N είναι η λιγότερο ακριβής, έπειτα η L_N και τέλος η M_N είναι η πιο ακριβής.

77. Το εμβαδόν A κάτω από την καμπύλη είναι κάπου μεταξύ του $L_4 \approx 0.518$ και του $R_4 \approx 0.768$.

79. Η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \pi/2]$, οπότε $0.79 \approx L_4 \leq A \leq R_4 \approx 1.18$.

81. $L_{100} = 0.793988$, $R_{100} = 0.80399$, $L_{200} = 0.797074$, $R_{200} = 0.802075$, επομένως $A = 0.80$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

83. $R_{100} \approx 1.4142$ **85.** $R_{100} \approx 0.9946$, πρόβλεψη: εμβαδόν $= 1$

87. (α) Έστω $f(x) = e^x$ στο $[0, 1]$. Με $n = N$, $\Delta x = (1 - 0)/N = 1/N$ και

$$x_j = a + j\Delta x = \frac{j}{N}$$

για $j = 0, 1, 2, \ldots, N$. Επομένως,

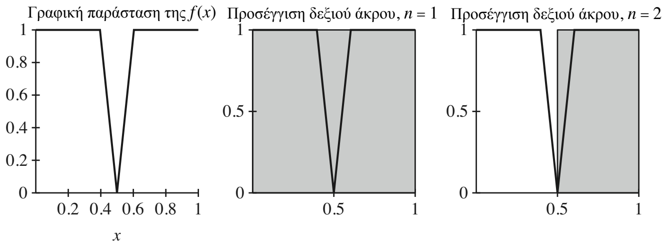
$$L_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{j/N}$$

(β) Εφαρμόζοντας την Εξ. (8) με $r = e^{1/N}$, έχουμε

$$L_N = \frac{1}{N} \frac{(e^{1/N})^N - 1}{e^{1/N} - 1} = \frac{e - 1}{N(e^{1/N} - 1)}$$

(γ) $A = e - 1$

89.



91. Όταν η f' είναι μεγάλη, η γραφική παράσταση της f είναι πιο απότομη και επομένως υπάρχει μεγαλύτερο κενό μεταξύ της f και της L_N ή της R_N.

95. $N > 30{,}000$

Ενότητα 5.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. 2

2. (α) Λάθος. Το $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι το *προσημασμένο* εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των x.
(β) Σωστό (γ) Σωστό

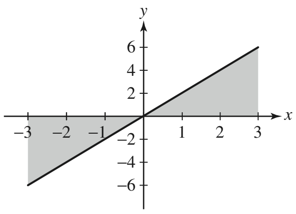
3. Επειδή $\cos(\pi - x) = -\cos x$, το «αρνητικό» εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της $y = \cos x$ και του άξονα των x στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ απαλείφεται ακριβώς με το «θετικό» εμβαδόν μεταξύ του άξονα των x στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. $\int_{-1}^{-5} 8\,dx$

Ενότητα 5.2 Ασκήσεις

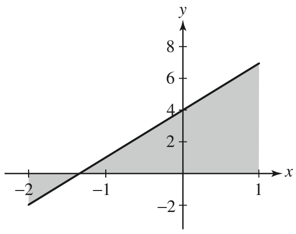
1. Η περιοχή που φράσσεται από τη γραφική παράσταση της $y = 2x$ και του άξονα των x στο διάστημα $[-3, 3]$ αποτελείται από δύο ορθογώνια τρίγωνα. Το ένα έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(3)(6) = 9$ κάτω από τον άξονα και το άλλο έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(3)(6) = 9$ πάνω από τον άξονα. Επομένως,

$$\int_{-3}^{3} 2x\,dx = 9 - 9 = 0$$



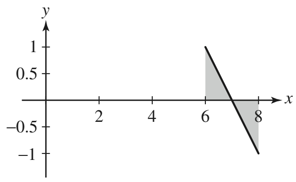
3. Η περιοχή που φράσσεται από τη γραφική παράσταση της $y = 3x + 4$ και τον άξονα των x στο διάστημα $[-2, 1]$ αποτελείται από δύο ορθογώνια τρίγωνα. Το ένα έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(\frac{2}{3})(2) = \frac{2}{3}$ κάτω από τον άξονα και το άλλο έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(\frac{7}{3})(7) = \frac{49}{6}$ πάνω από τον άξονα. Επομένως,

$$\int_{-2}^{1} (3x + 4)\,dx = \frac{49}{6} - \frac{2}{3} = \frac{15}{2}$$



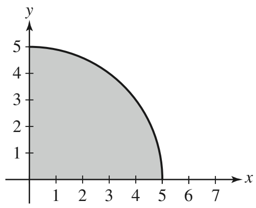
5. Η περιοχή που φράσσεται από τη γραφική παράσταση της $y = 7 - x$ και τον άξονα των x στο διάστημα $[6, 8]$ αποτελείται από δύο ορθογώνια τρίγωνα. Το ένα έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$ πάνω από τον άξονα και το άλλο έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$ κάτω από τον άξονα. Επομένως,

$$\int_{6}^{8} (7 - x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$



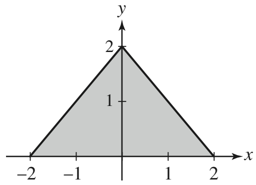
7. Η περιοχή που φράσσεται από τη γραφική παράσταση της $y = \sqrt{25 - x^2}$ και τον άξονα των x στο διάστημα $[0, 5]$ είναι ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5. Επομένως,

$$\int_{0}^{5} \sqrt{25 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi(5)^2 = \frac{25\pi}{4}$$



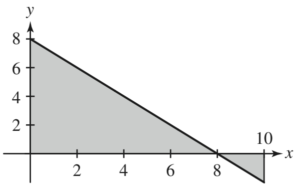
9. Η περιοχή που φράσσεται από τη γραφική παράσταση της $y = 2 - |x|$ και τον άξονα των x στο διάστημα $[-2, 2]$ είναι ένα τρίγωνο από τον άξονα με βάση 4 και ύψος 2. Ως εκ τούτου,

$$\int_{-2}^{2} (2 - |x|)\, dx = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$$



11. (α) $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = \lim\limits_{N\to\infty} \left(30 - \dfrac{50}{N}\right) = 30$
(β) Η περιοχή που φράσσεται από τη γραφική παράσταση της $y = 8 - x$ και τον άξονα των x στο διάστημα $[0, 10]$ αποτελείται από δύο ορθογώνια τρίγωνα. Το ένα έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(8)(8) = 32$ πάνω από τον άξονα και το άλλο έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}(2)(2) = 2$ κάτω από τον άξονα. Οπότε,

$$\int_{0}^{10} (8 - x)\, dx = 32 - 2 = 30$$



13. (α) $-\dfrac{\pi}{2}$ (β) $\dfrac{3\pi}{2}$

15. $\displaystyle\int_0^3 g(t)\, dt = \frac{3}{2}, \int_3^5 g(t)\, dt = 0$

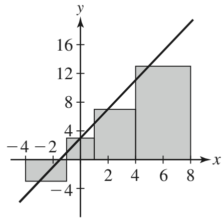
17. Η διαμέριση P ορίζεται ως

$$x_0 = 0 \quad < \quad x_1 = 1 \quad < \quad x_2 = 2.5 \quad < \quad x_3 = 3.2 \quad < \quad x_4 = 5$$

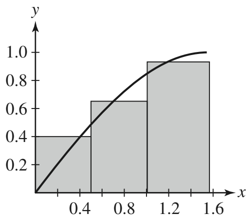
Το σύνολο των σημείων δειγματοληψίας είναι $C = \{c_1 = 0.5, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 4.5\}$. Τέλος, η τιμή του αθροίσματος Riemann είναι

$$34.25(1 - 0) + 20(2.5 - 1) + 8(3.2 - 2.5) + 15(5 - 3.2) = 96.85$$

19. $R(f, P, C) = 70$, ακολουθεί ένα πρόχειρο διάγραμμα της γραφικής παράστασης της f και των ορθογωνίων.

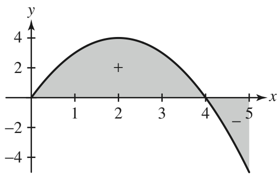


21. $R(f, P, C) = 1.029225$, ακολουθεί ένα πρόχειρο διάγραμμα της γραφικής παράστασης της f και των ορθογωνίων.

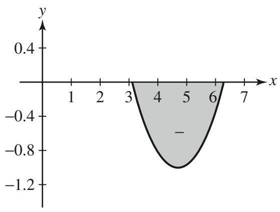


23. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του αθροίσματος Riemann αριστερών άκρων με $\Delta t = 1$, $\int_0^{12} E(t)dt \approx E(0)\Delta t + E(1)\Delta t + \cdot\cdot$
κιλοβατώρες.

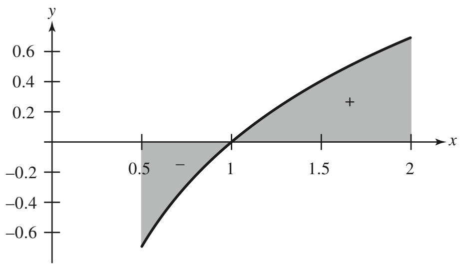
25.



27.



29.



31. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι πάντα θετική. Το ολοκλήρωμα, επομένως, πρέπει να είναι θετικό αφού το προσημασμένο εμβαδόν έχει μόνο θετικό μέρος.

33. Εφόσον η $y = x$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[0, 2\pi]$ και $\sin x \geq 0$ στο $[0, \pi]$ αλλά $\sin x \leq 0$ στο $[\pi, 2\pi]$, προκύπτει ότι το εμβαδόν κάτω από τον άξονα των x περικλείεται από την $y = x \sin x$ στο διάστημα $[0, \pi]$. Επομένως, το συνολικό εμβαδόν στο $[0, 2\pi]$ θα είναι αρνητικό, έτσι ώστε το ορισμένο ολοκλήρωμα θα είναι επίσης αρνητικό.

35. 36 **37.** 243 **39.** $-\frac{2}{3}$ **41.** $\frac{196}{3}$ **43.** $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{6}$ **45.** 17 **47.** -12

49. $\displaystyle\int_a^b H(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{αν } b \le 0 \\ b & \text{αν } a \le 0 \text{ και } b > 0 \\ b-a & \text{αν } a > 0 \end{cases}$

51. Ο τύπος του ολοκληρώματος ισχύει για $b > 0$ από την Άσκηση 50 και ισχύει για $b = 0$ από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος σε ένα διάστημα μηδενικού μήκους. Θεωρήστε τώρα την περίπτωση όπου $b < 0$. Από τη συμμετρία $\displaystyle\int_b^0 x^3 dx = -\int_0^{|b|} x^3 dx$. Από την Άσκηση 50 $-\displaystyle\int_0^{|b|} x^3 dx = -\frac{|b|^4}{4} = -\frac{b^4}{4}$. Επομένως, $\displaystyle\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$.

53. $-\dfrac{63}{4}$ **55.** 7 **57.** 8 **59.** -7 **61.** $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,dx$ **63.** $\displaystyle\int_5^9 f(x)\,dx$

65. $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx = -\int_0^a x\,dx + \frac{b^2}{2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$

67. Όταν η $f(x)$ παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές στο $[a, b]$, το $\int_a^b f(x)\,dx$ παριστάνει το προσημασμένο εμβαδόν μεταξύ της f και του άξονα των x ενώ το $\int_a^b |f(x)|\,dx$ παριστάνει το συνολικό (μη προσημασμένο) εμβαδόν μεταξύ της f και του άξονα των x. Οποιαδήποτε προσημασμένα εμβαδά ήταν μέρος του $\int_a^b f(x)\,dx$ θεωρούνται θετικά στο $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

69. $[-1, \sqrt{2}]$ or $[-\sqrt{2}, 1]$ **71.** 9 **73.** $\dfrac{1}{2}$ **75.** Στο διάστημα $[0, 1]$ $x^5 \le x^4$, από την άλλη πλευρά $x^4 \le x^5$ για $x \in [1, 2]$. **77.** Η $y = \sin x$ είναι αύξουσα στο $[0.2, 0.3]$. Συνεπώς, για $0.2 \le x \le 0.3$ έχουμε

$$m = 0.198 \le 0.19867 \approx \sin 0.2 \le \sin x \le \sin 0.3 \approx 0.29552 \le 0.296 = M$$

Επομένως, από το θεώρημα σύγκρισης έχουμε

$$0.0198 = m(0.3-0.2) = \int_{0.2}^{0.3} m\,dx \le \int_{0.2}^{0.3} \sin x\,dx \le \int_{0.2}^{0.3} M\,dx = M(0.3-0.2) = 0.0296$$

79. Η f είναι φθίνουσα και μη αρνητική στο διάστημα $[\pi/4, \pi/2]$. Επομένως, $0 \le f(x) \le f(\pi/4) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ για κάθε x στο $[\pi/4, \pi/2]$.

81. Το συμπέρασμα $f'(x) \le g'(x)$ είναι λανθασμένο. Θεωρήστε $a = 0, b = 1, f(x) = x, g(x) = 2$. Τότε $f(x) \le g(x)$ για κάθε x στο διάστημα $[0, 1]$, αλλά $f'(x) = 1$ ενώ $g'(x) = 0$ για κάθε x.

83. Αν η f είναι περιττή συνάρτηση, τότε $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x. Επομένως, για κάθε εμβαδόν με θετικό πρόσημο στο δεξιό ημιεπίπεδο όπου η f είναι πάνω από τον άξονα των x υπάρχει ένα αντίστοιχο εμβαδόν με αρνητικό πρόσημο στο αριστερό ημιεπίπεδο όπου η f είναι κάτω από τον άξονα των x. Ομοίως, για κάθε εμβαδόν με αρνητικό πρόσημο στο δεξιό ημιεπίπεδο όπου η f είναι κάτω από τον άξονα των x υπάρχει ένα αντίστοιχο εμβαδόν με θετικό πρόσημο στο αριστερό ημιεπίπεδο όπου η f είναι πάνω από τον άξονα των x.

Ενότητα 5.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση είναι μια αντιπαράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 0$. **2.** Καμία διαφορά **3.** Όχι

4. (α) Λάθος. Ακόμη κι αν $f(x) = g(x)$, οι αντιπαράγωγοι F και G μπορεί να διαφέρουν κατά μία προσθετική σταθερά.

(β) Σωστό. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η παράγωγος οποιασδήποτε σταθεράς είναι 0.

(γ) Λάθος. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι διαφορετικές, τότε οι αντιπαράγωγοι F και G διαφέρουν κατά μία γραμμική συνάρτηση: $F(x) - G(x) = ax + b$ για κάποιες σταθερές a και b.

5. Όχι

Ενότητα 5.3 Ασκήσεις

1. $6x^3 + C$ **3.** $\frac{2}{5}x^5 - 8x^3 + 12\ln|x| + C$ **5.** $2\sin x + 9\cos x + C$ **7.** $12e^x + 5x^{-1} + C$

9. (α) (ii) (β) (iii) (γ) (i) (δ) (iv)

11. $4x - 9x^2 + C$ **13.** $\frac{11}{5}t^{5/11} + C$ **15.** $3t^6 - 2t^5 - 14t^2 + C$ **17.** $5z^{1/5} - \frac{3}{5}z^{5/3} + \frac{4}{9}z^{9/4} + C$ **19.** $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

21. $-\frac{18}{t^2} + C$ **23.** $\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^{3/2} + t + C$ **25.** $\frac{1}{2}x^2 + 3\ln|x| + 4x^{-1} + C$ **27.** $12\sec x + C$ **29.** $-\csc t + C$

31. $\frac{1}{3}x^3 - \tan x + C$ **33.** $\sec\theta + \tan\theta + C$ **35.** $\frac{3}{5}e^{5x} + C$ **37.** $4x^2 + 2e^{5-2x} + C$

39. Η γραφική παράσταση (B) δεν έχει τα ίδια τοπικά ακρότατα που φαίνονται για την $y = f(x)$ και επομένως *δεν είναι* μια αντιπαράγωγος της $y = f(x)$.

41. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{7}(x+13)^7 + C\right) = (x+13)^6$ **43.** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}(4x+13)^3 + C\right) = \frac{1}{4}(4x+13)^2(4) = (4x+13)^2$

45. $G'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ και αυτή δεν είναι ίση με την $f(x)$. Όμως, $H'(x) = 2e^x + 2xe^x - 2e^x = 2xe^x = f(x)$.

47. $y = \frac{1}{4}x^4 + 4$ **49.** $y = t^2 + 3t^3 - 2$ **51.** $y = \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{3}$ **53.** $y = \frac{1}{12}(3x+2)^4 - \frac{1}{3}$ **55.** $y = 1 - \cos x$

57. $y = e^x - e^2$ **59.** $y = -3e^{12-3t} + 10$ **61.** $f'(x) = 6x^2 + 1$, $f(x) = 2x^3 + x + 2$

63. $f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + 1$, $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ **65.** $f'(t) = -2t^{-1/2} + 2$, $f(t) = -4t^{1/2} + 2t + 4$

67. $f'(t) = \frac{1}{2}t^2 - \sin t + 2$, $f(t) = \frac{1}{6}t^3 + \cos t + 2t - 3$

69. Η διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από την $s(t)$ είναι

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = 6t^2 - t$$

και η συνοδεύουσα αρχική συνθήκη είναι $s(1) = 0$, $s(t) = 2t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}$.

71. $v_y = -49$ m/s **73.** $\frac{ds}{dt} = \sin t$, $s(0) = 0$, λύση: $s(t) = 1 - \cos t$ **75.** 6.25 s, 78.125 m **77.** 300 m/s

81. $c_1 = c_2 = -3$ **83.** (α) Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}F(2x)\right) = \frac{1}{2}F'(2x)\cdot 2 = F'(2x) = f(2x)$$

Επομένως, η $y = \frac{1}{2}F(2x)$ είναι μια αντιπαράγωγος της $y = f(2x)$.

(β) $\frac{1}{k}F(kx) + C$

Ενότητα 5.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) 4 (β) Το προσημασμένο εμβαδόν μεταξύ της $y = f(x)$ και του άξονα των x

2. 3 **3.** (α) Λάθος. Το ΘΘΛΙ ισχύει μόνο για συνεχείς συναρτήσεις.

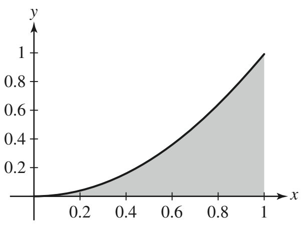
(β) Λάθος. Το ΘΘΛΙ λειτουργεί για οποιαδήποτε αντιπαράγωγο της ολοκληρωτέας συνάρτησης.

(γ) Λάθος. Αν δεν μπορείτε να βρείτε μια αντιπαράγωγο της ολοκληρωτέας συνάρτησης, δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ΘΘΛΙ για να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα, αλλά αυτό μπορεί παρ' όλα αυτά να υπάρχει.

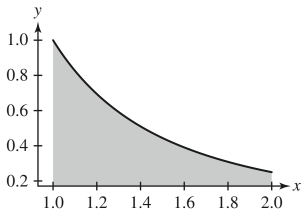
4. 0

Ενότητα 5.4 Ασκήσεις

1. $A = \dfrac{1}{3}$



3. $A = \dfrac{1}{2}$



5. $\dfrac{27}{2}$ **7.** -1 **9.** 128 **11.** $\dfrac{27}{2}$ **13.** $\dfrac{16}{3}$ **15.** $\dfrac{31}{40}$ **17.** $\dfrac{2}{3}$ **19.** 12 **21.** $\dfrac{11}{6}$ **23.** $60\sqrt{3} - \dfrac{8}{3}$ **25.** $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **27.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

29. $\pi - 2$ **31.** $e - 1$ **33.** $\dfrac{1}{6}(e - e^{-17})$ **35.** $\ln 5$ **37.** e **39.** $3e^{-6} - 9$

41. Διάρκεια μεγαλύτερη από 100 h: πιθανότητα ≈ 0.905, διάρκεια μεγαλύτερη από 1000 h: πιθανότητα ≈ 0.368

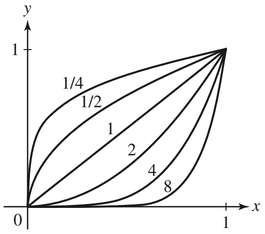
43. $\displaystyle\int_{-2}^{0} -x dx + \int_{0}^{1} x dx = \frac{5}{2}$ **45.** $\displaystyle\int_{-2}^{0} -x^3 dx + \int_{0}^{3} x^3 dx = \frac{97}{4}$ **47.** $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x dx = 2$

49. $\frac{1}{4}\left(b^4 - 1\right)$ **51.** $\frac{1}{6}(b^6 - 1)$ **53.** $\ln 5$ **55.** $\frac{707}{12}$

57. Μιλώντας γραφικά, για μια περιττή συνάρτηση το εμβαδόν με θετικό πρόσημο από το $x = 0$ ως το $x = 1$ απαλείφεται με το εμβαδόν με αρνητικό πρόσημο από το $x = -1$ ως το $x = 0$.

59. 24

61. Το $\int_0^1 x^n\, dx$ παριστάνει το εμβαδόν μεταξύ της θετικής καμπύλης $f(x) = x^n$ και του άξονα των x στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό το εμβαδόν μειώνεται καθώς το n μεγαλώνει όπως είναι εμφανές στην παρακάτω γραφική παράσταση, η οποία δείχνει καμπύλες για διάφορες τιμές του n.



63. Αρχικά, αν $a = b$, τότε εξ ορισμού $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Επίσης, $F(b) - F(a) = 0$, οπότε σε αυτή την περίπτωση ισχύει $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$. Υποθέστε τώρα ότι $b < a$. Τότε

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a)$$

Επομένως, η $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ ισχύει επίσης όταν $b < a$.

69. Έστω $a > b$ πραγματικοί αριθμοί και έστω η $f(x)$ τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq K$ για $x \in [a, b]$. Από το ΘΘΛ

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

Εφόσον $f'(x) \geq -K$ για κάθε $x \in [a, b]$, παίρνουμε

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \geq -K(x - a)$$

Εφόσον $f'(x) \leq K$ για κάθε $x \in [a, b]$, παίρνουμε

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \leq K(x - a)$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ανισότητες παίρνουμε

$$-K(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq K(x - a)$$

οπότε εξ ορισμού

$$|f(x) - f(a)| \leq K|x - a|$$

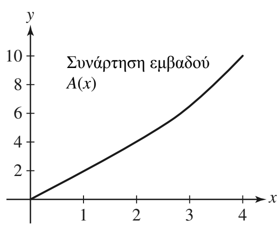
Ενότητα 5.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) Όχι (β) Ναι **2.** (γ) **3.** Ναι. Όλες οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν μια αντιπαράγωγο, δηλαδή $\int_a^x f(t)\,dt$.
4. (β), (ε) και (στ)

Ενότητα 5.5 Ασκήσεις

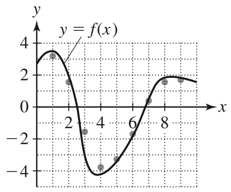
1. $A(x) = 4x - x^2, A'(x) = 4 - 2x$ **3.** $A(x) = 2x^2 + 2x^3, A'(x) = 4x + 6x^2$
5. $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + \cos x - 1, A'(x) = x^2 - \sin x$ **7.** $A(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}, A'(x) = e^{2x}$
9. $F(0) = 0, F(3) \approx 5.72, F'(0) = 0, F'(3) = 2\sqrt{3}$ **11.** $F(-2) = 0, F(2) \approx 2.21, F'(0) = 1, F'(2) = \frac{1}{5}$
13. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{32}{5}$ **15.** $1 - \cos x$ **17.** $\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{12}$ **19.** $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}$ **21.** $-e^{-9x-2} + e^{-3x}$ **25.** $x^5 - 9x^3$ **27.** $\sec(5t - 9)$
29. (α) $A(2) = 4$, $A(3) = 6.5$, $A'(2) = 2$ και $A'(3) = 3$
(β)

$$A(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



31.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(x)$	0	3.3	6.4	6.5	2.8	−1	−3.6	−4.6	−3.3	−1.5	0.1
$A'(x)$		3.2	1.6	−1.8	−3.75	−3.2	−1.8	0.15	1.55	1.7	



33. $\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ **35.** $-\cos^4 s \sin s$ **37.** $2x\tan(x^2) - \dfrac{\tan(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

39. Η ελάχιστη τιμή της $A(x)$ είναι $A(1.5) = -1.25$. Η μέγιστη τιμή της A είναι $A(4.5) = 1.25$.

41. $A(x) = (x-2) - 1$ και $B(x) = (x-2)$.

43. (α) Η A δεν έχει τοπικό μέγιστο στο P. (β) Η A έχει τοπικό ελάχιστο στο R. (γ) Η A έχει τοπικό μέγιστο στο S. (δ) Σωστό

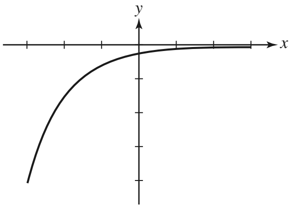
45. (α) Αν το $x = c$ είναι σημείο καμπής της A, τότε $A''(c) = f'(c) = 0$.

(β) Αν η A είναι κυρτή, τότε $A''(x) > 0$. Εφόσον A είναι η συνάρτηση εμβαδού που σχετίζεται με την f, $A'(x) = f(x)$ από το ΘΘΛΙΙ, οπότε $A''(x) = f'(x)$. Επομένως $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι αύξουσα.

(γ) Η A είναι κοίλη, τότε $A''(x) < 0$. Εφόσον η A είναι η συνάρτηση εμβαδού που σχετίζεται με την $f(x)$, $A'(x) = f(x)$ από το ΘΘΛΙΙ, οπότε $A''(x) = f'(x)$. Επομένως $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι φθίνουσα.

47. (α) Η A είναι αύξουσα στα διαστήματα $(0,4)$ και $(8,12)$ και φθίνουσα στα διαστήματα $(4,8)$ και $(12,\infty)$. (β) Τοπικό ελάχιστο: $x = 8$, τοπικό μέγιστο: $x = 4$ και $x = 12$ (γ) Η A έχει σημεία καμπής στα $x = 2$, $x = 6$ και $x = 10$. (δ) Η A είναι κυρτή στα διαστήματα $(0,2)$ και $(6,10)$ και κοίλη στα διαστήματα $(2,6)$ και $(10,\infty)$.

49. Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας γραφικής παράστασης είναι



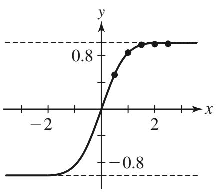
51. Μικρότερο θετικό κρίσιμο σημείο: $x = (\pi/2)^{2/3}$ αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο. Μικρότερο θετικό σημείο καμπής: $x = \pi^{2/3}$, η $y = F(x)$ αλλάζει από κυρτή σε κοίλη.

53. (α) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, δηλαδή θετικό για κάθε x και επομένως η $\mathrm{erf}(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση.

(β) $\mathrm{erf}(-x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{0} e^{-t^2}\,dt$. Εφόσον η $f(t) = e^{-t^2}$ είναι άρτια συνάρτηση, $\displaystyle\int_{-x}^{0} e^{-t^2}\,dt = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Προκύπτει ότι $\mathrm{erf}(-x) = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-x}^{0} e^{-t^2}\,dt = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = -\mathrm{erf}(x)$. Επομένως, η $\mathrm{erf}(x)$ είναι περιττή συνάρτηση.

(γ) $\mathrm{erf}(1/2) \approx 0.5205, \mathrm{erf}(1) \approx 0.8427, \mathrm{erf}(3/2) \approx 0.9661, \mathrm{erf}(2) \approx 0.9953, \mathrm{erf}(5/2) \approx 0.9996$ (δ) $y = -1$ και $y = 1$

(ε)



55. (α) Τότε από το ΘΘΛ, Μέρος ΙΙ, $A'(x) = f(x)$ και επομένως οι $y = A(x)$ και $y = F(x)$ είναι αμφότερες αντιπαράγωγοι της $y = f(x)$. Επομένως, $F(x) = A(x) + C$ για κάποια σταθερά C.
(β)

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (A(b) + C) - (A(a) + C) = A(b) - A(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0 = \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ΘΘΛ, Μέρος Ι.
57. Γράψτε

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx = \int_{u(x)}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{v(x)} f(x)\,dx = \int_0^{v(x)} f(x)\,dx - \int_0^{u(x)} f(x)\,dx$$

Τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας και το ΘΘΛ

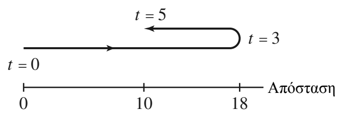
$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int_0^{v(x)} f(x)\,dx - \frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} f(x)\,dx = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

Ενότητα 5.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

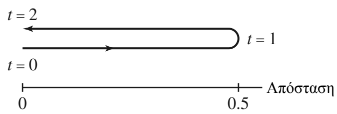
1. Η συνολική πτώση της θερμοκρασίας του μεταλλικού αντικειμένου στα πρώτα T λεπτά αφού βυθίστηκε σε κρύο νερό.
2. 560 km
3. Οι ποσότητες (α) και (γ) αναπαριστάνονται φυσικά με παραγώγους. Οι ποσότητες (β) και (δ) αναπαριστάνονται φυσικά με ολοκληρώματα.

Ενότητα 5.6 Ασκήσεις

1. 15,250 γαλόνια **3.** 3,660,000 **5.** 33 m **7.** 3.675 m **9.** Μετατόπιση: 10 m, απόσταση: 26 m



11. Μετατόπιση: 0 m, απόσταση: 1 m



13. 39 m/s **15.** 9200 οχήματα
17. Συνολικό κόστος: \$650, μέσο κόστος των πρώτων 10: \$37.50, μέσο κόστος των τελευταίων 10: \$27.50
19. 112.5 ft
21. Το ολοκλήρωμα αναπαριστάνει τη συνολική χιονόπτωση στην 24η περίοδο. Ήταν περίπου 35.8 in.
23. (α) 2.916×10^{10} (β) Περίπου 240,526 αστεροειδείς διαμέτρου 50 km

25. $\int_0^{365} R(t)\,dt \approx 605.05$ δισεκατομμύρια ft^3

27. $100 \le t \le 150$: 404.968 οικογένειες, $350 \le t \le 400$: 245.812 οικογένειες

29. Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $v(t) = s'(t) = t^{-2}$, μια αντιπαράγωγος για την οποία είναι η $F(t) = -t^{-1}$. Επομένως, η θέση του σωματιδίου τη στιγμή t είναι

$$s(t) = \int_1^t s'(u)\,du = F(u)\Big|_1^t = F(t) - F(1) = 1 - \frac{1}{t} < 1$$

για κάθε $t \ge 1$. Επομένως, το σωματίδιο δεν θα περάσει ποτέ από το $x = 1$, που σημαίνει ότι δεν θα περάσει ποτέ ούτε από το $x = 2$.

31. (α) $\text{CS} = \int_0^{q^*} [D(q) - p^*]\,dq$ (β) $\text{PS} = \int_0^{q^*} [p^* - S(q)]\,dq$

Ενότητα 5.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) και (β) **2.** (α) $u(x) = x^2 + 9$ (β) $u(x) = x^3$ (γ) $u(x) = \cos x$ **3.** (γ)

Ενότητα 5.7 Ασκήσεις

1. $du = (3x^2 - 2x)\,dx$ **3.** $du = -2x\sin(x^2)\,dx$ **5.** $du = 4e^{4x+1}\,dx$

7. $\int (x+8)^4 dx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(x+8)^5 + C$

9. $\int (3t-4)^5 dt = \int \frac{1}{3}u^5\,du = \frac{1}{18}u^6 + C = \frac{1}{18}(3t-5)^6 + C$

11. $\int t\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(t^2+1)^{3/2} + C$

13. $\int \frac{t^3}{(4-2t^4)^{11}}\,dt = -\frac{1}{8}\int u^{-11}\,du = \frac{1}{80}u^{-10} + C = \frac{1}{80}(4-2t^4)^{-10} + C$

15. $\int x(x+1)^9\,dx = \int (u-1)u^9\,du = \int (u^{10} - u^9)\,du = \frac{1}{11}u^{11} - \frac{1}{10}u^{10} + C = \frac{1}{11}(x+1)^{11} - \frac{1}{10}(x+1)^{10} + C$

17. $\int x^2\sqrt{4-x}dx = \int -(4-u)^2\sqrt{u}du = \int \left(-u^{5/2} + 8u^{3/2} - 16u^{1/2}\right) du = -\frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{16}{5}u^{5/2} - \frac{32}{3}u^{3/2} + C =$
$-\frac{2}{7}(4-x)^{7/2} + \frac{16}{5}(4-x)^{5/2} - \frac{32}{3}(4-x)^{3/2} + C$

19. $\int \sin\theta\cos^3\theta d\theta = \int -u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4\theta + C$

21. $\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

23. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **25.** $u = x^4$, $\frac{1}{4}\sin(x^4) + C$ **27.** $u = x^{3/2}$, $\frac{2}{3}\sin(x^{3/2}) + C$

29. $\frac{1}{40}(4x+5)^{10} + C$ **31.** $2\sqrt{t+12} + C$ **33.** $-\frac{1}{4(x^2+2x)^2} + C$ **35.** $\sqrt{x^2+9} + C$ **37.** $\frac{4}{7}x^7 - 7x^4 + 49x + C$

39. $\frac{1}{24}(2x^3-7)^4 + C$ **41.** $\frac{1}{36}(3x+8)^{12} + C$ **43.** $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$ **45.** $-\frac{1}{2}(x+5)^{-2} + C$ **47.** $\frac{1}{39}(z^3+1)^{13} + C$

49. $\frac{4}{9}(x+1)^{9/4} + \frac{4}{5}(x+1)^{5/4} + C$ **51.** $\frac{1}{3}\cos(8-3\theta) + C$ **53.** $2\sin\sqrt{t} + C$ **55.** $\frac{1}{4}\ln|\sec(4\theta+9)| + C$

57. $\ln|\sin x| + C$ **59.** $\frac{1}{4}\tan(4x+9)+C$ **61.** $2\tan(\sqrt{x})+C$ **63.** $-\frac{1}{6}(\cos 4x+1)^{3/2}+C$ **65.** $\frac{1}{2}(\sec\theta-1)^2+C$

67. $\frac{1}{14}e^{14x-7}+C$ **69.** $-\frac{1}{3(e^x+1)^3}+C$ **71.** $-\frac{1}{e^t+1}+C$ **73.** $\frac{1}{5}(\ln x)^5+C$ **75.** $-\ln|\cos(\ln x)|+C$

77. $-\frac{2}{1+\sqrt{x}}+\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}+C$

79. Με $u=\sin x$, $\frac{1}{2}\sin^2 x + C_1$. Με $u=\cos x$, $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$. Τα δύο αποτελέσματα διαφέρουν κατά μία σταθερά.

81. $u=\pi$ και $u=4\pi$ **83.** 78 **85.** $3-\sqrt{5}$ **87.** $\frac{3}{16}$ **89.** $\frac{98}{3}$ **91.** $\frac{243}{4}$ **93.** $\frac{1}{2}$ **95.** $\frac{1}{2}\ln(\sec 1)$ **97.** $\frac{1}{4}$

99. (α) Η πιθανότητα $v\in[0,b]$ είναι

$$\int_0^b \frac{1}{32}ve^{-v^2/64}\,dv$$

Έστω $u=-v^2/64$. Τότε $du=-v/32\,dv$ και

$$\int_0^b \frac{1}{32}ve^{-v^2/64}\,dv = -\int_0^{-b^2/64} e^u\,du = -e^u\Big|_0^{-b^2/64} = -e^{-b^2/64}+1$$

(β) $e^{-1/16}-e^{-25/64}$

101. $\frac{1}{4}f(x)^4+C$ **103.** $\frac{20}{3}\sqrt{5}-\frac{32}{5}\sqrt{3}$ **105.** $\ln|f(x)|+C$

107. Έστω $u=\sin\theta$. Τότε $u(\pi/6)=1/2$ και $u(0)=0$, όπως απαιτείται. Επιπλέον, $du=\cos\theta\,d\theta$, οπότε

$$d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$$

Αν $\sin\theta=u$, τότε $u^2+\cos^2\theta=1$, οπότε $\cos\theta=\sqrt{1-u^2}$. Επομένως, $d\theta=du/\sqrt{1-u^2}$. Αυτό δίνει

$$\int_0^{\pi/6} f(\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{1/2} f(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

109. $I=\pi/4$

Ενότητα 5.8 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) $b=3$ (β) $b=e^3$ **2.** $b=\sqrt{3}$ **3.** (β) **4.** $x=4u$

Ενότητα 5.8 Ασκήσεις

1. $\ln 9$ **3.** 3 **5.** $\frac{1}{3}\ln 4$ **7.** $\frac{\pi}{12}$ **9.** $\frac{\pi}{6}$ **11.** $\frac{7}{\ln 2}$

13. Έστω $u=x/3$. Τότε $x=3u$, $dx=3\,du$, $9+x^2=9(1+u^2)$ και

$$\int\frac{dx}{9+x^2}=\int\frac{3\,du}{9(1+u^2)}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{3}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}+C$$

15. $2\tan^{-1}2x+C$ **17.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ **19.** $\frac{1}{4}\sin^{-1}(4t)+C$ **21.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}t+C$ **23.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^{-1}(2x)+C$

25. $\frac{1}{2}\sec^{-1}x^2+C$ **27.** $\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}(1/2)$ **29.** $\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}+C$ **31.** $\frac{1}{\ln 2}$ **33.** $-\frac{1}{\ln 9}\cos(9^x)+C$ **35.** $\frac{1}{2}e^{y^2}+C$

37. $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9}+C$ **39.** $-\frac{7^{-x}}{\ln 7}+C$ **41.** $\frac{1}{8}\tan^8\theta+C$ **43.** $-\frac{2}{3}(1-\ln w)^{3/2}+C$ **45.** $-\sqrt{7-t^2}+C$

47. $\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+\tan^{-1}(x/2)+C$ **49.** $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right)+C$ **51.** $-e^{-x}-2x^2+C$ **53.** $e^x-\frac{e^{3x}}{3}+C$

55. $-\sqrt{4-x^2}+5\sin^{-1}(x/2)+C$ **57.** $\sin(e^x)+C$ **59.** $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{4x}{3}\right)+C$ **61.** $\frac{e^{7x}}{7}+\frac{3e^{5x}}{5}+e^{3x}+e^x+C$

63. $\frac{1}{3}\ln|x^3+2|+C$ **65.** $\ln|\sin x|+C$ **67.** $\frac{1}{8}(4\ln x+5)^2+C$ **69.** $\frac{3^{x^2}}{2\ln 3}+C$ **71.** $\frac{(\ln(\sin x))^2}{2}+C$

73. $\frac{2}{7}(t-3)^{7/2}+\frac{12}{5}(t-3)^{5/2}+6(t-3)^{3/2}+C$

75. Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$ αναπαριστάνει το εμβαδόν κάτω από το άνω μισό του μοναδιαίου κύκλου από το 0 ως το x. Η περιοχή περιέχει έναν τομέα του κύκλου και ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Ο τομέας έχει κεντρική γωνία $\frac{\pi}{2}-\theta$, όπου $\cos\theta=x$ και το ορθογώνιο τρίγωνο έχει βάση μήκους x και ύψος $\sqrt{1-x^2}$.

77. Δείξτε ότι $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-t^2}+t\sin^{-1}t\right)=\sin^{-1}t$.

79. Η ολοκλήρωση και των δύο μελών της εξίσωσης $e^t\geq 1$ δίνει

$$\int_0^x e^t\,dt=e^x-1\geq x \quad \text{ή} \quad e^x\geq 1+x$$

Η ολοκλήρωση και των δύο μελών της νέας εξίσωσης δίνει

$$\int_0^x e^t\,dt=e^x-1\geq x+x^2/2 \quad \text{ή} \quad e^x\geq 1+x+x^2/2$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας εκ νέου τα δύο μέλη παίρνουμε

$$\int_0^x e^t\,dt=e^x-1\geq x+x^2/2+x^3/6 \text{ ή } e^x\geq 1+x+x^2/2+x^3/6$$

όπως ζητείται.

81. Από την Άσκηση 79 $e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$. Επομένως,

$$\frac{e^x}{x^2}\geq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{x}{6}\geq\frac{x}{6}$$

Εφόσον $\lim_{x\to\infty}x/6=\infty$, $\lim_{x\to\infty}e^x/x^2=\infty$. Γενικότερα, από την Άσκηση 80

$$e^x\geq 1+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Επομένως,

$$\frac{e^x}{x^n}\geq\frac{1}{x^n}+\cdots+\frac{x}{(n+1)!}\geq\frac{x}{(n+1)!}$$

Εφόσον $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(n+1)!}=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$.

83. (α) Το πεδίο ορισμού της G είναι $x > 0$ και από το μέρος (i) της προηγούμενης άσκησης το σύνολο τιμών της G είναι **R**. Τώρα

$$G'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

για κάθε $x > 0$. Επομένως, η G είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, γεγονός που συνεπάγεται ότι η G έχει αντίστροφη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το **R** και το σύνολο τιμών είναι $\{x : x > 0\}$. Έστω ότι η F παριστάνει την αντίστροφη της G.
(β) Έστω x και y πραγματικοί αριθμοί και υποθέστε ότι $x = G(w)$ και $y = G(z)$ για κάποιους θετικούς πραγματικούς αριθμούς w και z. Τότε, χρησιμοποιώντας το μέρος (β) της προηγούμενης άσκησης

$$F(x + y) = F(G(w) + G(z)) = F(G(wz)) = wz = F(x) + F(y)$$

(γ) Έστω r οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Από το μέρος (ια) της προηγούμενης άσκησης, $G(E^r) = r$. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει τότε ότι $F(r) = E^r$.
(δ) Από τον τύπο για την παράγωγο μιας αντίστροφης συνάρτησης

$$F'(x) = \frac{1}{G'(F(x))} = \frac{1}{1/F(x)} = F(x)$$

85.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to -1} \int_1^x t^n\,dt &= \lim_{n\to -1} \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_1^x = \lim_{n\to -1}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1^{n+1}}{n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to -1} \frac{x^{n+1}-1}{n+1} = \lim_{n\to -1}(x^{n+1})\ln x\\
&= \ln x = \int_1^x t^{-1}\,dt
\end{aligned}$$

87. (α) Ερμηνεύοντας τη γραφική παράσταση με το y ως ανεξάρτητη μεταβλητή, βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι $x = e^y$. Η ολοκλήρωση ως προς y τότε δίνει το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής ως $\int_0^{\ln a} e^y\,dy$.
(β) Μπορούμε να πάρουμε το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$ από $x = 1$ ως $x = a$ υπολογίζοντας το εμβαδόν του ορθογωνίου που εκτείνεται από $x = 0$ ως $x = a$ οριζόντια και από $y = 0$ ως $y = \ln a$ κατακόρυφα και έπειτα αφαιρώντας το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής. Αυτό δίνει

$$\int_1^a \ln x\,dx = a\ln a - \int_0^{\ln a} e^y\,dy$$

(γ) Με απευθείας υπολογισμό

$$\int_0^{\ln a} e^y\,dy = e^y\Big|_0^{\ln a} = a - 1$$

Επομένως,

$$\int_1^a \ln x\,dx = a\ln a - (a-1) = a\ln a - a + 1$$

(δ) Με βάση αυτά τα αποτελέσματα, φαίνεται ότι

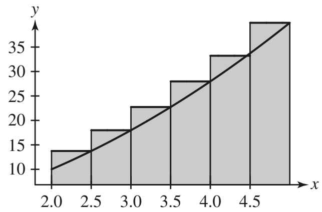
$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

Κεφάλαιο 5 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

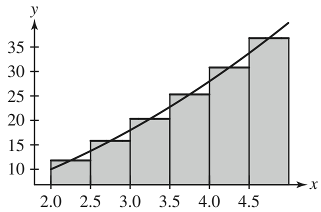
1. $L_4 = \dfrac{23}{4}$, $M_4 = 7$

3. Γενικά, το R_N είναι μεγαλύτερο από το $\int_a^b f(x)\,dx$ σε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ στο οποίο η $f(x)$ είναι αύξουσα. Δεδομένης της γραφικής παράστασης της f, μπορούμε να πάρουμε $[a,b]=[0,2]$. Για να είναι το L_4 μεγαλύτερο από το $\int_a^b f(x)\,dx$, η f πρέπει να είναι φθίνουσα στο $[a,b]$. Επομένως, μπορούμε να πάρουμε $[a,b]=[2,3]$.

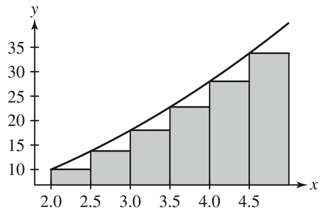
5. $R_6 = \frac{625}{8}$



$M_6 = \frac{1127}{16}$



$L_6 = \frac{505}{8}$, τα ορθογώνια που αντιστοιχούν σε αυτή την προσέγγιση φαίνονται παρακάτω.



7. $R_N = \dfrac{141}{2} + \dfrac{45}{N} + \dfrac{9}{2N^2}$, $\dfrac{141}{2}$ **9.** $R_5 \approx 0.733732$, $M_5 \approx 0.786231$, $L_5 \approx 0.833732$

11. Το εμβαδόν που παριστάνεται από τα σκιασμένα ορθογώνια είναι R_5, $R_5 = 90$, $L_5 = 90$.

13. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{6N}\sum_{j=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi j}{6N}\right) = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{1}{2}$ **15.** $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{5}{N}\sum_{j=1}^{N} \sqrt{4+5j/N} = \int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{38}{3}$

17. $x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + C$ **19.** $-\cos(\theta-8)+C$ **21.** $-2t^{-2}+4t^{-3}+C$ **23.** $\tan x + C$ **25.** $\frac{1}{5}(y+2)^5 + C$

27. $e^x - \dfrac{x^2}{2} + C$ **29.** $4\ln|x| + C$ **31.** $y(x) = x^4 + 3$ **33.** $y(x) = 2\sqrt{x} - 1$ **35.** $y(x) = -e^{-x} + 4$

37. $f(t) = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{3} - t + 2$ **39.** $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{3}$ **41.** $\dfrac{1}{5}\left(1 - \dfrac{9\sqrt{3}}{32}\right)$ **43.** $4x^5 - \dfrac{9}{4}x^4 - x^2 + C$ **45.** $\dfrac{4}{5}x^5 - 3x^4 + 3x^3 + C$

47. $\dfrac{1}{4}x^4 + x^3 + C$ **49.** $\dfrac{46}{3}$ **51.** $27/2$ **53.** $\dfrac{1}{150}(10t-7)^{15} + C$ **55.** $-\dfrac{1}{24}(3x^4+9x^2)^{-4} + C$ **57.** 506 **59.** $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

61. $\frac{1}{27}\tan(9t^3+1)+C$ **63.** $\frac{1}{2}\cot(9-2\theta)+C$ **65.** $3-\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ **67.** $-\frac{1}{2}e^{9-2x}+C$ **69.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$ **71.** $\frac{10^x e^x}{\ln 10+1}+C$

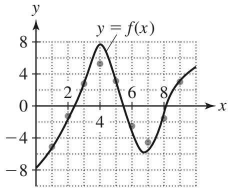
73. $\frac{1}{2(e^{-x}+2)^2}+C$ **75.** $\frac{1}{2}\ln 2$ **77.** $\tan^{-1}(\ln t)+C$ **79.** $\frac{1}{2}$ **81.** $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+C$ **83.** $\sec^{-1}12-\sec^{-1}4$

85. $\frac{\pi}{12}$ **87.** $\frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2)+C$ **89.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(4\sqrt{2})$ **91.** $\frac{\pi^4}{1024}$ **93.** $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx$

95. Τοπικό ελάχιστο στο $x=0$, δεν υπάρχουν τοπικά μέγιστα, σημεία καμπής στα $x=\pm 1$.

97.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(x)$	0	−6.8	−10	−10	−5	1.2	1.2	−3.6	−7.2	−5.4	−1.4
$A'(x)$		−5.2	−1.8	2.7	5.8	3.1	−2.4	−4.2	−0.9	2.9	



99. Ημερήσια κατανάλωση: 9.312 εκατομμύρια γαλόνια, από 6 ΜΜ ως τα μεσάνυχτα: 1.68 εκατομμύρια γαλόνια

101. \$208,245 **103.** 0

107. Η συνάρτηση $f(x)=2^x$ είναι αύξουσα, οπότε η $1\le x\le 2$ συνεπάγεται ότι $2=2^1\le 2^x\le 2^2=4$. Επομένως,

$$2=\int_1^2 2\,dx\le\int_1^2 2^x\,dx\le\int_1^2 4\,dx=4$$

Από την άλλη πλευρά, η συνάρτηση $f(x)=3^{-x}$ είναι φθίνουσα, οπότε η $1\le x\le 2$ συνεπάγεται ότι

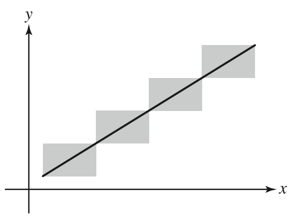
$$\frac{1}{9}=3^{-2}\le 3^{-x}\le 3^{-1}=\frac{1}{3}$$

Τότε προκύπτει ότι

$$\frac{1}{9}=\int_1^2 \frac{1}{9}\,dx\le\int_1^2 3^{-x}\,dx\le\int_1^2 \frac{1}{3}\,dx=\frac{1}{3}$$

109. $\frac{4}{3}\le\int_0^1 f(x)\,dx\le\frac{5}{3}$ **111.** $-\frac{1}{1+\pi}$ **113.** $\sin^3 x\cos x$ **115.** -2

117. Θεωρήστε το παρακάτω σχήμα, το οποίο δείχνει ένα μέρος της γραφικής παράστασης μιας γραμμικής συνάρτησης.



Τα σκιασμένα ορθογώνια παριστάνουν τις διαφορές μεταξύ των προσεγγίσεων των δεξιών άκρων R_N και των αριστερών άκρων L_N. Επειδή η γραφική παράσταση της $y=f(x)$ είναι μία ευθεία, το κάτω μέρος κάθε σκιασμένου ορθογωνίου έχει ακριβώς το ίδιο μέγεθος με το άνω τμήμα. Επομένως, αν πάρουμε τον μέσο όρο των L_N και R_N, το σφάλμα στις δύο προσεγγίσεις θα απαλείφεται ακριβώς αφήνοντας

$$\frac{1}{2}(R_N + L_N) = \int_a^b f(x)\,dx$$

119. Έστω

$$F(x) = x\sqrt{x^2-1} - 2\int_1^x \sqrt{t^2-1}dt$$

Τότε

$$\frac{dF}{dx} = \sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2\sqrt{x^2-1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Επίσης, $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, επομένως οι $y = F(x)$ και $y = \cosh^{-1}x$ έχουν την ίδια παράγωγο. Συμπεραίνουμε ότι οι $y = F(x)$ και $y = \cosh^{-1}x$ διαφέρουν κατά μία σταθερά:

$$F(x) = \cosh^{-1}x + C$$

Θέστε τώρα $x = 1$. Επειδή $F(1) = 0$ και $\cosh^{-1}1 = 0$, προκύπτει ότι $C = 0$. Επομένως,

$$F(x) = \cosh^{-1}x$$

Κεφάλαιο 6

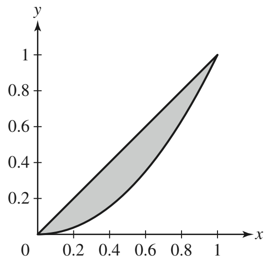
Ενότητα 6.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της $y = f(x)$ και της $y = g(x)$, που φράσσεται από αριστερά από την κατακόρυφη ευθεία $x = a$ και από δεξιά από την κατακόρυφη ευθεία $x = b$.

2. Ναι **3.** $\int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx + \int_3^5 (g(x) - f(x))\,dx$ **4.** Αρνητικό

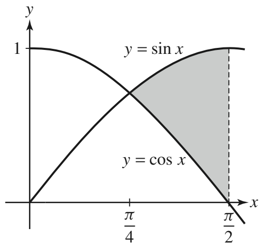
5. Το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και από τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.

6.

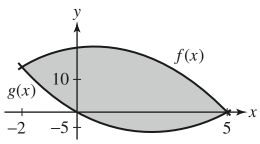


Ενότητα 6.1 Ασκήσεις

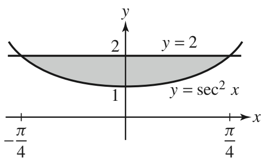
1. 102 **3.** $\frac{32}{3}$
5. $\sqrt{2}-1$



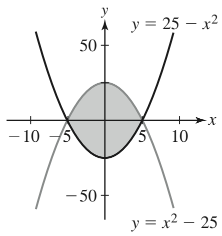
7. $\frac{343}{3}$



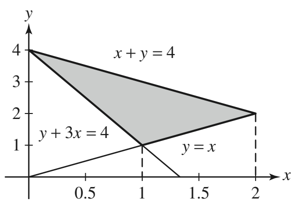
9. $\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$
11. $\pi - 2$



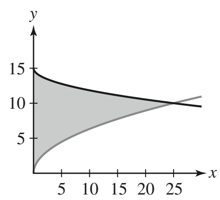
13. Οριζόντια απλό **15.** Τίποτα από τα δύο **17.** $\frac{160}{3}$ **19.** $\frac{12\sqrt{3}-12+(\sqrt{3}-2)\pi}{24}$ **21.** $2-\frac{\pi}{2}$
23. $\frac{1331}{6}$ **25.** 256 **27.** $\frac{32}{3}$ **29.** $\frac{64}{3}$
31. Εμβαδόν $= \frac{1000}{3}$



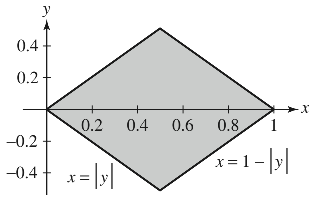
33. 2



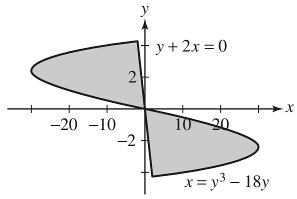
35. Εμβαδόν $= 125$



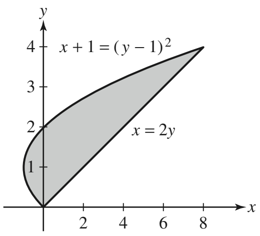
37. $\frac{1}{2}$



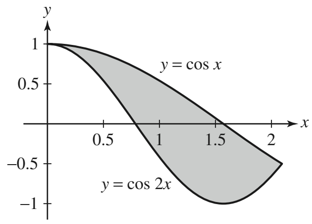
39. $\frac{1225}{8}$



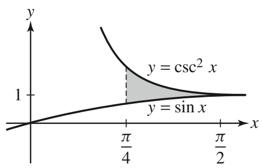
41. $\frac{32}{3}$



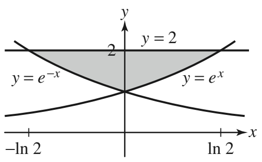
43. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



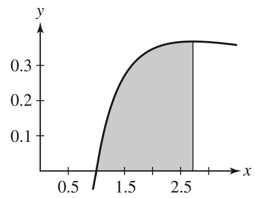
45. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$



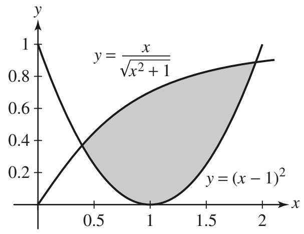
47. $4\ln 2 - 2 \approx 0.77259$



49. Εμβαδόν $= \frac{1}{2}$



51. ≈ 0.7567130951



53. (α) Πόσο μακριά από τον Αθλητή 2 βρίσκεται ο Αθλητής 1 (β) ii (γ) $t = 5, 10, 15$, Αθλητής 1, $t = 20$, περίπου ισοπαλία, $t = 25, 30$, Αθλητής 2

55. $\frac{8}{3}c^{3/2}$, $c = \frac{9^{1/3}}{4} \approx 0.520021$ **57.** $\int_{-\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}}^{\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}} \left[(1+x^2)^{-1} - x^2\right]\, dx$ **59.** 0.8009772242

61. Προσέγγιση αριστερών άκρων $= 101{,}750$ ft^2, προσέγγιση δεξιών άκρων $= 96{,}250$ ft^2

63. (β) $\frac{1}{3}$ (γ) 0 (δ) 1

65. $m = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \approx 0.206299$

Ενότητα 6.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. 3 **2.** 15

3. Ο ρυθμός ροής είναι ο όγκος του υγρού που διέρχεται από μια διατομή σε ένα σημείο ανά μονάδα χρόνου.

4. Η ταχύτητα του υγρού εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση από το κέντρο του σωλήνα.

5. 15

Ενότητα 6.2 Ασκήσεις

1. (α) $\frac{4}{25}(20-y)^2$ (β) $\frac{1280}{3}$ **3.** $\frac{\pi R^2 h}{3}$ **5.** $\pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$ **7.** $\frac{1}{6}abc$ **9.** $\frac{8}{3}$ **11.** 36 **13.** 18 **15.** $\frac{\pi}{3}$

17. 96π **21.** (α) $2\sqrt{r^2-y^2}$ (β) $4(r^2-y^2)$ (γ) $\frac{16}{3}r^3$ **23.** 160π **25.** $12\ln\frac{3}{2} \approx 4.87\,\text{kg}$ **27.** 0.36 g

29. $P \approx 4423.59$ χιλιάδες **31.** $L_6 = 233.86, R_6 = 290.56,$ Μέση τιμή $= 262.21$ **33.** $P \approx 61$ ελάφια

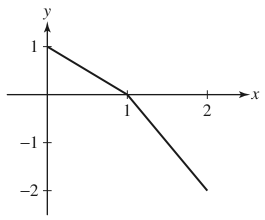
35. $Q = 128\pi$ cm^3/s **37.** $Q = \frac{8\pi}{3}$ cm^3/s **39.** 16 **41.** $\frac{3}{\pi}$ **43.** $\frac{1}{10}$ **45.** -4 **47.** $\frac{2n}{\pi}$ **49.** $\frac{a^n}{n+1}$

51. Στο $[0, 24]$ η μέση θερμοκρασία είναι 20. Στο $[2, 6]$ η μέση θερμοκρασία είναι $20 + \frac{15}{2\pi} \approx 22.387325$.

53. $\approx 79.65°$F **55.** $\frac{100}{\pi}$ **57.** $\frac{17}{2}$ m/s **59.** -80m/s^2, 159.033 m/s **61.** $\frac{3}{5^{1/4}} \approx 2.006221$

63. Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, $c = \frac{A}{\sqrt[3]{4}}$ **65.** Στο $[0, 1]$ $f(x)$, στο $[1, 2]$ g.

67. Υπάρχουν πολλές λύσεις. Μία από αυτές θα μπορούσε να είναι



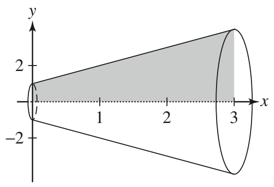
69. $v_0/2$

Ενότητα 6.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

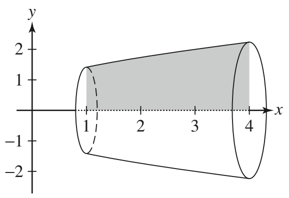
1. (α), (γ) **2.** Σωστό **3.** Λάθος. Οι διατομές θα είναι δακτύλιοι. **4.** (β)

Ενότητα 6.3 Ασκήσεις

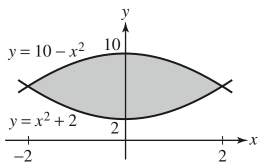
1.
(α)



(β) Δίσκος με ακτίνα $x+1$
(γ) $V = 21\pi$
3. (α)

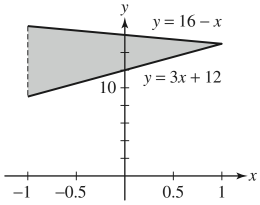


(β) Δίσκος με ακτίνα $\sqrt{x+1}$
(γ) $V = \frac{21\pi}{2}$
5. $V = \frac{81\pi}{10}$ **7.** $V = \frac{24{,}573\pi}{13}$ **9.** $V = \pi$ **11.** $V = \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$ **13.** $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$ **15.** (ii)
17. (α)



(β) Δακτύλιος με εξωτερική ακτίνα $R = 10 - x^2$ και εσωτερική ακτίνα $r = x^2 + 2$
(γ) $V = 256\pi$

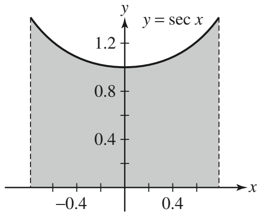
19. (α)



(β) Δακτύλιος με εξωτερική ακτίνα $R = 16 - x$ και εσωτερική ακτίνα $r = 3x + 12$

(γ) $V = \frac{656\pi}{3}$

21. (α)



(β) Κυκλικός δίσκος με ακτίνα $R = \sec x$

(γ) $V = 2\pi$

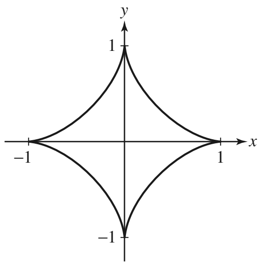
23. $V = \frac{15\pi}{2}$ **25.** $V = \frac{3\pi}{10}$ **27.** $V = 32\pi$ **29.** $V = \frac{704\pi}{15}$ **31.** $V = \frac{128\pi}{5}$ **33.** $V = 40\pi$ **35.** $V = \frac{376\pi}{15}$

37. $V = \frac{824\pi}{15}$ **39.** $V = \frac{32\pi}{3}$ **41.** $V = \frac{1872\pi}{5}$ **43.** $V = \frac{1400\pi}{3}$ **45.** $V = \pi\left(\frac{7\pi}{9} - \sqrt{3}\right)$ **47.** $V = \frac{96\pi}{5}$

49. $V = \frac{16\pi}{35}$ **51.** $V = \frac{1184\pi}{15}$ **53.** $V = 7\pi\,(1 - \ln 2)$ **55.** $V \approx 12{,}120\pi \approx 38{,}076.1\ \text{cm}^3$

57. Όγκος $\approx$ 2650 in.$^3 \approx 11.5$ γαλόνια **59.** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

61. $V = \frac{32\pi}{105}$



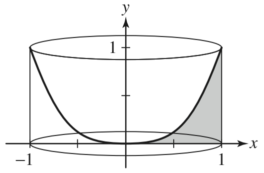
63. $V = 4\pi\sqrt{3}$ **65.** $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

Ενότητα 6.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

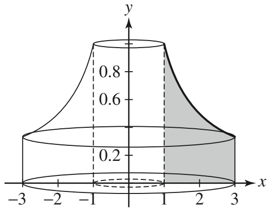
1. (α) Ακτίνα h και ύψος r (β) Ακτίνα r και ύψος h **2.** (α) Ως προς x (β) Ως προς y **3.** $V = 2\pi \int_0^8 y \cdot 1\, dy = 64\pi$

Ενότητα 6.4 Ασκήσεις

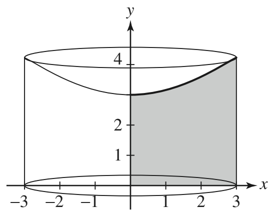
1. $V = \frac{2}{5}\pi$



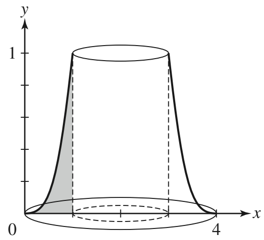
3. $V = 4\pi$



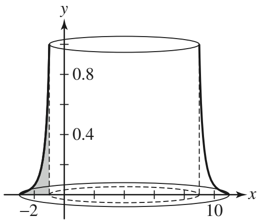
5. $V = 18\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right)$



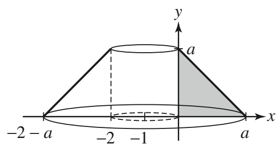
7. $V = \frac{32\pi}{3}$ **9.** $V = 16\pi$ **11.** $V = \frac{32\pi}{5}$ **13.** $\pi(e^4 - e) \approx 162.99$
15. Το σημείο τομής είναι $x = 1.376769504$, $V = 1.321975576$. **17.** $V = \frac{3\pi}{5}$



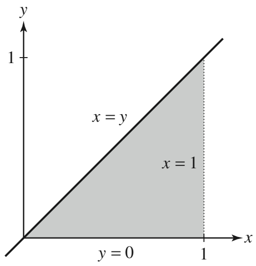
19. $V = \frac{280\pi}{81}$



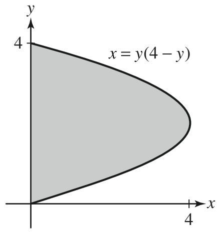
21. $V = \frac{1}{3}\pi a^3 + \pi a^2$



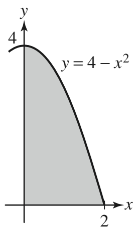
23. $V = \frac{\pi}{3}$



25. $V = \frac{128\pi}{3}$



27. $V = \frac{256\pi}{15}$



29. (β) **31.** (α) $V = \frac{576\pi}{7}$ (β) $V = \frac{96\pi}{5}$

33. (α) Το $\overline{AB}$ παράγει έναν δίσκο με ακτίνα $R = h(y)$, το $\overline{CB}$ παράγει ένα κέλυφος με ακτίνα x και ύψος $f(x)$.
(β) Κέλυφος, $V = 2\pi \int_0^2 xf(x)\,dx$, δίσκος, $V = \pi \int_0^{1.3} (h(y))^2\,dy$

35. $V = \frac{602\pi}{5}$ **37.** $V = 8\pi$ **39.** $V = \frac{40\pi}{3}$ **41.** $V = \frac{1024\pi}{15}$ **43.** $V = 16\pi$ **45.** $V = \frac{32\pi}{3}$

47. $V = \frac{776\pi}{15}$ **49.** $V = \frac{625\pi}{6}$ **51.** $\frac{3\pi}{10}$ **53.** $V = \frac{121\pi}{525}$ **55.** $V = \frac{563\pi}{30}$ **57.** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

59. $V = 2\pi^2 ab^2$ **61.** $\pi(1 + 3e^4) \approx 517.72$ **63.** $x^2 + y^2 = 1$ στο $[0, 1]$, $y = 1 - x$ στο $[0, 1]$

Ενότητα 6.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Επειδή η απαιτούμενη δύναμη δεν είναι σταθερή κατά τη διάρκεια του τεντώματος.
2. Το βάρος του νερού και η απόσταση που διανύει δεν είναι σταθερό. Ωστόσο, το βάρος της δεξαμενής και η απόσταση που διανύει είναι σταθερό.
3. $\frac{1}{2}kx^2$
4. Όταν η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι στην αντίθετη κατεύθυνση της κίνησης.

Ενότητα 6.5 Ασκήσεις

1. $W = 627.2$ J **3.** $W = 5.76$ J **5.** $W = 8$ J **7.** (α) Αύξουσα (β) Φθίνουσα
9. Φθίνουσα, έργο $= 960 - 240\sqrt{2} \approx 621$ N-cm **11.** $W = 105{,}840$ J **13.** $W = \frac{56{,}448\pi}{5}$ J $\approx 3.547 \times 10^4$ J

15. $W \approx 1.842\times10^{12}$ J **17.** $W = 3.92\times10^6$ J **19.** $W \approx 1.18\times10^8$ J **21.** $W = 9800\pi\ell r^3$ J **23.** $W = 2.94\times10^6$ J

25. $W \approx 3.79 \times 10^6$ J **27.** $W = 3920$ J **29.** $W = 529.2$ J **31.** $W = 1470$ J **33.** $W = 374.85$ J

37. $W \approx 5.16 \times 10^9$ J **41.** $\sqrt{2GM_e\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r+R_e}\right)}$ m/s **43.** $v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$ m/s

Κεφάλαιο 6 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. $\frac{32}{3}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **5.** 24 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $3\sqrt{2} - 1$ **11.** $e - \frac{3}{2}$

13. Σημεία τομής $x = 0$, $x = 0.7145563847$, εμβαδόν $= 0.08235024596$

15. $V = 4\pi$ **17.** 2.7552 kg **19.** $\frac{9}{4}$ **21.** $\frac{1}{2}\sinh 1$ **23.** $\frac{3\pi}{4}$ **25.** 27 **27.** $\frac{2\pi m^5}{15}$ **29.** $V = \frac{162\pi}{5}$ **31.** $V = 64\pi$

33. $V = 8\pi$ **35.** $V = \frac{56\pi}{15}$ **37.** $V = \frac{128\pi}{15}$ **39.** $V = 4\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ **41.** $V = 2\pi\left(c + \frac{c^3}{3}\right)$ **43.** $V = c\pi$

45. (α) $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{1-(x-1)^2} - \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)\right) dx$ (β) $\displaystyle\pi\int_0^1 \left[(1-(x-1)^2) - (1-\sqrt{1-x^2})^2\right] dx$

47. $\displaystyle V = \pi\int_0^{1/a} \left(a\sqrt{x - ax^2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{6}$ **49.** $W = 1.6$ J **51.** $W = 1.93 \times 10^{10}$ J

53. $9800\pi\left(h^3 + 2h^2 - \frac{1}{4}h^4\right)$ J

Κεφάλαιο 7

Ενότητα 7.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου.

3. Με τον μετασχηματισμό $v' = x$ σε $v = \frac{1}{2}x^2$ αυξάνεται η δύναμη του x και κάνει το νέο ολοκλήρωμα δυσκολότερο από το αρχικό.

Ενότητα 7.1 Ασκήσεις

1. $-x\cos x + \sin x + C$ **3.** $e^x(2x+7) + C$ **5.** $\frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C$ **7.** $-e^{-x}(4x+1) + C$ **9.** $\frac{1}{25}(5x-1)e^{5x+2} + C$

11. $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ **13.** $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$ **15.** $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$

17. $-\frac{1}{26}e^{-5x}(\cos(x) + 5\sin(x)) + C$ **19.** $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$ **21.** $\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$ **23.** $x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right] + C$

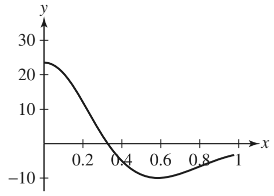
25. $x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$ **27.** $x\sec^{-1}x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$ **29.** $\dfrac{3^x(\sin x + \ln 3\cos x)}{1 + (\ln 3)^2} + C$

31. $(x^2+2)\sinh x - 2x\cosh x + C$ **33.** $x\tanh^{-1}4x + \frac{1}{8}\ln|1 - 16x^2| + C$ **35.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$

37. Με $u = x,\ dv = \tan x dx$, η ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει $\int x\tan x dx = -x\ln|\cos x| + \int \ln|\cos x| dx$. Αυτό δεν απλοποιεί το ολοκλήρωμα επειδή μας αναγκάζει να υπολογίσουμε το $\int \ln|\cos x| dx$, που είναι ένα ολοκλήρωμα για το οποίο δεν έχουμε ένα απλό αποτέλεσμα. Με $u = \tan x,\ dv = x dx$, η ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει $\int x\tan x dx = \frac{1}{2}x^2\tan x - \int \frac{1}{2}x^2\sec^2 x\, dx$. Αυτό μας οδηγεί στον υπολογισμό του $\int x^2\sec^2 x dx$, που είναι ένα ολοκλήρωμα πιο περίπλοκο από αυτό με το οποίο αρχίσαμε.

39. $\frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$ **41.** $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + C$ **43.** $\sin x\ln(\sin x) - \sin x + C$

45. $2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C$ **47.** $\frac{1}{4}(\ln x)^2[2\ln(\ln x) - 1] + C$
49. $\frac{1}{16}(11e^{12} + 1)$



51. $2\ln 2 - \frac{3}{4}$ **53.** $1 - \frac{2}{e}$ **55.** $\frac{3\ln 3 - 2}{\ln^2 3}$ **57.** $\frac{e^{\pi}+1}{2}$ **59.** ≈ 13.4 cm **61.** $-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$

63. $\frac{1}{3}\cos^2 x\sin x + \frac{2}{3}\sin x + C$ **65.** $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$ **67.** $\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx$

69. $\pi\left(\pi^2 - 4\right)$

71. $6\pi^2/59.22$ **73.** Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, με $u = \ln x$ και $dv = \sqrt{x}\,dx$.

75. Χρησιμοποιούμε αντικατάσταση, που ακολουθείται από αλγεβρικό χειρισμό, με $u = 4 - x^2$ και $du = -2x\,dx$.

77. Χρησιμοποιούμε αντικατάσταση με $u = x^2 + 4x + 3$, $\frac{du}{2} = (x+2)\,dx$.

79. Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, με $u = x$ και $dv = \sin(3x+4)\,dx$.

81. $x(\sin^{-1} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x - 2x + C$ **83.** $\frac{1}{4}x^4\sin(x^4) + \frac{1}{4}\cos(x^4) + C$ **85.** Εμβαδόν ≈ 6.12 **87.** \$42,995.10

89. Για $k = 2$: $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$, για $k = 3$: $x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$

91. Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες με $u = x$ και $v' = b^x$.

93. (β) $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ είναι απλούστερο και δίνει $\frac{1}{2}(x^2\tan^{-1} x - x + \tan^{-1} x) + C$

95. Ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες για κάποιο λ είναι $f(x) = \sin\pi x$.

97. (α) $I_n = \frac{1}{2}x^{n-1}\sin(x^2) - \frac{n-1}{2}J_{n-2}$ (γ) $\frac{1}{2}x^2\sin(x^2) + \frac{1}{2}\cos(x^2) + C$

Ενότητα 7.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ξαναγράφουμε $\sin^5 x = \sin x\sin^4 x = \sin x(1 - \cos^2 x)^2$ και στη συνέχεια αντικαθιστούμε $u = \cos x$.
3. Όχι, δεν απαιτείται αναγωγικός τύπος επειδή η συνάρτηση του ημιτόνου είναι υψωμένη σε περιττή δύναμη.
5. Το δεύτερο ολοκλήρωμα απαιτεί τη χρήση αναγωγικών τύπων και επομένως περισσότερη δουλειά.

Ενότητα 7.2 Ασκήσεις

1. $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ **3.** $-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta + C$ **5.** $-\frac{1}{4}\cos^4 t + \frac{1}{6}\cos^6 t + C$ **7.** $\frac{2}{3}$ **9.** $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$
11. $\frac{1}{5}\tan x\sec^4 x - \frac{1}{15}\tan(x)\sec^2 x - \frac{2}{15}\tan x + C$ **13.** $-\frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\csc x| + C$ **15.** $-\frac{1}{6}\cot^6 x + C$ **17.** $1 - \frac{\pi}{4}$
19. $\frac{5}{16}x - \frac{5}{16}\sin x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + C$ **21.** $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$
23. $\frac{1}{12}\cos^3(3x+2)\sin(3x+2) + \frac{1}{8}(3x+2) + \frac{1}{16}\sin(6x+4) + C$ **25.** $\frac{1}{5\pi}\sin^5(\pi\theta) - \frac{1}{7\pi}\sin^7(\pi\theta) + C$
27. $\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + C$ **29.** $\frac{1}{2}\cot(3-2x) + C$ **31.** $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ **33.** $\frac{1}{8}\sec^8 x - \frac{1}{3}\sec^6 x + \frac{1}{4}\sec^4 x + C$
35. $\frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C$ **37.** $-\frac{1}{9}\csc^9 x + \frac{2}{7}\csc^7 x - \frac{1}{5}\csc^5 x + C$ **39.** $\frac{1}{4}\sin^2 2x + C$ **41.** $-\frac{2}{5}\cos^5 x + C$
43. $\frac{1}{6}\cos^2(t^2)\sin(t^2) + \frac{1}{3}\sin(t^2) + C$ **45.** $\frac{1}{2}\cos(\sin t)\sin(\sin t) + \frac{1}{2}\sin t + C$ **47.** π **49.** $\frac{8}{15}$ **51.** $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$
53. $\ln 2$ **55.** $\frac{8}{3}$ **57.** $-\frac{6}{7}$ **59.** $\frac{1}{24}$ **61.** Εμβαδόν $= \frac{2}{(n+1)(n+3)}$

63. Αρχικά, παρατηρήστε ότι

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 2\sin 2x(1-2\sin^2 x) = 2\sin 2x - 4\sin 2x\sin^2 x = 2\sin 2x - 8\sin^3 x\cos x$$

Τότε

$$\frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x) + C = \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + C = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x\cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + C$$

65. $\frac{\pi^2}{2}$

67. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ και την αντικατάσταση $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\, dx$.

69. (α) $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\, dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 1$

(β) $\frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x\, dx$

(γ) $I_2 = \frac{\pi}{4}$, $I_3 = \frac{2}{3}$, $I_4 = \frac{3\pi}{16}$, $I_5 = \frac{8}{15}$

71. $\cos(x) - \cos(x)\ln(\sin(x)) + \ln|\csc(x) - \cot(x)| + C$

75. Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες $u = \sec^{m-2} x$ και $v' = \sec^2 x$.

Ενότητα 7.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) $x = 3\sin\theta$ (β) $x = 4\sec\theta$ (γ) $x = 4\tan\theta$ (δ) $x = \sqrt{5}\sec\theta$ **3.** $2x\sqrt{1-x^2}$

Ενότητα 7.3 Ασκήσεις

1. (α) $\theta + C$ (β) $\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

3. (α) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta$

(β) $\frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$

(γ) $\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+9} + 2x\right| + C$

5. $\frac{8}{\sqrt{5}}\arcsin(\frac{x\sqrt{5}}{4}) + \frac{1}{2}x\sqrt{16-5x^2} + C$ **7.** $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$ **9.** $\frac{-x}{4\sqrt{x^2-4}} + C$ **11.** $\sqrt{x^2-4} + C$

13. (α) $-\sqrt{1-x^2}$

(β) $\frac{1}{8}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2))$

(γ) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$

(δ) $\sqrt{1-x^2}(-\frac{x^3}{4} - \frac{3x}{8}) + \frac{3}{8}\arcsin(x)$

15. $\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$ **17.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}\right| + C$ **19.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| + C$ **21.** $-\frac{\sqrt{5-y^2}}{5y} + C$

23. $\frac{1}{5}\ln\left|5x + \sqrt{25x^2+2}\right| + C$ **25.** $\frac{1}{16}\sec^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{\sqrt{z^2-4}}{8z^2} + C$ **27.** $\frac{1}{12}x\sqrt{6x^2-49} + \frac{49\ln\left(x\sqrt{6}+\sqrt{6x^2-49}\right)}{12\sqrt{6}} + C$

29. $\frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{180}$ **31.** $-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$ **33.** ≈ 79.06

35. (α) Με $x = a\tan\theta$ και $dx = a\sec^2\theta d\theta$ έχουμε

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(β) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\right)\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2+x^2}$

37. (α) $x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 4$

(β) $\ln\left|\sqrt{u^2+4} + u\right| + C$

(γ) $\ln\left|\sqrt{(x-2)^2+4} + x - 2\right| + C$

39. $\ln\left|\sqrt{x^2+4x+13} + x + 2\right| + C$ **41.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|12x + 1 + 2\sqrt{6}\sqrt{x+6x^2}\right| + C$

43. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-4x+3} - \frac{1}{2}\ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2-4x+3}\right| + C$ **45.** $x\sec^{-1}x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

47. $x(\ln(x^2+1)-2)+2\tan^{-1}x+C$ **49.** $\frac{\pi}{4}$ **51.** $4\pi\left[\sqrt{3}-\ln\left|2+\sqrt{3}\right|\right]$ **53.** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C$

55. (α) $1.789\times10^6\ \frac{V}{\mathrm{m}}$ (β) $3.526\times10^6\ \frac{V}{\mathrm{m}}$

Ενότητα 7.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) $x=\sinh t$ (β) $x=3\sinh t$ (γ) $3x=\sinh t$ **3.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

Ενότητα 7.4 Ασκήσεις

1. $\frac{1}{3}\sinh(3x)+C$ **3.** $x\cosh x-\sinh x+C$ **5.** $-\frac{1}{2}\tanh(1-2x)+C$ **7.** $\dfrac{\tanh^2 x}{2}+C$ **9.** $\ln\cosh x+C$

11. $\ln|\sinh x|+C$ **13.** $\frac{1}{16}\sinh(8x-18)-\frac{1}{2}x+C$ **15.** $\frac{1}{32}\sinh 4x-\frac{1}{8}x+C$ **17.** $\cosh^{-1}x+C$ **19.** $\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

21. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\cosh^{-1}x+C$ **23.** $2\tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **25.** $\sinh^{-1}1$ **27.** $\frac{1}{4}\left(\operatorname{csch}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)-\operatorname{csch}^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$

29. $\cosh^{-1}x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$ **31.** Έστω $x=\sinh t$ για τον πρώτο τύπο και $x=\cosh t$ για τον δεύτερο.

33. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16}+8\ln\left|\frac{x}{4}+\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}\right|+C$

35. Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατα παράγοντες με $u=\cosh^{n-1}x$ και $v'=\cosh x$ για να ξεκινήσουμε την απόδειξη.

37. $-\frac{1}{2}\left(\tanh^{-1}x\right)^2+C$ **39.** $x\tanh^{-1}x+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$

41. (α) Εμβαδόν $=\cosh(5)-1\approx 73.21$ (β) Εμβαδόν $=5\sinh(5)-\cosh(5)+1\approx 297.81$
(γ) $\cosh(5)-1+5\sinh(5)-\cosh(5)+1=5\sinh 5$ (δ) Το εμβαδόν στο (α) είναι το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής κάτω από τη γραφική παράσταση της $y=\sinh x$. Τα εμβαδά κάτω από τη γραφική παράσταση της $y=\sinh^{-1}$ αντιστοιχούν στα εμβαδά στα αριστερά της γραφικής παράστασης της $y=\sinh x$ στο σχήμα. Ειδικότερα, το εμβαδόν στο (β) είναι το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής στα αριστερά της γραφικής παράστασης. Το άθροισμα των εμβαδών στα (α) και (β) είναι το άθροισμα των δύο σκιασμένων εμβαδών στο σχήμα. Δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου, το οποίο είναι $5\sinh 5$.

43. $u=\sqrt{\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}}$. Από αυτό προκύπτει ότι $\cosh x=\frac{1+u^2}{1-u^2}$, $\sinh x=\frac{2u}{1-u^2}$ και $dx=\frac{2du}{1-u^2}$.

45. $\int du=u+C=\tanh\frac{x}{2}+C$

47. Έστω $gd(y)=\tan^{-1}(\sinh y)$. Τότε

$$\frac{d}{dy}gd(y)=\frac{1}{1+\sinh^2 y}\cosh y=\frac{1}{\cosh y}=\operatorname{sech} y$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $1+\sinh^2 y=\cosh^2 y$.

49. Έστω $x=gd(y)=\tan^{-1}(\sinh y)$. Λύνοντας ως προς y παίρνουμε $y=\sinh^{-1}(\tan x)$. Επομένως, $gd^{-1}(y)=\sinh^{-1}(\tan y)$.

Ενότητα 7.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Όχι, η f δεν μπορεί να είναι ρητή συνάρτηση επειδή το ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης δεν μπορεί να περιέχει κάποιον όρο με μη ακέραιο εκθέτη, όπως ο $\sqrt{x+1}$.

3. (α) Το τετράγωνο είναι ήδη συμπληρωμένο, μη αναγώγιμο.

(β) Το τετράγωνο είναι ήδη συμπληρωμένο, παραγοντοποιείται ως $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.
(γ) $x^2+4x+6=(x+2)^2+2$, μη αναγώγιμο. (δ) $x^2+4x+2=(x+2)^2-2$, παραγοντοποιείται ως $(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$.

Ενότητα 7.5 Ασκήσεις

1. (α) $\dfrac{x^2+4x+12}{(x+2)(x^2+4)}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2+4}$

(β) $\dfrac{2x^2+8x+24}{(x+2)^2(x^2+4)}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{(x+2)^2}+\dfrac{-x+2}{x^2+4}$

(γ) $\dfrac{x^2-4x+8}{(x-1)^2(x-2)^2}=\dfrac{-8}{x-2}+\dfrac{4}{(x-2)^2}+\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{5}{(x-1)^2}$

(δ) $\dfrac{x^4-4x+8}{(x+2)(x^2+4)}=x-2+\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{4x-4}{x^2+4}$

3. -2 **5.** $\frac{1}{9}(3x+4\ln|3x-4|)+C$ **7.** $\frac{x^3}{3}+\ln|x+2|+C$ **9.** $-\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-4|+C$ **11.** $\ln x-\ln(3x+1)+C$

13. $x-3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+C$ **15.** $2\ln|x+3|-\ln|x+5|-\frac{2}{3}\ln|3x-2|+C$ **17.** $3\ln|x-1|-2\ln|x+1|-\frac{5}{x+1}+C$

19. $2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-2\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+C$ **21.** $\ln|x|-\ln|x+2|+\frac{2}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}+C$

23. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right|-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right|+C$ **25.** $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C$

27. $\frac{5}{2x+5}-\frac{5}{4(2x+5)^2}+\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C$ **29.** $-\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$ **31.** $x+\ln|x|-3\ln|x+1|+C$

33. $2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-3\tan^{-1}x+C$ **35.** $\frac{1}{25}\ln|x|-\frac{1}{50}\ln|x^2+25|+C$ **37.** $6x-14\ln|x+3|+2\ln|x-1|+C$

39. $-\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{10}\ln|x^2+9|-\frac{4}{15}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$ **41.** $\frac{1}{64}\ln|x|-\frac{1}{128}\ln|x^2+8|+\frac{1}{16(x^2+8)}+C$

43. $\frac{1}{6}\ln|x+2|-\frac{1}{12}\ln|x^2+4x+10|+C$ **45.** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{15-5x}{8(x^2+2x+5)}-\frac{13}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

47. $\frac{1}{2}\arctan(x^2)+C$ **49.** $\frac{1}{2}\ln(e^x-1)-\frac{1}{2}\ln(e^x+1)+C$ **51.** $2\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}-1|-\ln|\sqrt{x}+1|+C$

53. $\ln\left|x^{1/4}-2\right|-\ln\left|x^{1/4}+2\right|+C$ **55.** $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right|+C=\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right|+C$

57. Αν $\theta=2\tan^{-1}t$, τότε $d\theta=2\,dt/(1+t^2)$. Έχουμε, επίσης, $\cos(\frac{\theta}{2})=1/\sqrt{1+t^2}$ και $\sin(\frac{\theta}{2})=t/\sqrt{1+t^2}$. Για να βρούμε το $\cos\theta$, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα της διπλάσιας γωνίας $\cos\theta=1-2\sin^2(\frac{\theta}{2})$. Αυτό μας δίνει $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Για να βρούμε το $\sin\theta$, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα της διπλάσιας γωνίας $\sin\theta=2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$. Αυτό μας δίνει $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$. Τότε προκύπτει ότι

$$\int\frac{d\theta}{\cos\theta+\frac{3}{4}\sin\theta}=-\frac{4}{5}\ln\left|2-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|+\frac{4}{5}\ln\left|1+2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|+C$$

59. Η ανάλυση μερικών κλασμάτων δίνει $\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{\frac{1}{a-b}}{x-a}+\frac{\frac{1}{b-a}}{x-b}$. Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$.

61. $\frac{2}{x-6}+\frac{1}{x+2}$

Ενότητα 7.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες με $u=x$, $dv=\sin x\,dx$.

2. Τριγωνομετρική αντικατάσταση $x=\tan\theta,\ dx=\sec^2\theta\,d\theta$.

3. Μερικά κλάσματα **4.** Αντικατάσταση $u=\cos x$, $du=-\sin x\,dx$.

5. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες με $u = \ln x$, $dv = x\,dx$.
6. Τριγωνομετρική αντικατάσταση $x = \sin\theta$, $dx = \cos\theta\,d\theta$.
7. Τριγωνομετρική μέθοδος. Ξαναγράφουμε ως $\int\left(1-\sin^2 x\right)\cos^2 x\sin x\,dx$. Έπειτα, χρησιμοποιούμε αντικατάσταση με $u = \cos x$ και $du = -\sin x\,dx$.
8.

$$\int\frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a\,(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$$

9. Τριγωνομετρική αντικατάσταση με $x = \frac{5}{4}\tan\theta$ και $dx = \frac{5}{4}\sec^2\theta\,d\theta$.
10. $\int\sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$
11. Συμπλήρωση του τετραγώνου, ακολουθούμενη από αντικατάσταση με $u = x+1$ και $du = dx$. Έπειτα, χρησιμοποιούμε τριγωνομετρική αντικατάσταση με $u = 2\tan\theta$ και $du = 2\sec^2\theta\,d\theta$.

Ενότητα 7.6 Ασκήσεις

1. Συμπληρώνουμε το τετράγωνο για να πάρουμε $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{21-(x+3)^2}}$ και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $x+3 = \sqrt{21}\sin u$ έτσι ώστε $dx = \sqrt{21}\cos u\,du$.
3. Τριγωνομετρική μέθοδος. Ξαναγράφουμε το $\int\sin^3 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx$ με την αντικατάσταση $u = \sin x$ και $du = \cos x\,dx$.
5. Τριγωνομετρική αντικατάσταση $x = 3\sin\theta$ και $dx = 3\cos\theta\,d\theta$.
7. Καμία **9.** Μερικά κλάσματα **11.** $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ **13.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{8}\sin 4x\cos 4x + C$ **15.** $x\sin x + \cos x + C$
17. $\frac{x}{18(9+x^2)} + \frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$ **19.** $\sec x - \frac{2}{3}\sec^3 x + \frac{1}{5}\sec^5 x + C$
21. $x\ln\left|x^4+1\right| - 4x + 2\tan^{-1}x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + C$ **23.** $\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C$
25. $-\frac{x+6}{8(x^2+4x+8)} - \frac{1}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C$ **27.** $6\tan^{-1}\left(x^{1/6}\right) - 6x^{1/6} + 2\sqrt{x} - \dfrac{6}{5}x^{5/6} + \dfrac{6}{7}x^{7/6} + C$ **29.** $\ln(1+e^x)+C$
31. $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{x^3}{9} + C$ **33.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ **35.** $\frac{2}{9}\left(1+x^3\right)^{3/2} + C$ **37.** $x - \ln\left(1+e^x\right) + C$
39. $2\sqrt{x} + x + \frac{2}{3}x^{3/2} + 2\ln|\sqrt{x}-1| + C$ **41.** $\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + 2\sqrt{x+1} + C$
43. $x + \cos x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$ **45.** $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$ **47.** $x\ln\left(x^2+9\right) + 6\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - 2x + C$
49. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$ **51.** $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$
53. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C$ **55.** $\frac{1}{4}\sin 2x + 9\tan x - \frac{11}{2}x + C$
57. $\frac{1}{3}(1+\ln x)^3 + C$ **59.** $\cosh^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + C$

Ενότητα 7.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) Το ολοκλήρωμα συγκλίνει. (β) Το ολοκλήρωμα αποκλίνει. (γ) Το ολοκλήρωμα αποκλίνει. (δ) Το ολοκλήρωμα συγκλίνει.
3. Οποιαδήποτε τιμή του b που ικανοποιεί τη σχέση $|b| \geq 2$ θα κάνει αυτό το ολοκλήρωμα γενικευμένο.
5. Γνωρίζοντας ότι ένα ολοκλήρωμα είναι μικρότερο από ένα αποκλίνον ολοκλήρωμα δεν μας επιτρέπει να εξάγουμε κανένα συμπέρασμα χρησιμοποιώντας το κριτήριο της σύγκρισης.

Ενότητα 7.7 Ασκήσεις

1. (α) Γενικευμένο. Η συνάρτηση $y = x^{-1/3}$ απειρίζεται στο 0.
(β) Γενικευμένο. Άπειρο διάστημα ολοκλήρωσης.
(γ) Γενικευμένο. Άπειρο διάστημα ολοκλήρωσης.
(δ) Πεπερασμένο. Η συνάρτηση $y = e^{-x}$ είναι συνεχής στο πεπερασμένο διάστημα $[0, 1]$.
(ε) Γενικευμένο. Η συνάρτηση $y = \sec x$ απειρίζεται στο $\frac{\pi}{2}$.
(στ) Γενικευμένο. Άπειρο διάστημα ολοκλήρωσης.
(ζ) Πεπερασμένο. Η συνάρτηση $y = \sin x$ είναι συνεχής στο πεπερασμένο διάστημα $[0, 1]$.
(η) Πεπερασμένο. Η συνάρτηση $y = 1/\sqrt{3 - x^2}$ είναι συνεχής στο πεπερασμένο διάστημα $[0, 1]$.
(θ) Γενικευμένο. Άπειρο διάστημα ολοκλήρωσης.
(ι) Γενικευμένο. Η συνάρτηση $y = \ln x$ απειρίζεται στο 0.

3. $\displaystyle\int_1^\infty x^{-2/3}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{-2/3}\,dx = \lim_{R\to\infty} 3\left(R^{1/3} - 1\right) = \infty$ **5.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

7. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = 10{,}000e^{0.0004}$. **9.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

11. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = 4$. **13.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = \frac{1}{8}$. **15.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = 2$.

17. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = 0$. **19.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = \frac{1}{3e^{12}}$.

21. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = \frac{1}{3}$. **23.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = 2\sqrt{2}$.

25. Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. **27.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = \frac{1}{2}$. **29.** Συγκλίνει στο $\frac{1}{9}$.

31. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = \frac{\pi}{2}$. **33.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. **35.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

37. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = -1$. **39.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

41. (α) Τα μερικά κλάσματα δίνουν $\frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \frac{dx}{x-3} - \frac{dx}{x-2}$. Αυτό οδηγεί στο $\int_4^R \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \ln\left|\frac{R-3}{R-2}\right| - \ln\frac{1}{2}$.
(β) $I = \lim_{R\to\infty}\left(\ln\left|\frac{R-3}{R-2}\right| - \ln\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$

43. Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. **45.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. **47.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = 0$.
49. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^{1/3}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = 0$ **51.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $a < 0$. **53.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

55. $\frac{1}{x^3+4} \le \frac{1}{x^3}$. Επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

57. Για $x \ge 1, x^2 \ge x$, οπότε $-x^2 \le -x$ και $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Τώρα το $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ συγκλίνει, οπότε το $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης. Συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμά μας συγκλίνει γράφοντάς το ως άθροισμα: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$.

59. Έστω $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{x^2}$. Αφού $f(x) \le \dfrac{2}{x^2}$ και $\displaystyle\int_1^\infty 2x^{-2}\,dx = 2$, προκύπτει ότι το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\sin x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης.

61. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει. **63.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. **65.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

67. Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. **69.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει. **71.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

73. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει. **75.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

77. Το $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(x+1)}$ και το $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}(x+1)}$ συγκλίνουν και τα δύο, επομένως το J συγκλίνει.

79. $\$\frac{250}{0.07} = \$3571.43$ **81.** $\$2{,}000{,}000$

83. $W = \lim_{T\to\infty} CV^2\left(\frac{1}{2} - e^{-T/RC} + \frac{1}{2}e^{-2T/RC}\right) = CV^2\left(\frac{1}{2} - 0 + 0\right) = \frac{1}{2}CV^2$

85. 2π **87.** Η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται στο άνω άκρο της ολοκλήρωσης, $x = \sqrt{2E/k}$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο, $T = \lim_{R\to\sqrt{2E/k}} T(R) = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\sin^{-1}(1) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

89. $Lf(s) = \dfrac{-1}{s^2+\alpha^2}\lim_{t\to\infty} e^{-st}(s\sin(\alpha t) + \alpha\cos(\alpha t)) - \alpha$ **91.** $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ **93.** $J_n = \frac{n}{\alpha}J_{n-1} = \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

95. $E = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\alpha\nu}-1}\,d\nu$. Επειδή $\alpha > 0$ και το $8\pi h/c^3$ είναι σταθερά, γνωρίζουμε ότι η E είναι πεπερασμένη από την Άσκηση 92. **97.** Επειδή $t > \ln t$ για $t > 2$, $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln t} > \int_2^x \frac{dt}{t} > \ln x$. Επομένως, $F(x) \to \infty$ καθώς $x \to \infty$. Επιπλέον, $\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$. Οπότε, η $\lim_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{G(x)}$ είναι της μορφής ∞/∞ και εφαρμόζεται ο κανόνας L'Hôpital. Τέλος, $L = \lim_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln x - 1} = 1$.

99. Το ολοκλήρωμα είναι απολύτως συγκλίνον. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της σύγκρισης με $\frac{1}{x^2}$.

Ενότητα 7.8 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $T_1 = 6, T_2 = 7$

3. Ο κανόνας του τραπεζίου ολοκληρώνει ακριβώς τις γραμμικές συναρτήσεις, οπότε το σφάλμα θα είναι μηδενικό.

5. Οι δύο γραφικές ερμηνείες του κανόνα του μέσου είναι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων των μέσων και το άθροισμα των εμβαδών των εφαπτομενικών τραπεζίων.

Ενότητα 7.8 Ασκήσεις

1. $M_N = 8.625, T_N = 8.75, \int_1^3 x^2dx = \frac{26}{3} \approx 8.6667$ **3.** $M_N = 19.97, T_N = 20.81, \int_0^3 x^3dx = 20.25$

5. $T_6 \approx 1.4054, M_6 \approx 1.3769$ **7.** $T_6 \approx 1.1703, M_6 \approx 1.2063$ **9.** $T_5 \approx 0.3846\ M_5 \approx 0.3871$

11. $T_5 \approx 0.7444\ M_5 \approx 0.7481$ **13.** $S_N \approx 8.6667, \int_1^3 x^2dx = \frac{26}{3} \approx 8.6667$

15. $S_N \approx 0.95023, \int_0^3 e^{-x}dx = 1 - e^{-3} \approx 0.95021$ **17.** $S_6 \approx 1.1090$ **19.** $S_4 \approx 0.7469$ **21.** $S_8 \approx 2.5450$

23. $S_{10} \approx 0.3466$ **25.** ≈ 2.4674 **27.** ≈ 1.8769 **29.** $214.75\ \text{in.}^2$

31. (α) Υποθέτοντας ότι η ταχύτητα του τσουνάμι είναι συνεχής συνάρτηση, στα x μίλια από την ακτή η ταχύτητα είναι $\sqrt{15f(x)}$. Καλύπτοντας μια απειροστά μικρή απόσταση dx, ο χρόνος T που απαιτείται ώστε να καλύψει το τσουνάμι αυτή την απόσταση γίνεται $\dfrac{dx}{\sqrt{15f(x)}}$. Από αυτό προκύπτει ότι $T = \int_0^M \frac{dx}{\sqrt{15f(x)}}$. (β) ≈ 3.347 h

33. $T_6 = 4.1111$ (α) Εφόσον η x^3 είναι κυρτή στο $[0,2]$, η T_6 είναι υπερβολικά μεγάλη.
(β) Έχουμε $f'(x) = 3x^2$ και $f''(x) = 6x$. Εφόσον η $|f''(x)| = |6x|$ είναι *αύξουσα* στο $[0,2]$, η μέγιστη τιμή της παρατηρείται στο $x = 2$ και μπορούμε να πάρουμε $K_2 = |f''(2)| = 12$. Επομένως, σφάλμα$(T_6) \le \frac{2}{9}$. (γ) Σφάλμα$(T_6) \approx 0.1111 < \frac{2}{9}$.

35. Η T_{10} θα υπερεκτιμήσει το ολοκλήρωμα. Σφάλμα$(T_{10}) \le 0.045$.

37. Η M_{10} θα υπερεκτιμήσει το ολοκλήρωμα. Σφάλμα$(M_{10}) \le 0.0113$. **39.** $N \ge 10^3$, σφάλμα $\approx 3.333 \times 10^{-7}$.

41. $N \ge 750$, σφάλμα $\approx 2.805 \times 10^{-7}$. **43.** Σφάλμα$(T_{10}) \le 0.0225$, σφάλμα$(M_{10}) \le 0.01125$.

45. $S_8 \approx 4.0467$, σφάλμα $(S_8) \le 0.00833$, $N \ge 78$. **47.** Σφάλμα$(S_{40}) \le 1.017 \times 10^{-4}$.

49. $N = 306$ **51.** $N = 186$

53. (α) Η μέγιστη τιμή της $|f^{(4)}(x)|$ στο διάστημα $[0,1]$ είναι 24.
(β) $N=20$, $S_{20}\approx 0.785398$, $\left|0.785398-\frac{\pi}{4}\right|\approx 1.55\times 10^{-10}$

55. (α) Παρατηρήστε ότι $|f''(x)|=|2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)|$, ακολουθεί η απόδειξη.
(β) Όταν $K_2=6$, σφάλμα$(M_N)\leq \frac{1}{4N^2}$. (γ) $N\geq 16$

57. Σφάλμα$(T_4)\approx 0.1039$, σφάλμα$(T_8)\approx 0.0258$, σφάλμα$(T_{16})\approx 0.0064$, σφάλμα$(T_{32})\approx 0.0016$, σφάλμα$(T_{64})\approx 0.0004$. Αυτά είναι περίπου διπλάσια από το σφάλμα του M_N.

59. $S_2=\frac{1}{4}$. Αυτή είναι η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος.

61. $T_N=\dfrac{r(b^2-a^2)}{2}+s(b-a)=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

63. (α) Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει επειδή τα άρτια εσωτερικά άκρα επικαλύπτονται:

$$\sum_{i=0}^{(N-2)/2} S_2^{2j}=\frac{b-a}{6}\left[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots\right]$$
$$=\frac{b-a}{6}\left[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+4y_{N-1}+y_N\right]=S_N$$

(β) Αν η $f(x)$ είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, τότε από το μέρος (α) έχουμε

$$S_N\ =\ S_2^0+S_2^2+\cdots+S_2^{N-2}=\int_a^b f(x)\,dx$$

65. Έστω $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, με $a\neq 0$, ένα κυβικό πολυώνυμο. Τότε $f^{(4)}(x)=0$, οπότε μπορούμε να πάρουμε $K_4=0$. Αυτό δίνει σφάλμα$(S_N)\leq\frac{0}{180N^4}=0$. Με άλλα λόγια, το S_N είναι ακριβές για όλα τα κυβικά πολυώνυμα για κάθε N.

Κεφάλαιο 7 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. (α) (v) (β) (iv) (γ) (iii) (δ) (i) (ε) (ii)

3. $\frac{\sin^9\theta}{9}-\frac{\sin^{11}\theta}{11}+C$ **5.** $\frac{\tan\theta\sec^5\theta}{6}-\frac{7\tan\theta\sec^3\theta}{24}+\frac{\tan\theta\sec\theta}{16}+\frac{1}{16}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$

7. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\sec^{-1}x+C$ **9.** $2\tan^{-1}\sqrt{x}+C$ **11.** $-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$ **13.** $\frac{5}{32}e^4-\frac{1}{32}\approx 8.50$

15. $\frac{\cos^{12}6\theta}{72}-\frac{\cos^{10}6\theta}{60}+C$ **17.** $5\ln|x-1|+\ln|x+1|+C$ **19.** $\frac{\tan^3\theta}{3}+\tan\theta+C$ **21.** $\ln 8-1$ **23.** $-\frac{\cos^5\theta}{5}+\frac{2\cos^3\theta}{3}-\cos\theta+C$

25. $-\frac{1}{4}$ **27.** $\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2}+C$ **29.** $\frac{\sin^6\theta}{6}-\frac{\sin^8\theta}{8}+C$ **31.** $-\frac{1}{3}u^3+C=-\frac{1}{3}\cot^3 x+C$

33. $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cot^2(x)\csc^3(x)\,dx=\frac{1}{16}\ln 3+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{5}{56}$

35. $\frac{1}{49}\ln\left|\frac{t+4}{t-3}\right|-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{t-3}+C$ **37.** $\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{x}{2}+C$ **39.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{3/2}+ax^{1/2}}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+C & a>0\\ \frac{1}{\sqrt{-a}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{-a}}\right|+C & a<0\\ -\frac{2}{\sqrt{x}}+C & a=0\end{cases}$

41. $\ln|x+2|+5/(x+2)-3/(x+2)^2+C$ **43.** $-\ln|x-2|-2\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+C$ **45.** $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+4}{3}\right)+C$

47. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{5}{2}\ln|x-1|+2\ln|x-2|+C$ **49.** $-\frac{(x^2+4)^{3/2}}{48x^3}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{16x}+C$ **51.** $-\frac{1}{9}e^{4-3x}(3x+4)+C$

53. $\frac{1}{2}x^2\sin x^2+\frac{1}{2}\cos x^2+C$ **55.** $\frac{x^2}{2}\tanh^{-1}x+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$ **57.** $x\ln\left(x^2+9\right)-2x+6\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

59. $\frac{1}{2}\sinh 2$ **61.** $t+\frac{1}{4}\coth(1-4t)+C$ **63.** $\frac{\pi}{3}$ **65.** $\tan^{-1}(\tanh x)+C$

67. (α) $I_n=\displaystyle\int\frac{x^n}{x^2+1}\,dx=\int\frac{x^{n-2}(x^2+1-1)}{x^2+1}\,dx=\int x^{n-2}\,dx-\int\frac{x^{n-2}}{x^2+1}\,dx=\frac{x^{n-1}}{n-1}-I_{n-2}$

(β) $I_0 = \tan^{-1}x + C$, $I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$, $I_2 = x - \tan^{-1}x + C$, $I_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$, $I_4 = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x + C$, $I_5 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$
(γ) Αποδείξτε με επαγωγή. Δείξτε ότι ισχύει για $n = 1$, έπειτα υποθέστε ότι ισχύει για $n = k$ και χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός για να δείξετε ότι ισχύει για $n = k+1$.
69. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = \frac{1}{2}$. **71.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = 3\sqrt[3]{4}$.

73. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει, $I = \frac{\pi}{2}$. **75.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. **77.** Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

79. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει. **81.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει. **83.** Το ολοκλήρωμα συγκλίνει. **85.** π **89.** $\frac{2}{(s-\alpha)^3}$

91. (α) Η T_N είναι μικρότερη και η M_N είναι μεγαλύτερη από το ολοκλήρωμα.
(β) Η M_N είναι μικρότερη και η T_N είναι μεγαλύτερη από το ολοκλήρωμα.
(γ) Η M_N είναι μικρότερη και η T_N είναι μεγαλύτερη από το ολοκλήρωμα.
(δ) Η T_N είναι μικρότερη και η M_N είναι μεγαλύτερη από το ολοκλήρωμα.
93. $M_5 \approx 0.7481$ **95.** $M_4 \approx 0.7450$ **97.** $S_4 \approx 0.7469$ **99.** $V \approx T_9 \approx 20$ στρέμματα-ft $= 871{,}200$ ft^3

101. Σφάλμα $\leq \frac{3}{128}$ **103.** $N \geq 29$

Κεφάλαιο 8

Ενότητα 8.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Όχι, η $p(x) \geq 0$ δεν ισχύει. **3.** $p(x) = 4e^{-4x}$

Ενότητα 8.1 Ασκήσεις

1. $C = 2$, $P(0 \leq X \leq 1) = \frac{3}{4}$ **3.** $C = \frac{1}{\pi}$, $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ **5.** $C = \frac{1}{2}$, $P(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$

7. $C = \frac{2}{\pi}$, $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ **9.** $\int_1^\infty 3x^{-4} = 1$, $\mu = \frac{3}{2}$

11. Η ολοκλήρωση επιβεβαιώνει ότι $\int_0^\infty \frac{1}{50}e^{-t/50} = 1$. **13.** $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.2231$ **15.** $\frac{1}{2}\left(2 - 10e^{-2}\right) \approx 0.32$

17. $F(-\frac{2}{3}) - F(-\frac{13}{6}) \approx 0.2374$ **19.** (α) ≈ 0.8849 (β) ≈ 0.6554

21. Η $1 - F(z)$ και η $F(-z)$ είναι το ίδιο εμβαδόν στις αντίθετες ουρές της συνάρτησης κατανομής. Απλή άλγεβρα με την τυπική συνάρτηση της κανονικής αθροιστικής κατανομής δείχνει ότι $P(\mu - r\sigma \leq X \leq \mu + r\sigma) = 2F(r) - 1$

23. ≈ 0.0062 **27.** $\mu = \frac{5}{3}, \sigma = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ **29.** $\mu = 3, \sigma = 3$

31. (α) Η $f(t)$ είναι το ποσοστό των αρχικών ατόμων που υπάρχουν τη χρονική στιγμή t. Επομένως, το κλάσμα των ατόμων που διασπώνται θα είναι ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού αριθμού των ατόμων. Σε ένα μικρό διάστημα αυτό είναι απλώς $-f'(t)\Delta t$.
(β) Το κλάσμα των ατόμων που διασπώνται σε ένα απειροστά μικρό διάστημα είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα ένα μεμονωμένο άτομο να διασπαστεί σε αυτό το διάστημα. Επομένως, η πυκνότητα πιθανότητας γίνεται $-f'(t)$.
(γ) $\int_0^\infty -tf'(t)\,dt = \frac{1}{k}$

Ενότητα 8.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $\int_0^\pi \sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$ **2.** $\int_0^h 2\pi r\,dx = 2\pi rh$ **3.** Ναι

4. Η γραφική παράσταση της $y = f(x)+C$ αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$. Επομένως, οι δύο γραφικές παραστάσεις θα έχουν το ίδιο μήκος τόξου. Μπορούμε να δείξουμε αυτό το γεγονός ως εξής:

$$\text{μήκος της } y = f(x)+C = \int_a^b \sqrt{1+\left[\frac{d}{dx}(f(x)+C)\right]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \text{μήκος της } y = f(x)$$

5. Εφόσον $\sqrt{1+f'(x)^2} \ge 1$ για οποιαδήποτε συνάρτηση f, έχουμε

$$\text{μήκος της γραφικής παράστασης της } y = f(x) \text{ στο } [1,4] = \int_1^4 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \ge \int_1^4 1\,dx = 3$$

Ενότητα 8.2 Ασκήσεις

1. $L = \int_2^6 \sqrt{1+16x^6}\,dx$ **3.** $\frac{13}{12}$ **5.** $3\sqrt{10}$ **7.** $\frac{1}{27}(22\sqrt{22}-13\sqrt{13})$ **9.** $e^2+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{4}$ **11.** $\int_1^2 \sqrt{1+x^6}\,dx \approx 3.957736$

13. $\int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \approx 1.132123$ **15.** $\int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = 2.29896$ **17.** ≈ 320.0 **19.** 6 **23.** 7.6337

27. $a = \sinh^{-1}(5) = \ln(5+\sqrt{26})$

29. Έστω ότι το s παριστάνει το μήκος του τόξου. Τότε $s = \frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{4}\ln|\sqrt{1+4a^2}+2a|$. Επομένως, όταν $a = 1$, $s = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{5}+2) \approx 1.478943$.

31. $\sqrt{1+e^{2a}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2a}}-1}{\sqrt{1+e^{2a}}+1} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ **33.** $\ln(1+\sqrt{2})$ **35.** 1.552248 **37.** $16\pi\sqrt{2}$ **39.** $\frac{\pi}{27}(145^{3/2}-1)$

41. $\frac{\pi}{32}\left(132\sqrt{17} - \ln\left(4+\sqrt{17}\right)\right) \approx 53.23$ **43.** $\frac{384\pi}{5}$ **45.** $\frac{\pi}{16}(e^4-9)$ **47.** $2\pi\int_1^3 x^{-1}\sqrt{1+x^{-4}}\,dx \approx 7.60306$

49. $2\pi\int_0^2 e^{-x^2/2}\sqrt{1+x^2e^{-x^2}}\,dx \approx 8.222696$ **51.** $2\pi\ln 2 + \frac{15\pi}{8}$ **53.** $4\pi^2 br$

55. $\frac{\pi}{6}\left(\ln(\sqrt{145}+12)+12\sqrt{145}\right) \approx 77.33$ **57.** ≈ 261.13 **59.** $2\pi b^2 + \frac{2\pi ba^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$

Ενότητα 8.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Η πίεση ορίζεται ως η δύναμη ανά μονάδα εμβαδού.

2. Ο παράγοντας της αναλογίας είναι η πυκνότητα βάρους του υγρού, $w = \rho g$.

3. Η δύναμη του ρευστού ασκείται σε κατεύθυνση κάθετη στην πλευρά του βυθισμένου αντικειμένου.

4. Η πίεση εξαρτάται μόνο από το βάθος και δεν μεταβάλλεται οριζόντια σε δεδομένο βάθος.

5. Όταν μια πλάκα είναι βυθισμένη κατακόρυφα, η πίεση δεν είναι σταθερή κατά μήκος της πλάκας, οπότε η δύναμη του ρευστού δεν είναι ίση με την πίεση επί το εμβαδόν.

Ενότητα 8.3 Ασκήσεις

1. (α) Κορυφή: $F = 176{,}400$ newtons, βάση: $F = 705{,}600$ newtons

(β) $F \approx \sum_{j=1}^{N} \rho g 3y_j\,\Delta y$ (γ) $F = \int_2^8 \rho g 3y\,dy$ (δ) $F = 882{,}000$ newtons

3. Διαφορά $=$ δύναμη όταν η πάνω πλευρά είναι 1 μέτρο κάτω από το νερό – Η δύναμη όταν η πάνω πλευρά είναι στην επιφάνεια του νερού $=$ 19,600 newtons.

5. (α) Το πλάτος του τριγώνου κυμαίνεται γραμμικά από το 0 σε βάθος $y = 3$ m έως 1 σε βάθος $y = 5$ m. Επομένως, $f(y) = \frac{1}{2}(y-3)$.

(β) Το εμβαδόν της λωρίδας σε βάθος y είναι $\frac{1}{2}(y-3)\Delta y$ και η πίεση σε βάθος y είναι $\rho g y$, όπου $\rho = 10^3$ kg/m^3 και $g = 9.8$. Επομένως, η δύναμη του ρευστού που ασκείται στη λωρίδα σε βάθος y είναι περίπου ίση με $\rho g \frac{1}{2} y(y-3)\Delta y$.

(γ) $F \approx \sum_{j=1}^{N} \rho g \frac{1}{2} y_j (y_j - 3)\,\Delta y \to \int_3^5 \rho g \frac{1}{2} y(y-3)\,dy$

(δ) $F = \frac{127{,}400}{3}$ newtons

7. (β) $F = \frac{19{,}600}{3} r^3$ newtons **9.** $F = \frac{19{,}600}{3} r^3 + 4900\pi m r^2$ newtons **11.** $F \approx 328{,}224{,}000$ lb

13. 333,200 newtons **15.** $F = \frac{815{,}360}{3}$ newtons **17.** $F \approx 6153.18$ newtons **19.** $F \approx 5652.4$ newtons

21. $F = 940{,}800$ newtons **23.** 5.4604×10^{11} newtons **25.** $F = (15b + 30a)h^2$ lb

27. Μπροστά και πίσω: $F = \frac{62.5\sqrt{3}}{9} H^3$, κεκλιμένες πλευρές: $F = \frac{62.5\sqrt{3}}{3} \ell H^2$

Ενότητα 8.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $M_x = M_y = 0$ **2.** $M_x = 21$ **3.** $M_x = 5$, $M_y = 10$

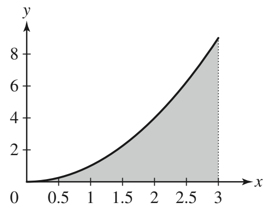
4. Επειδή ένα ορθογώνιο είναι συμμετρικό ως προς την κατακόρυφη και την οριζόντια ευθεία που διέρχονται από το κέντρο του ορθογωνίου, η αρχή της συμμετρίας εξασφαλίζει ότι το κεντροειδές του ορθογωνίου πρέπει να βρίσκεται πάνω σε αμφότερες τις ευθείες. Το μοναδικό σημείο που είναι κοινό στις δύο ευθείες συμμετρίας είναι το κέντρο του ορθογωνίου, οπότε το κεντροειδές πρέπει να είναι το κέντρο του ορθογωνίου.

5. Αν η πλάκα μοιάζει με δακτύλιο, τότε το κέντρο μάζας δεν παρατηρείται σε κανένα σημείο της πλάκας.

Ενότητα 8.4 Ασκήσεις

1. (α) $-\frac{7}{8}$ (β) $\frac{19}{5}$ **3.** (α) $M_x = 4m$, $M_y = 9m$, κέντρο μάζας: $\left(\frac{9}{4}, 1\right)$ (β) $\left(\frac{46}{17}, \frac{14}{17}\right)$

7. Ένα διάγραμμα του ελάσματος φαίνεται εδώ.



(α) $M_x = \frac{729}{10}$, $M_y = \frac{243}{4}$

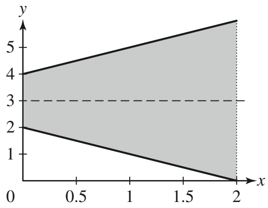
(β) Εμβαδόν $= 9$ cm^2, κέντρο μάζας: $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{10}\right)$

9. $M_x = \frac{64\delta}{7}$, $M_y = \frac{32\delta}{5}$ κέντρο μάζας: $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{7}\right)$

11. (α) $M_x = 24$ (β) $M = 12$, so $y_{cm} = 2$, κέντρο μάζας: $(0, 2)$

13. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ **15.** $\left(\frac{93}{35}, \frac{45}{56}\right)$ **17.** $\left(\frac{9}{8}, \frac{18}{5}\right)$ **19.** $\left(\dfrac{1 - 5e^{-4}}{1 - e^{-4}}, \dfrac{1 - e^{-8}}{4(1 - e^{-4})}\right)$ **21.** $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

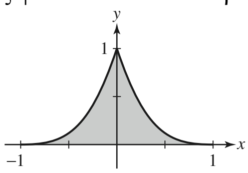
23. Ένα διάγραμμα της περιοχής φαίνεται παρακάτω.



Η περιοχή είναι εμφανώς συμμετρική γύρω από την ευθεία $y = 3$, οπότε περιμένουμε το κεντροειδές της περιοχής να βρίσκεται κατά μήκος της ευθείας. Βρίσκουμε ότι $M_x = 24$, $M_y = \frac{28}{3}$, κεντροειδές: $\left(\frac{7}{6}, 3\right)$.

25. $\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$ **27.** $\left(\dfrac{1}{2(e-2)}, \dfrac{e^2-3}{4(e-2)}\right)$ **29.** $\left(\dfrac{\pi\sqrt{2}-4}{4(\sqrt{2}-1)}, \dfrac{1}{4(\sqrt{2}-1)}\right)$

31. Ένα διάγραμμα της περιοχής φαίνεται εδώ. Κεντροειδές: $\left(0, \frac{2}{7}\right)$



33. $\left(0, \frac{4b}{3\pi}\right)$ **35.** $\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$ **37.** $\left(0, \dfrac{\frac{2}{3}(r^2-h^2)^{3/2}}{r^2\sin^{-1}\sqrt{1-h^2/r^2}-h\sqrt{r^2-h^2}}\right)$, με $r = 1$ και $h = \frac{1}{2}$: $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4\pi-3\sqrt{3}}\right) \approx (0, 0.71)$

39. $V = \frac{\pi r^2 H}{3}$ **41.** $\left(0, \frac{49}{24}\right)$ **43.** $\left(-\frac{4}{9\pi}, \frac{4}{9\pi}\right)$

45. Στο τετράγωνο στα αριστερά: $(4, 4)$, για το τετράγωνο στα δεξιά: $\left(4, \frac{25}{7}\right)$

Κεφάλαιο 8 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. $\frac{3}{4}$ **3.** $C = 2, p(0 \le X \le 1) = 1 - \frac{2}{e}$ **5.** (α) 0.1587 (β) 0.49997 **7.** $\frac{779}{240}$ **9.** $4\sqrt{17}$ **13.** $24\pi\sqrt{2}$

15. $\frac{67\pi}{36}$ **17.** $12\pi + 4\pi^2$ **19.** 176,400 newtons

21. Δύναμη του ρευστού στην τριγωνική όψη: $183{,}750\sqrt{3} + 306{,}250$ newtons. Δύναμη του ρευστού στην πλάγια ορθογώνια πλευρά: $122{,}500\sqrt{3} + 294{,}000$ newtons.

23. $M_x = 20{,}480$; $M_y = 25{,}600$, κέντρο μάζας: $\left(2, \frac{8}{5}\right)$ **25.** $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ **27.** $\frac{3\pi}{10}$

Κεφάλαιο 9

Ενότητα 9.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) Πρώτης τάξης (β) Πρώτης τάξης (γ) Τάξη 3 (δ) Τάξη 2 **2.** β, δ, ε **3.** α, γ, δ, στ **4.** β, γ, δ, ε

Ενότητα 9.1 Ασκήσεις

1. Θέτουμε $y = 4x^2$. Τότε $y' = 8x$ και $y' - 8x = 8x - 8x = 0$.

3. Θέτουμε $y = 25e^{-2x^2}$. Τότε $y' = -100xe^{-2x^2}$ και $y' + 4xy = -100xe^{-2x^2} + 4x(25e^{-2x^2}) = 0$.

5. Θέτουμε $y = 4x^4 - 12x^2 + 3$. Τότε

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + 8y &= (48x^2 - 24) - 2x(16x^3 - 24x) + 8(4x^4 - 12x^2 + 3) \\ &= 48x^2 - 24 - 32x^4 + 48x^2 + 32x^4 - 96x^2 + 24 = 0 \end{aligned}$$

7. $y(t) = -1$ και $y(t) = 0.001x - 1.001$ **9.** (δ) $y = \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + e^4\right|$

11. $y = (8x^3 + C)^{1/4}$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά. **13.** $y = Ce^{-x^3/3}$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά.

15. $y = \ln\left(4t^5 + C\right)$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά. **17.** $y = Ce^{-5x/2} + \frac{4}{5}$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά.

19. $y = Ce^{-\sqrt{1-x^2}}$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά. **21.** $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά.

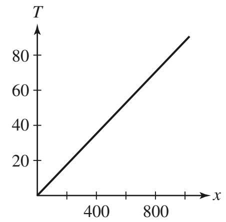
23. $x = \tan(\frac{1}{2}t^2 + t + C)$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά.

25. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά.

27. $y = C \sec t$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά. **29.** $y = 75e^{-2x}$ **31.** $y = -\sqrt{\ln\left(x^2 + e^4\right)}$

33. $y = 2 + 2e^{x(x-2)/2}$ **35.** $y = \tan\left(x^2/2\right)$ **37.** $y = e^{1-e^{-t}}$ **39.** $y = \frac{et}{e^{1/t}} - 1$ **41.** $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}e^x\right)$

43. (α) Με προσέγγιση των αριθμητικών τιμών που εμπλέκονται στη διαφορική εξίσωση και στη λύση της, $T(x) = 0.091x$.
(β)



45. (α) ≈1145 s ή 19.1 min (β) ≈3910 s ή 65.2 min
47. $y = 8 - (8 + 0.0002215t)^{2/3}$, $t_e \approx 66000$ s ή 18 h, 20 min

51. Μετά 5 h, ποσότητα ≈ 184 g. Μετά 10 h, ποσότητα ≈ 68 g.

53. (α) $\frac{dN}{dt} = kN, N(0) = 11.3, N(10) = 11.7$, λύση: $N(t) = 11.3e^{0.0035t}$. (β) Περίπου 2.3 εκατομμύρια.
55. (α) $t = \frac{\ln p}{k}$ (β) Διπλασιάζεται περίπου σε 0.46 h. Τριπλασιάζεται περίπου σε 0.73 h. Δεκαπλασιάζεται περίπου σε 1.54 h.
57. (α) $q(t) = CV\left(1 - e^{-t/RC}\right)$
(γ) $\lim\limits_{t\to\infty} q(t) = \lim\limits_{t\to\infty} CV\left(1 - e^{-t/RC}\right) = \lim\limits_{t\to\infty} CV\,(1 - 0) = CV$
(δ) $q(RC) = CV\left(1 - e^{-1}\right) \approx (0.63)\,CV$

59. Κυβική, $V = (kt/3 + C)^3$, ο V αυξάνεται περίπου κυβικά με τον χρόνο.

61. (α) $\frac{d}{dt}(ye^{-kt}) = \frac{dy}{dt}(e^{-kt}) + y(-ke^{-kt}) = ky(e^{-kt}) - ky(e^{-kt}) = 0$
(β) Εφόσον $\frac{d}{dt}(ye^{-kt}) = 0$ [από το μέρος (α)], το πόρισμα συνεπάγεται ότι $ye^{-kt} = D$ για κάποια σταθερά D. Επομένως, $y = De^{kt}$.
63. $y = Cx^3$ και $y = \pm\sqrt{A - \frac{x^2}{3}}$

65. (β) $v(t) = -9.8t + 100(\ln(50) - \ln(50 - 4.75t))$, $v(10) = -98 + 100(\ln(50) - \ln(2.5)) \approx 201.573$ m/s

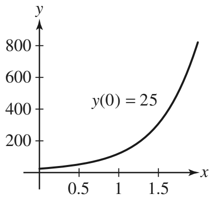
71. (γ) $C = \frac{14\pi}{15B\sqrt{2g}} \cdot R^{5/2}$

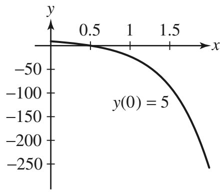
Ενότητα 9.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $y(t) = 5 - ce^{4t}$ για οποιαδήποτε θετική σταθερά c **2.** Όχι **3.** Σωστό
4. Η διαφορά στη θερμοκρασία μεταξύ ενός σώματος που ψύχεται και της θερμοκρασίας περιβάλλοντος μειώνεται. Επομένως, ο ρυθμός ψύξης, ο οποίος είναι ανάλογος αυτής της διαφοράς, μειώνεται επίσης κατ' απόλυτη τιμή.

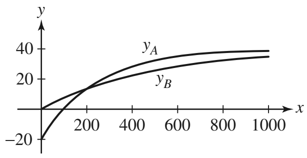
Ενότητα 9.2 Ασκήσεις

1. Γενική λύση: $y(t) = 10 + ce^{2t}$, λύση που ικανοποιεί τη σχέση $y(0) = 25$: $y(t) = 10 + 15e^{2t}$, λύση που ικανοποιεί τη σχέση $y(0) = 5$: $y(t) = 10 - 5e^{2t}$





3. $y = -6 + 11e^{4x}$ **5.** (α) $y' = -0.02(y - 10)$ (β) $y = 10 + 90e^{-\frac{1}{50}t}$ (γ) $100 \ln 3$ s ≈ 109.8 s **7.** $\approx$ 5:50 ΠΜ
9. ≈ 0.77 min $= 46.6$ s **11.** $500 \ln \frac{3}{2}$ s ≈ 203 s $= 3$ min 23 s



13. -58.8 m/s **15.** -11.8 m/s
17. (α)

$$0 = -\frac{9.8}{k} + \left(30 + \frac{9.8}{k}\right) e^{-kt^*}$$
$$9.8 = (30k + 9.8)e^{-kt^*}$$
$$e^{kt^*} = \frac{30k}{9.8} + 1$$
$$kt^* = \ln\left(\frac{30k}{9.8} + 1\right)$$
$$t^* = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{30k}{9.8} + 1\right)$$

(β)

$$\begin{aligned}
y(t^*) &= -\frac{9.8}{k^2} \ln\left(\frac{30k}{9.8} + 1\right) + \frac{1}{k}\left(30 + \frac{9.8}{k}\right)\left(1 - e^{-\ln(\frac{30k}{9.8}+1)}\right) \\
&= -\frac{9.8}{k^2} \ln\left(\frac{30k}{9.8} + 1\right) + \frac{1}{k}\left(30 + \frac{9.8}{k}\right)\left(1 - \frac{9.8}{30k + 9.8}\right) \\
&= -\frac{9.8}{k^2} \ln\left(\frac{30k}{9.8} + 1\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{30k + 9.8}{k}\right)\left(\frac{30k}{30k + 9.8}\right) \\
&= -\frac{9.8}{k^2} \ln\left(\frac{30k}{9.8} + 1\right) + \frac{30}{k} \\
&= \frac{30k - 9.8\ln(\frac{150k}{49} + 1)}{k^2}
\end{aligned}$$

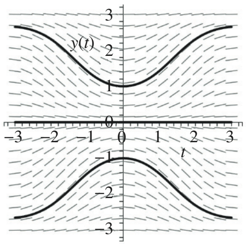
19. (α) i. \$17,563.94 ii. περίπου 13.86 έτη ή περίπου 13 έτη 10 μήνες (γ) \$120,000 (δ) \$107,629.00 (ε) 8%
21. \$4068.73 ανά έτος **23.** (α) $I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}\right)$

Ενότητα 9.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

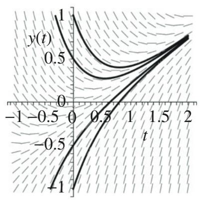
1. 7 **2.** $y = \pm\sqrt{1+t}$ **3.** (β) **4.** 20

Ενότητα 9.3 Ασκήσεις

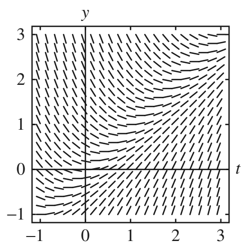
1.



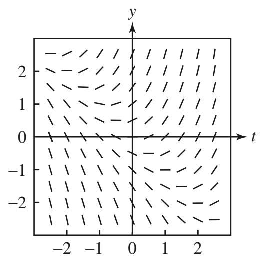
3.



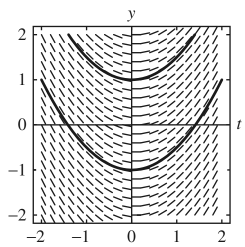
5. (α)



7.

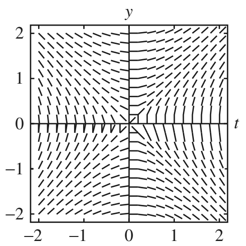


9. Για $y' = t$, η y' εξαρτάται μόνο από το t. Οι ισοκλινείς οποιασδήποτε κλίσης c θα είναι οι κατακόρυφες ευθείες $t = c$.



11. (i) Γ (ii) Β (iii) ΣΤ (iv) Δ (v) Α (vi) Ε

13. (α)



15. (α) $y_1 = 3.1$ (β) $y_2 = 3.231$ (γ) $y_3 = 3.3919$, $y_4 = 3.58171$, $y_5 = 3.799539$, $y_6 = 4.0445851$
(δ) $y(2.2) \approx 3.231$, $y(2.5) \approx 3.799539$

17. $y(0.5) \approx 1.7210$ **19.** $y(3.3) \approx 3.3364$ **21.** $y(2) \approx 2.8838$ **25.** $y(0.5) \approx 1.794894$ **27.** $y(0.25) \approx 1.094871$

Ενότητα 9.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) Όχι (β) Ναι (γ) Όχι (δ) Ναι **2.** $y(t) = 0$ και $y(t) = A$ **3.** Ναι

Ενότητα 9.4 Ασκήσεις

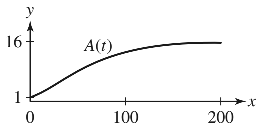
1. $y = \dfrac{5}{1 - e^{-3t}/C}$ και $y = \dfrac{5}{1 + (3/2)e^{-3t}}$ **3.** (α) $y(t) = 6$ (β) $y(t) = \frac{6}{1+0.5e^{-18t}}$ (γ) $y(t) = 0$

5. (α) $P(t) = \dfrac{2000}{1 + 3e^{-0.6t}}$ (β) $t = \frac{1}{0.6}\ln 3 \approx 1.83$ έτη

7. $k = \ln\frac{81}{31} \approx 0.96$ έτη^{-1}, $t = \frac{\ln 9}{2\ln 9 - \ln 31} \approx 2.29$ έτη

9. Μετά $t = 7.6$ h ή στις 3:36 ΜΜ.

11. (α) $y_1(t) = \frac{10}{10 - 9e^{-t}}$ και $y_2(t) = \frac{1}{1 - 2e^{-t}}$ (β) $t = \ln\frac{9}{8}$ (γ) $t = \ln 2$ **13.** (α) $A(t) = 16(1 - \frac{5}{3}e^{t/40})^2/(1 + \frac{5}{3}e^{t/40})^2$
(β) $A(10) \approx 2.1$ (γ)



15. ≈ 943 εκατομμύρια **17.** (δ) $t = -\frac{1}{k}\left(\ln y_0 - \ln\left(A - y_0\right)\right)$

Ενότητα 9.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) Ναι (β) Όχι (γ) Ναι (δ) Όχι **2.** (β) **3.** $P(x) = x^{-1}$ **4.** $P(x) = 1$

Ενότητα 9.5 Ασκήσεις

1. (γ) $y = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}$ (δ) $y = \frac{x^4}{5} - \frac{1}{5x}$ **5.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}$ **7.** $y = -\frac{1}{4}x^{-1} + Cx^{1/3}$ **9.** $y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3} + Cx^{-3}$

11. $y = -x\ln x + Cx$ **13.** $y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$ **15.** $y = x\cos x + C\cos x$ **17.** $y = Ce^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$ **19.** $y = x^x + Cx^x e^{-x}$

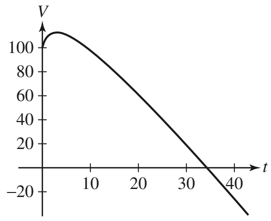
21. $y = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{6}{5}e^{-3x}$ **23.** $y = \frac{\ln|x|}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{5}{x+1}$ **25.** $y = -\cos x + \sin x$ **27.** $y = \tanh x + 3\,\mathrm{sech}\, x$

29. Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, πρώτης τάξης, με $p(x) = 0$ και $Q(x) = x$. Σταθερές συναρτήσεις είναι αντιπαράγωγοι της $p(x)$ και επομένως μπορούμε να πάρουμε $\alpha(x) = e^c$, για οποιοδήποτε C, ως έναν ολοκληρωτικό παράγοντα. Τότε, από το Θεώρημα 1 η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $y = \frac{1}{e^C}\int e^C x\,dx = \int x dx$. Από εδώ, η εύρεση της λύσης περιλαμβάνει την άμεση ολοκλήρωση του δεξιού μέλους της διαφορικής εξίσωσης.

31. Για $m \neq -n$: $y = \frac{1}{m+n}e^{mx} + Ce^{-nx}$, για $m = -n$: $y = (x + C)e^{-nx}$

33. (α) $y' = 4000 - \frac{40y}{500 + 40t}$, $y = 1000\frac{4t^2 + 100t + 125}{2t + 25}$ (β) 40 g/L **35.** 50 g/L

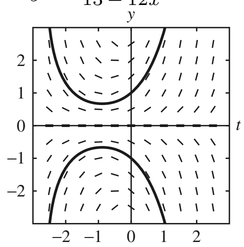
37. (α) $\frac{dV}{dt} = \frac{20}{1+t} - 5$ και $V(t) = 20\ln(1 + t) - 5t + 100$
(β) Η μέγιστη τιμή είναι $V(3) = 20\ln 4 - 15 + 100 \approx 112.726$.
(γ) Εκτιμούμε ότι θα αδειάσει σε ≈ 34 min



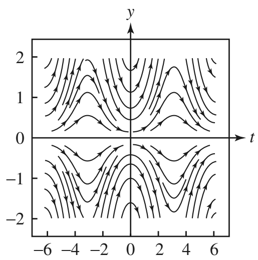
39. $I(t) = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-20t}\right)$ **41.** (α) $I(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}$ (γ) Περίπου 0.0184 s **43.** (β) $c_1(t) = 10e^{-t/6}$

Κεφάλαιο 9 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

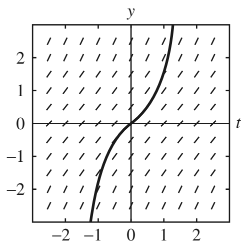
1. (α) Όχι, πρώτης τάξης (β) Ναι, πρώτης τάξης (γ) Όχι, τάξης 3 (δ) Ναι, δεύτερης τάξης
3. $y = \pm\left(\frac{4}{3}t^3 + C\right)^{1/4}$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά. **5.** $y = Cx^2 - \frac{3}{2}$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά.
7. $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \frac{\pi}{4}$ **9.** $y = \frac{4}{13 - 12x^2}$ **11.**



13.



15. $y(t) = \tan t$

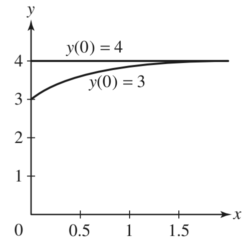


17. $y(0.1) \approx 1.1$, $y(0.2) \approx 1.209890$, $y(0.3) \approx 1.329919$ **19.** $y = \frac{5}{3}\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^2$

21. $y = \frac{1}{2} + e^{-x} - \frac{11}{2}e^{-2x}$ **23.** $y = \frac{1}{2}\sin 2x - 2\cos x$ **25.** $y = 1 - \sqrt{t^2 + 15}$ **27.** $w = \tan\left(k \ln x + \frac{\pi}{4}\right)$

29. $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$, όπου C είναι μια τυχαία σταθερά.

31. Λύση που ικανοποιεί την $y(0) = 3$: $y(t) = 4 - e^{-2t}$, λύση που ικανοποιεί την $y(0) = 4$: $y(t) = 4$



33. (α) 12 (β) ∞, αν $y(0) > 12$ 12, αν $y(0) = 12$ $-\infty$, αν $y(0) < 12$ (γ) -3

35. $400{,}000 - 200{,}000e^{0.25} \approx \$143{,}194.91$ **37.** \$400,000 **39.** (α) $P(t) = 500e^{0.262t}$ (β) Περίπου 2.65 h

41. Οι λύσεις είναι της μορφής $y = \frac{B}{A} + Ce^{-At}$ και $\lim_{t\to\infty} y = \frac{B}{A}$. **43.** $\frac{dy}{dt} = \frac{-7\sqrt{10y}}{(30y + 8100)}$, $t = 3225.88$ s ή 51 min 56 s

45. 2 **47.** $t = 5\ln 441 \approx 30.45$ ημέρες **51.** (α) $\frac{dc_1}{dt} = -\frac{2}{5}c_1$ (β) $c_1(t) = 8e^{(-2/5)t}$ g/L

Κεφάλαιο 10

Ενότητα 10.1 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $a_4 = 12$ **2.** (γ) **3.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ **4.** (β)
5. (α) Λάθος, αντιπαράδειγμα: $a_n = \cos \pi n$ (β) Σωστό (γ) Λάθος, αντιπαράδειγμα: $a_n = (-1)^n$

Ενότητα 10.1 Ασκήσεις

1. (α) (iv) (β) (i) (γ) (iii) (δ) (ii) **3.** $c_1 = 3, c_2 = \frac{9}{2}, c_3 = \frac{9}{2}, c_4 = \frac{27}{8}$ **5.** $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 47, a_4 = 4415$

7. $b_1 = 4, b_2 = 6, b_3 = 4, b_4 = 6$ **9.** $c_1 = 1, c_2 = \frac{3}{2}, c_3 = \frac{11}{6}, c_4 = \frac{25}{12}$ **11.** $b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 8, b_4 = 19$

13. (α) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ (β) $a_n = \frac{n+1}{n+5}$ **15.** Αποκλίνει **17.** $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{12n+9} = \frac{5}{12}$ **19.** Αποκλίνει

21. Η ακολουθία αποκλίνει. **23.** $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ **25.** $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{12n+2}{-9+4n}\right) = \ln 3$ **27.** Όριο $= 0$

29. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = 2$ **31.** $\lim_{n\to\infty} \cos^{-1}\left(\frac{n^3}{2n^3+1}\right) = \frac{\pi}{3}$ **33.** Όριο ≈ 1.61803 **35.** (α) $M = 999$ (β) $M = 99{,}999$

39. $\lim_{n\to\infty} \left(10 + \left(-\frac{1}{9}\right)^n\right) = 10$ **41.** Η ακολουθία αποκλίνει. **43.** $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$ **45.** $\lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{n!} = 0$

47. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+2}{2n^2-3} = \frac{3}{2}$ **49.** $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ **51.** Η ακολουθία αποκλίνει. **53.** $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{4}{n^2}\right)^{1/3} = 2^{1/3}$

55. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right) = \ln\frac{2}{3}$ **57.** Η ακολουθία αποκλίνει. **59.** $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + (-3)^n}{5^n} = 0$ **61.** $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \pi$

63. $\lim_{n\to\infty} \frac{3-4^n}{2+7\cdot 4^n} = -\frac{1}{7}$ **65.** $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ **67.** $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0$ **69.** $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \frac{1}{2}$

71. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^8}} = 0$ **73.** $\lim_{n\to\infty} (2^n + 3^n)^{1/n} = 3$ **75.** (β)

77. Οποιοσδήποτε αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από το 3 είναι ένα άνω όριο.

79. Παράδειγμα: $a_n = (-1)^n$ **83.** Παράδειγμα: $f(x) = \sin \pi x$ **91.** (α) $AGM\left(1, \sqrt{2}\right) \approx 1.198$

Ενότητα 10.2 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Το άθροισμα μιας απειροσειράς ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Αν το όριο αυτής της ακολουθίας δεν υπάρχει, λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.
2. $S = \frac{1}{2}$
3. Το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, οπότε το αποτέλεσμα δεν είναι έγκυρο: Μια σειρά με όλους τους όρους της θετικούς, δεν μπορεί να έχει αρνητικό άθροισμα. Ο τύπος δεν είναι έγκυρος επειδή η γεωμετρική σειρά με $|r| \geq 1$ αποκλίνει.
4. Όχι **5.** Όχι **6.** $N = 13$ **7.** Όχι, η S_N είναι αύξουσα και συγκλίνει στο 1, οπότε $S_N \leq 1$ για κάθε N.

8. Παράδειγμα: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/10}}$

Ενότητα 10.2 Ασκήσεις

1. (α) $a_n = \frac{1}{3^n}$ (β) $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$ (γ) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n^n}{n!}$ (δ) $a_n = \frac{1+\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}{n^2+1}$ **3.** $S_2 = \frac{5}{4}, S_4 = \frac{205}{144}, S_6 = \frac{5369}{3600}$
5. $S_2 = \frac{2}{3}, S_4 = \frac{4}{5}, S_6 = \frac{6}{7}$ **7.** $S_6 = 1.24992$
9. $S_{10} = 0.03535167962, S_{100} = 0.03539810274, S_{500} = 0.03539816290, S_{1000} = 0.03539816334$, ναι.
11. $S_3 = \frac{3}{10}, S_4 = \frac{1}{3}, S_5 = \frac{5}{14}, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$ **13.** $S_3 = \frac{3}{7}, S_4 = \frac{4}{9}, S_5 = \frac{5}{11}, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$
15. $S = \frac{1}{2}$ **17.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10n+12} = \frac{1}{10} \neq 0$ **19.** Το $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$ δεν υπάρχει.
21. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n+1} = 1 \neq 0$ **23.** $\frac{6}{5}$ **25.** $\frac{7}{2}$ **27.** Η σειρά αποκλίνει. **29.** $S = \frac{59{,}049}{3328}$ **31.** $S = \frac{1}{e-1}$
33. $S = \frac{35}{3}$ **35.** $S = 4$ **37.** $S = \frac{7}{15}$ **39.** $\frac{2}{9}$ **41.** $\frac{31}{99}$ **43.** $\frac{37}{300}$ **45.** $0.999999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$
47. (β) και (γ)

49. (α) Αντιπαράδειγμα: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ (α) Αντιπαράδειγμα: Αν $a_n = 1$, τότε $S_N = N$.

(γ) Αντιπαράδειγμα: Το $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει (δ) Αντιπαράδειγμα: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi n \neq 1$

53. (α) $(.55)^n(.48)^{n-1}(.52)$ (β) $\sum_{n=1}^{\infty}(.55)^n(.48)^{n-1}(.52) = \sum_{n=1}^{\infty}(.55)(.52)((.55)(.48))^{n-1} = \frac{0.286}{1-0.264} \approx 0.39$
(γ) $\sum_{n=1}^{\infty}(.52)((.48)(.55))^{n-1} = \frac{0.52}{1-0.264} \approx 0.71$ **55.** Το συνολικό εμβαδόν είναι $\frac{1}{4}$.
57. (α) $De^{-k} + De^{-2k} + De^{-3k} + \cdots = \frac{De^{-k}}{1-e^{-k}}$
(β) $De^{-kt} + De^{-2kt} + De^{-3kt} + \cdots = \frac{De^{-kt}}{1-e^{-kt}}$
(γ) $t \geq -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{D}{S}\right)$
59. Το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι $2 + \sqrt{2}$.

63. (α) Καθώς $x \to \infty$, η διάμετρος της σάλπιγγας τείνει στο μηδέν. Αν μπορούσαμε να γεμίσουμε τη σάλπιγγα μέχρι τέλους, τότε η βαφή θα ήταν ικανή να απλωθεί αρκετά λεπτά ώστε να να χωρέσει εντελώς μέσα στη σάλπιγγα.
(β) Χρησιμοποιούμε όγκο $\frac{1}{2^n}$ χιλιοστόλιτρων βαφής για να βάψουμε το τμήμα της σάλπιγγας μεταξύ του $x = n$ και του $x = n+1$. Συνολικά χρησιμοποιούμε όγκο $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$ χιλιοστόλιτρων βαφής για να βάψουμε τη σάλπιγγα.

Ενότητα 10.3 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (β) **2.** Μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $a_n = f(n)$ πρέπει να είναι θετική, φθίνουσα και συνεχής για $x \geq 1$.
3. Σύγκλιση της σειράς p ή κριτήριο ολοκληρώματος **4.** Κριτήριο σύγκρισης

5. Όχι, η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, αλλά αφού $\frac{e^{-n}}{n} < \frac{1}{n}$ για $n \geq 1$, το Κριτήριο Σύγκρισης δεν μας πληροφορεί τίποτα σχετικά με τη σύγκλιση της $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$.

Ενότητα 10.3 Ασκήσεις

1. Η $\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^4}\,dx$ συγκλίνει, οπότε η σειρά συγκλίνει. **3.** $\int_1^{\infty} x^{-1/3}\,dx = \infty$, οπότε η σειρά αποκλίνει.

5. Η $\int_{25}^{\infty} \frac{x^2}{(x^3+9)^{5/2}}\,dx$ συγκλίνει, οπότε η σειρά συγκλίνει. **7.** Η $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ συγκλίνει, οπότε η σειρά συγκλίνει.

9. Η $\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+5)}\,dx$ συγκλίνει, οπότε η σειρά συγκλίνει. **11.** Η $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$ συγκλίνει, οπότε η σειρά συγκλίνει.

13. $\frac{1}{n^3+8n} \leq \frac{1}{n^3}$, οπότε η σειρά συγκλίνει. **17.** $\frac{1}{n2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, οπότε η σειρά συγκλίνει.

19. $\frac{1}{n^{1/3}+2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, οπότε η σειρά συγκλίνει. **21.** $\frac{4}{m!+4^m} \leq 4\left(\frac{1}{4}\right)^m$, οπότε η σειρά συγκλίνει.

23. $0 \leq \frac{\sin^2 k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$, οπότε η σειρά συγκλίνει. **25.** $\frac{2}{3^n+3^{-n}} \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$, οπότε η σειρά συγκλίνει.

27. $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n^2}$, οπότε η σειρά συγκλίνει. **29.** $\frac{\ln n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ για $n \geq 1$, οπότε η σειρά συγκλίνει.

31. $\frac{(\ln n)^{100}}{n^{1.1}} \leq \frac{1}{n^{1.09}}$ για n αρκετά μεγάλο, οπότε η σειρά συγκλίνει.

33. $\frac{n}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ για $n \geq 1$, οπότε η σειρά συγκλίνει.

37. Η σειρά συγκλίνει. **39.** Η σειρά αποκλίνει. **41.** Η σειρά συγκλίνει. **43.** Η σειρά αποκλίνει.

45. Η σειρά συγκλίνει. **47.** Η σειρά συγκλίνει. **49.** Η σειρά αποκλίνει. **51.** Η σειρά συγκλίνει.

53. Η σειρά αποκλίνει. **55.** Η σειρά συγκλίνει. **57.** Η σειρά αποκλίνει. **59.** Η σειρά αποκλίνει.

61. Η σειρά αποκλίνει. **63.** Η σειρά συγκλίνει. **65.** Η σειρά αποκλίνει. **67.** Η σειρά αποκλίνει.

69. Η σειρά συγκλίνει. **71.** Η σειρά συγκλίνει. **73.** Η σειρά αποκλίνει. **75.** Η σειρά συγκλίνει.

77. Η σειρά συγκλίνει για $a > 1$ και αποκλίνει για $a \leq 1$. **79.** Η σειρά συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

87. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5} \approx 1.0369277551$

91. $\displaystyle\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2} = 1.6439345667$ και $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2(n+1)} = 1.6448848903$. Το δεύτερο άθροισμα αποτελεί καλύτερη προσέγγιση του $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1.6449340668$.

Ενότητα 10.4 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Παράδειγμα: $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ **2.** (β) **3.** Όχι **4.** $|S - S_{100}| < 10^{-3}$ και το S είναι μεγαλύτερο από το S_{100}.

Ενότητα 10.4 Ασκήσεις

3. Συγκλίνει υπό συνθήκη **5.** Συγκλίνει απολύτως **7.** Συγκλίνει απολύτως **9.** Συγκλίνει υπό συνθήκη

11.

n	S_n	n	S_n
1	1	6	0.899782407
2	0.875	7	0.902697859
3	0.912037037	8	0.900744734
4	0.896412037	9	0.902116476
5	0.904412037	10	0.901116476

13. $S_5 = 0.947$ **15.** $S_{44} = 0.06567457397$ **17.** Συγκλίνει (από τη γεωμετρική σειρά)

19. Συγκλίνει (από το κριτήριο σύγκρισης ορίων) **21.** Συγκλίνει (από το κριτήριο σύγκρισης ορίων)

23. Αποκλίνει (από το κριτήριο σύγκρισης ορίων) **25.** Συγκλίνει (από τη γεωμετρική σειρά και τη γραμμικότητα)

27. Συγκλίνει απολύτως (από το κριτήριο του ολοκληρώματος)

29. Συγκλίνει (από το κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς)

31. Συγκλίνει (από το κριτήριο του ολοκληρώματος) **33.** Συγκλίνει υπό συνθήκη

Ενότητα 10.5 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. (α) $|r|$ (β) $|c|^{1/n}|r|$ **2.** (α) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ (β) Τίποτα **3.** Ναι στην πρώτη περίπτωση, όχι στη δεύτερη.
4. Ναι στην πρώτη περίπτωση, όχι στη δεύτερη.

Ενότητα 10.5 Ασκήσεις

1. Συγκλίνει απολύτως **3.** Συγκλίνει απολύτως **5.** Το κριτήριο του λόγου είναι ασαφές **7.** Αποκλίνει

9. Συγκλίνει απολύτως **11.** Συγκλίνει απολύτως **13.** Αποκλίνει **15.** Το κριτήριο του λόγου είναι ασαφές

17. Συγκλίνει απολύτως **19.** Συγκλίνει απολύτως **21.** $\rho = \frac{1}{3} < 1$ **23.** $\rho = 2|x|$ **25.** $\rho = |r|$ **27.** Συγκλίνει

29. Συγκλίνει απολύτως

31. Το κριτήριο του λόγου είναι ασαφές, οπότε η σειρά μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει. **33.** Συγκλίνει απολύτως

35. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-p}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-p/n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-p\left(\frac{\ln n}{n}\right)} = e^{-p\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}\right)} = e^0 = 1$. Επομένως, το κριτήριο της ρίζας είναι ασαφές.

37. Συγκλίνει απολύτως **39.** Συγκλίνει απολύτως **41.** Συγκλίνει απολύτως

43. Συγκλίνει (από τη γεωμετρική σειρά και τη γραμμικότητα) **45.** Αποκλίνει (από το κριτήριο της απόκλισης)

47. Συγκλίνει (από το κριτήριο της άμεσης σύγκρισης) **49.** Αποκλίνει (από το κριτήριο της άμεσης σύγκρισης)

51. Συγκλίνει (από το κριτήριο του λόγου) **53.** Συγκλίνει (από το κριτήριο σύγκρισης ορίων)

55. Αποκλίνει (από τη σειρά p) **57.** Συγκλίνει (από τη γεωμετρική σειρά)

59. Συγκλίνει (από το κριτήριο σύγκρισης ορίων) **61.** Αποκλίνει (από το κριτήριο της απόκλισης)

65. (β) $\sqrt{2\pi} \approx 2.50663$

n	$\frac{e^n n!}{n^{n+1/2}}$
1000	2.506837
1500	2.506768
2000	2.506733
2500	2.506712
3000	2.506698

Ενότητα 10.6 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ναι. Η σειρά πρέπει να συγκλίνει και για $x = 4$ και για $x = -3$. **2.** (α), (γ) **3.** $R = 4$

4. $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$, $R = 1$

Ενότητα 10.6 Ασκήσεις

1. $R = 2$. Δεν συγκλίνει στα άκρα. **3.** $R = 3$ και για τις τρεις σειρές. **9.** $(-1, 1)$ **11.** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ **13.** $[-1, 1]$

15. $(-\infty, \infty)$ **17.** $(-\infty, \infty)$ **19.** $(-1, 1]$ **21.** $(-1, 1)$ **23.** $[-1, 1)$ **25.** $(2, 4)$ **27.** $(6, 8)$ **29.** $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

31. $(-\infty, \infty)$ **33.** $\left(2 - \frac{1}{e}, 2 + \frac{1}{e}\right)$ **35.** $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ στο διάστημα $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ **37.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$ στο διάστημα $(-3, 3)$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$ στο διάστημα $(-1, 1)$ **41.** $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3nx^{3n-1}$

43. (α) $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{3n-3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|^{3(n+1)-3}}{n|x|^{3n-3}} = |x|^3$.

Προκύπτει ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι 1.

(β) Πολλαπλασιάζοντας τους όρους μεταξύ τους, βρίσκουμε ότι

$(f(x))^2 = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^3 + x^6 + x^9 + x^6 + x^9 + x^9 + \cdots = 1 + 2x^3 + 3x^6 + 4x^9 + \cdots$.

Αναπτύσσοντας την $h(x)$ έως $n = 4$, έχουμε $h(x) = 1 + 2x^3 + 3x^6 + 4x^9 + \cdots$.

47. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-5)^n$ στο διάστημα $(4, 6)$ **51.** (γ) $S_4 = \frac{69}{640}$ και $|S - S_4| \approx 0.000386 < a_5 = \frac{1}{1920}$

53. $R = 1$ **55.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ **57.** $F(x) = \frac{1 - x - x^2}{1 - x^3}$ **59.** $-1 \le x \le 1$ **61.** $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

63. Το N πρέπει να είναι τουλάχιστον 5, $S_5 = 0.3680555556$

65. $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

Ενότητα 10.7 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $T_3(x) = 9 + 8(x-3) + 2(x-3)^2 + 2(x-3)^3$

2. Το πολυώνυμο που έχει σχεδιαστεί στα δεξιά είναι πολυώνυμο Maclaurin. **3.** Ένα πολυώνυμο Maclaurin δινει την τιμή $f(0)$ ακριβώς.

4. Η σωστή πρόταση είναι η (β): $|T_3(2) - f(2)| \le \frac{2}{3}$.

Ενότητα 10.7 Ασκήσεις

1. $T_2(x) = x, T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ **3.** $T_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2, T_3(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2 - \frac{1}{81}(x-2)^3$

5. $T_2(x) = 75 + 106(x-3) + 54(x-3)^2, T_3(x) = 75 + 106(x-3) + 54(x-3)^2 + 12(x-3)^3$

7. $T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2, T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

9. $T_2(x) = x, T_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$ **11.** $T_2(x) = 2 - 3x + \frac{5x^2}{2}, T_3(x) = 2 - 3x + \frac{5x^2}{2} - \frac{3x^3}{2}$

13. $T_2(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{1}{2e}(x-1)^2, T_3(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{1}{2e}(x-1)^2 - \frac{1}{6e}(x-1)^3$

15. $T_2(x) = (x-1) - \frac{3(x-1)^2}{2}, T_3(x) = (x-1) - \frac{3(x-1)^2}{2} + \frac{11(x-1)^3}{6}$

17. $f(1) = p + q + r, f'(1) = 2p + q, f''(1) = 2p$, επομένως

$T_2(x) = (p+q+r) + (2p+q)(x-1) + \frac{2p}{2}(x-1)^2 = (p+q+r-2p-q+p) + (2p+q-2p)x + px^2 = px^2 + qx + r = f(x)$.

19. Έστω $f(x) = e^x$. Τότε για κάθε n

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \text{και} \quad f^{(n)}(0) = 1$$

Προκύπτει ότι

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

23. $T_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$ **25.** $T_n(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{e(x-1)^n}{n!}$

27. $T_n(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \cdots + (-1)^n(n+1)(x-1)^n$

29. $T_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \cdots$ Γενικά, ο συντελεστής του $(x - \pi/4)^n$ είναι

$$\pm\frac{1}{(\sqrt{2})n!}$$

με το μοτίβο προσήμων $+, -, -, +, +, -, -, \ldots$.

31. $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \left|f(-0.5) - T_2(-0.5)\right| \approx 0.018469$

33. $T_2(x) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{5}{9}(x-1)^2, |f(1.2) - T_2(1.2)| \approx 0.00334008$

35. $T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3, 1 \le c \le 2.9$ **37.** $\frac{e^{1.1}|1.1|^4}{4!}$

39. $T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, μέγιστο σφάλμα $= \frac{(0.25)^6}{6!}$

41. $T_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{3}{256}(x-4)^2 - \frac{5}{2048}(x-4)^3$, μέγιστο σφάλμα $= \frac{35(0.3)^4}{65,536}$

43. $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3}, T_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{24}$, με $K = 5$,

$$\left|T_3\left(\frac{1}{2}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{2}\right| \le \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} = \frac{5}{384}$$

45. $K = 6.25$ είναι αποδεκτό. **47.** $n = 4$ **49.** $n = 6$ **53.** $n = 4$ **57.** $T_{4n}(x) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$

59. Στο $a = 0$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= -4 - x \\ T_2(x) &= -4 - x + 2x^2 \\ T_3(x) &= -4 - x + 2x^2 + 3x^3 = f(x) \\ T_4(x) &= T_3(x) \\ T_5(x) &= T_3(x) \end{aligned}$$

Στο $a = 1$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 12(x-1) \\ T_2(x) &= 12(x-1) + 11(x-1)^2 \\ T_3(x) &= 12(x-1) + 11(x-1)^2 + 3(x-1)^3 \\ &= -4 - x + 2x^2 + 3x^3 = f(x) \\ T_4(x) &= T_3(x) \\ T_5(x) &= T_3(x) \end{aligned}$$

61. $T_2(t) = 60 + 24t - \frac{3}{2}t^2$, η απόσταση του φορτηγού από τη διασταύρωση μετά 4 s είναι ≈ 132 m.

63. (α) $T_3(x) = -\frac{k}{R^3}x + \frac{3k}{2R^5}x^3$

71. $T_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$, το σφάλμα είναι περίπου $|0.461458 - 0.461281| = 0.000177$.

73. (β) $\int_0^{1/2} T_4(x)\,dx = \frac{1841}{3840}$, φράγμα σφάλματος:

$$\left| \int_0^{1/2} \cos x\,dx - \int_0^{1/2} T_4(x)\,dx \right| < \frac{(\frac{1}{2})^7}{6!}$$

75. (α) $T_6(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^6$

Ενότητα 10.8 Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. $f(0) = 3$ και $f'''(0) = 30$ **2.** $f(-2) = 0$ και $f^{(4)}(-2) = 48$

3. Αντικαθιστούμε με x^2 το x στη σειρά Maclaurin για το $\sin x$. **4.** $f(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n(n+1)}$ **5.** (γ)

Ενότητα 10.8 Ασκήσεις

1. $f(x) = 2 + 3x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots$ **3.** $\frac{1}{(1+10x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-10)^n x^n$ στο διάστημα $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$

5. $\cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n x^{2n}}{(2n)!}$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ **7.** $\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$

9. $\ln(1 - x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ στο διάστημα $(-1, 1)$ **11.** $\tan^{-1}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$ στο διάστημα $[-1, 1]$

13. $e^{x-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^2 n!}$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ **15.** $\ln(1 - 5x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n}$ στο διάστημα $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$

17. $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$ **19.** $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$

21. $\frac{\sin x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^4}{6} + \cdots$ **23.** $(1+x)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 + \cdots$

25. $e^x \tan^{-1} x = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$ **27.** $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$ **29.** $1 + \frac{x^4}{2}$

31. $\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x-1)^n$ στο διάστημα $(0, 2)$ **33.** $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-5)^n}{4^{n+1}}$ στο διάστημα $(1, 9)$

35. $21 + 35(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$

37. $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) \frac{(x-4)^n}{4^{n+2}}$ στο διάστημα $(0, 8)$

39. $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2^{n+1}-1)}{2^{2n+3}} (x-3)^n$ στο διάστημα $(1, 5)$ **41.** $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4)^n x^{2n}}{(2n)!}$

47. $S_4 = 0.1822666667$ **49.** (α) 5 (β) $S_4 = 0.7474867725$

51. $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)}$, $S_3 = 0.9045227920$ **53.** $\int_0^1 e^{-x^3}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(3n+1)}$, $S_5 = 0.8074461996$

55. $\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!2n}$ **57.** $\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ **59.** $\frac{1}{1+2x}$

61. $\cos \pi = -1$ **67.** e^{x^3} **69.** $1 - 5x + \sin 5x$ **71.** $\frac{1}{(1-2x)(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - 1\right) x^n$

73. $I(t) = \frac{V}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(\frac{Rt}{L}\right)^n$ **75.** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}$ και $f^{(6)}(0) = -360$

77. $e^{x^{20}} = 1 + x^{20} + \frac{x^{40}}{2} + \cdots$

79. Όχι

n	Τιμή σειράς όταν $x = 2$
5	2.54297
10	-0.239933
15	41.9276
20	-764.272
25	16,595.8

85. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{1}{120}$ **87.** $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x^2)}{x^4} - \frac{\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$ **89.** (α) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ (β) 1 (γ) $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

91. $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\cos z + i \sin z - (\cos(-z) + i \sin(-z))}{2i} = \frac{\cos z + i \sin z - \cos z + i \sin z}{2i} = \frac{2i \sin z}{2i} = \sin z$

93. (γ) $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ **97.** $L \approx 28.369$

Κεφάλαιο 10 Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

1. (α) $a_1^2 = 4, a_2^2 = \frac{1}{4}, a_3^2 = 0$
(β) $b_1 = \frac{1}{24}, b_2 = \frac{1}{60}, b_3 = \frac{1}{240}$
(γ) $a_1 b_1 = -\frac{1}{12}, a_2 b_2 = -\frac{1}{120}, a_3 b_3 = 0$
(δ) $2a_2 - 3a_1 = 5, 2a_3 - 3a_2 = \frac{3}{2}, 2a_4 - 3a_3 = \frac{1}{12}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(5a_n - 2a_n^2) = 2$ **5.** $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^2$ **7.** Το $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n a_n$ δεν υπάρχει. **9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}\right) = 0$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n^2} = 1$ **13.** Η ακολουθία αποκλίνει. **15.** $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^{-1}\left(\frac{n+2}{n+5}\right) = \frac{\pi}{4}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right) = \frac{1}{2}$ **19.** $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{3m} = e^3$ **21.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\big(\ln(n+1)-\ln n\big)\right) = 1$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ **27.** $S_4 = -\frac{11}{60}, S_7 = \frac{41}{630}$ **29.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{4}{3}$ **31.** $S = \frac{4}{37}$ **33.** $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}\dfrac{2^{n+3}}{3^n} = 36$

35. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - 2^n, b_n = 2^n - 1$ **37.** $S = \frac{47}{180}$ **39.** Η σειρά αποκλίνει.

41. $\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+2)(\ln(x+2))^3}\,dx = \frac{1}{2(\ln(3))^2}$, οπότε η σειρά συγκλίνει. **43.** $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, οπότε η σειρά συγκλίνει.

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ συγκλίνει, οπότε η σειρά συγκλίνει. **47.** $\frac{n}{\sqrt{n^5+5}} < \frac{1}{n^{3/2}}$, οπότε η σειρά συγκλίνει.

49. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n$ συγκλίνει, οπότε η σειρά συγκλίνει. **51.** Συγκλίνει

55. (α) $0.3971162690 \leq S \leq 0.3971172688$, οπότε το μέγιστο μέγεθος του σφάλματος είναι 10^{-6}.

57. Συγκλίνει απολύτως **59.** Αποκλίνει **61.** (α) 500 (β) $K \approx \sum\limits_{k=0}^{499}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0.9159650942$

63. (α) Συγκλίνει (β) Συγκλίνει (γ) Αποκλίνει (δ) Συγκλίνει **65.** Συγκλίνει **67.** Συγκλίνει **69.** Αποκλίνει

71. Αποκλίνει **73.** Συγκλίνει **75.** Συγκλίνει **77.** Συγκλίνει (από τη γεωμετρική σειρά)

79. Συγκλίνει (από τη γεωμετρική σειρά) **81.** Συγκλίνει (από το κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς)

83. Συγκλίνει (από το κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς) **85.** Αποκλίνει (από το κριτήριο της απόκλισης)

87. Συγκλίνει (απολύτως, από άμεση σύγκριση με τη σειρά p $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ **89.** Συγκλίνει (από το κριτήριο της ρίζας)

91. Συγκλίνει (από το κριτήριο της άμεσης σύγκρισης)

93. Συγκλίνει χρησιμοποιώντας μερικά αθροίσματα (η σειρά είναι τηλεσκοπική)

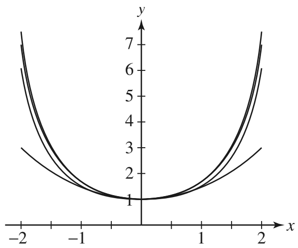
95. Αποκλίνει (από το κριτήριο της άμεσης σύγκρισης) **97.** Συγκλίνει (από το κριτήριο της άμεσης σύγκρισης)

99. Συγκλίνει (από το κριτήριο σύγκρισης ορίων) **101.** Συγκλίνει στο διάστημα $(-\infty, \infty)$

103. Συγκλίνει στο διάστημα $[2, 4]$ **105.** Συγκλίνει στο $x = 0$

107. $\frac{2}{4-3x} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n x^n$. Η σειρά συγκλίνει στο διάστημα $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

109. (γ)



111. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{\cos x - 1} = -2$ **113.** $T_3(x) = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

115. $T_4(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4$ **117.** $T_4(x) = x - x^3$

119. $T_n(x) = 1 + 3x + \frac{1}{2!}(3x)^2 + \frac{1}{3!}(3x)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(3x)^n$

121. $T_3(1.1) = 0.832981496$, $\left|T_3(1.1) - \tan^{-1}1.1\right| = 2.301 \times 10^{-7}$ **123.** $n = 11$ είναι αρκετό.

125. Το n-οστό πολυώνυμο Maclaurin για τη $g(x) = \frac{1}{1+x}$ είναι $T_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n$.

127. $e^{4x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}x^n$ **129.** $x^4 = 16 + 32(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$

131. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **133.** $\frac{1}{1-2x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}}(x+2)^n$ **135.** $\ln\frac{x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n2^n}$

137. $(x^2 - x)e^{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x^{2n+2} - x^{2n+1}}{n!})$, οπότε $f^{(3)}(0) = -6$

139. $\frac{1}{1+\tan x} = 1 - x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \cdots$, οπότε $f^{(3)}(0) = -8$

141. $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2^3 3!} + \frac{\pi^5}{2^5 5!} - \frac{\pi^7}{2^7 7!} + \cdots = \sin\frac{\pi}{2} = 1$