

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΕΙΤΕ ΜΑΣ ΑΡΕΣΕΙ είτε όχι, στην καθημερινή μας ζωή όλοι μας είμαστε αναγκασμένοι να ασχοληθούμε με τον έναν ή τον άλλον τρόπο έστω και λίγο με τα Μαθηματικά. Αδύνατο να το αποφύγουμε, αν και οι περισσότεροι τα φοβούνται ή ακόμη και τα αντιπαθούν θεωρώντας ότι είναι κάτι το οποίο δεν μπορούν να αντιληφθούν καθαρά.

Εμείς –οι πλοηγοί αυτού του βιβλίου– συγκαταλεγόμαστε στους τυχερούς που από μικρή ηλικία αγαπήσαμε τα Μαθηματικά. Ο Γιάννης (που αναφέρεται στο εξώφυλλο, πιο τυπικά, ως Ιωάννης) υπήρξε ιδιαίτερα τυχερός, αφού ήταν από τους λίγους που από πολύ μικρός φάνηκε να καταλαβαίνει τα Μαθηματικά. Η Anne νόμιζε το ίδιο για τον εαυτό της, μέχρι που τα πράγματα μπερδεύτηκαν μέσα της όταν ήταν μαθήτρια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Και όπως φάνηκε αργότερα, μόλις στα είκοσί της άρχισε να καταλαβαίνει κάποιες από τις πιο θεμελιώδεις όψεις των Μαθηματικών. Τώρα, στα εξήντα της, είναι ξεκάθαρο ότι έχει ακόμη πολλά να μάθει και το επιδιώκει! Επίσης και η Άννα –η εξαιρετική μας εικονογράφος– βλέπει τον εαυτό της να εξελίσσεται σε ένα ιδιαίτερα μνημένο στα Μαθηματικά άτομο από την εποχή που ήταν και αυτή μαθήτρια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Παρά τις όποιες αποτυχίες τους, και η Anne και η Άννα πάντοτε απολάμβαναν το παιχνίδι με τους αριθμούς. Ξέρουμε βέβαια πολύ καλά ότι για πολλούς αυτό δεν είναι ο κανόνας. Για όλους αυτούς τους πολλούς λοιπόν έχουμε γράψει αυτό το βιβλίο.

Έχοντας αφιερώσει πολλά χρόνια –περισσότερα από όσα μπορούμε να θυμηθούμε– στο να παρατηρούμε τα παιδιά να πασχίζουν με τα Μαθηματικά, είμαστε πεπεισμένοι πλέον ότι πολλά παιδιά τα φοβούνται και τα μισούν επειδή ποτέ τους δεν τα κατάλαβαν πραγματικά. Ένας από τους λόγους είναι ότι στο παρελθόν η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν γινόταν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Το να πάρουμε 2 μήλα από ένα πιάτο που έχει συνολικά 6 είναι κάτι εύκολο ($6 - 2 = \square$), όμως τι στο καλό σημαίνει το $\square + 3 = 5$ ή το $7 - (-9) = \square$;

Μπορεί πολλά από όσα γνωρίζετε για τον τρόπο που λειτουργούν οι αριθμοί, οι μετρήσεις, τα σχήματα να μην είναι λάθος. Όμως, ίσως να είναι στενός



ο τρόπος που βλέπετε τα πράγματα και αυτό περιορίζει τη σκέψη σας, ακριβώς όπως συνέβη και στην περίπτωση της Anne. Είναι σαν να σας ζητάμε να ρίξετε μια ματιά έξω από το παράθυρό σας. Οπωσδήποτε βλέπετε αρκετά πράγματα. Όμως, αν υπήρχε η δυνατότητα να δείτε και μέσα από τους τοίχους, τότε σίγουρα το οπτικό σας πεδίο θα ήταν πολύ πολύ μεγαλύτερο.

Το βιβλίο αυτό μας πάει πίσω, στα πρώτα βήματα των σχολικών Μαθηματικών. Ένα μέρος του ίσως σας φανεί οικείο. Αλλά υποψιαζόμαστε ότι –όπως συνέβη με την Anne και την Άννα– θα κάνετε επίσης μερικές ενδιαφέρουσες ανακαλύψεις καθώς το

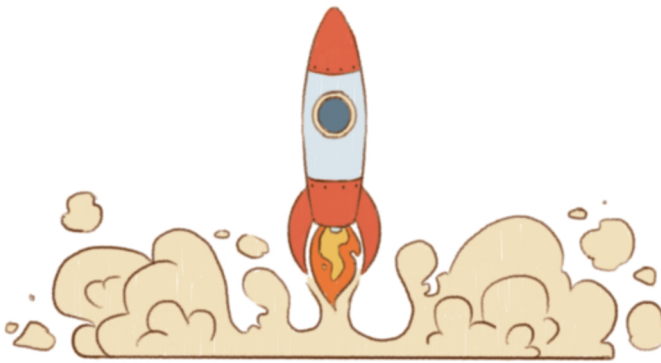
διαβάζετε. Πρόθεσή μας είναι να προσλάβουν και να αγαπήσουν τα Μαθηματικά μέσω αυτού του βιβλίου όσο το δυνατόν περισσότεροι άνθρωποι. Γι' αυτό, αποφασίσαμε το βιβλίο να συμπεριλαμβάνει μεταξύ άλλων ιστορίες, εικόνες και δραστηριότητες που ελπίζουμε να φανούν ελκυστικές τόσο στους ενήλικες όσο και στα μικρά παιδιά. Πράγματι, ελπίζουμε ότι θα βρείτε πλήθος ευκαιριών που θα τις απολαύσετε μαζί μικροί και μεγάλοι, όλες οι γενιές.

Μπορείτε να διαβάσετε το βιβλίο γραμμικά, από το εξώφυλλο έως το οπισθόφυλλο, ή ίσως να προτιμήσετε να επιλέγετε θέματα από το περιεχόμενό του. Αν νιώσετε άβολα με κάποια μέρη του βιβλίου, μη διστάσετε να τα παραλείψετε. Δεν πειράζει! Ποτέ δεν ξέρετε! Μπορεί αργότερα να αισθανθείτε έτοιμοι να τα αντιμετωπίσετε. Όμως, προς το παρόν, η πρότασή μας είναι να ξεκινήσουμε από την αρχή...

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

ΞΕΚΙΝΩΝΤΑΣ ΑΠΟ ΤΟ ΜΗΔΕΝ ΓΙΑ ΓΟΝΕΙΣ ΚΑΙ ΔΑΣΚΑΛΟΥΣ

ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΚΑΙΡΟ η Anne είχε την εντύπωση ότι το 0 ήταν ένας αδιάφορος και ασήμαντος αριθμός που σημαίνει «τίποτα»: τίποτα στην τσέπη μου, τίποτα δεν είναι κρυμμένο κάτω από το τραπέζι κ.λπ. Όπως και αν το δει κανείς, αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, δεδομένου ότι οι περισσότεροι από εμάς όταν ξεκινούν να μετρούν λένε «ένα, δύο, τρία...». Όμως, αν το σκεφτείτε λιγάκι, όταν εκτοξεύεται ένας πύραυλος, μετρούμε αντίστροφα και τότε το μηδέν (0) γίνεται ένας εξαιρετικά σημαντικός αριθμός!



Φανταστείτε να είχατε «μηδέν» δόντια. Είναι κάτι φυσιολογικό για ένα νεογέννητο, όχι όμως τόσο καλό για έναν ενήλικα! Ή πώς θα αισθανόταν ένα παιδί εάν είχε «μηδέν» χρήματα στον κουμπαρά του...

Και στις δύο περιπτώσεις είναι πολύ πιθανό το μηδέν –0– να σημαίνει κάτι πολύ ουσιαστικό στο μυαλό σας και κάτι που είναι αξιοσημείωτα πε-



ρισσότερο από το «τίποτα». Για την ακρίβεια, σε αυτά τα παραδείγματα το μηδέν αποτελεί την **απουσία από κάτι** που φαντάζει ιδιαίτερα σημαντικό στον νου σας. Τέτοιες χρήσεις του μηδενός, που σχετίζονται με την απουσία από κάτι, μπορούμε να συναντήσουμε στην καθημερινή μας γλώσσα όταν μιλάμε για «μηδενική ανοχή» ή «μηδενική προσπάθεια», ή ακόμη και όταν στη διάρκεια αναμετάδοσης ενός αγώνα ποδοσφαίρου το αποτέλεσμα είναι «τρία-μηδέν».



Η ερμηνεία του 0 ως η «απουσία από κάτι» παρά ως «τίποτα» πιθανόν φαντάζει ως κάτι σχετικά κοινότυπο –και πιθανόν υπερβολικά εξεζητημένο– όταν μαθαίνουμε να μετράμε. Όμως –όπως ελπίζουμε να φανεί στη συνέχεια– το βιβλίο αυτό έχει πρόθεση να βοηθήσει τα μικρά παιδιά να αναπτύξουν στέρεες βάσεις στα Μαθηματικά και όχι να πασχίζουν μάταια μέσα σε μια συνεχή θολούρα ή σύγχυση όταν ασχολούνται με αυτά.

Πριν επιστρέψουμε στο πώς μαθαίνουμε να μετράμε, θέτουμε το εξής ερώτημα: Γιατί άραγε επιθυμούμε τόσο πολύ να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι το 0 σηματοδοτεί περισσότερο την «απουσία από κάτι» παρά το «τίποτα»; Δύο απαντήσεις μάς έρχονται στον νου. Αρχικά, σκεφτείτε το 10. Αν το 0 σημαίνει τίποτα, τότε γιατί δεν γράφουμε 1€ αντί για 10€;

Εν συντομία, το 10 είναι ένας τρόπος να αναπαραστήσουμε το «9 και ακόμη 1» ή, για να το πούμε διαφορετικά, «μία δεκάδα και μηδέν μονάδες». Γνωρίζουμε ότι, για να εξηγηθεί αυτή η διαδικασία στα μικρά παιδιά, κατά καιρούς έχουν χρησιμοποιηθεί πολλοί τρόποι. Άλλοι πιάνουν με λαστιχάκια

όμοιες μικρές ράβδους σε ομάδες των δέκα, άλλοι χρησιμοποιούν μπισκότα σε πακέτα των δέκα, και είμαστε σίγουροι ότι αν σκεφτείτε λίγο θα μπορέσετε να θυμηθείτε ανάλογες τεχνικές που είτε σας ενθάρρυναν οι δικοί σας δάσκαλοι να χρησιμοποιήσετε είτε χρησιμοποιήσατε εσείς ως εκπαιδευτικοί στις τάξεις σας.

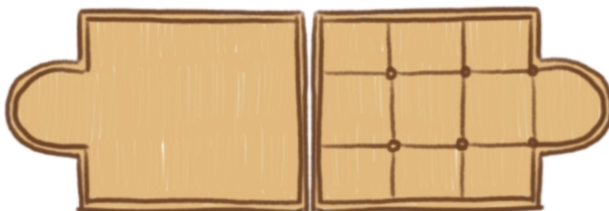
Το μειονέκτημα που βρίσκουμε σε αυτές τις προσεγγίσεις είναι ότι βασίζονται κυρίως στην ικανότητα των παιδιών να θυμούνται πόσες ράβδοι χρειάζεται να ενωθούν σε μια ομάδα και να δεθούν με ένα λάστιχο ή πόσα μπισκότα πρέπει να αποτελέσουν τη μία συσκευασία κ.λπ. Χρειάζομαι 5; Ή μήπως 8; Ή μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός θελήσω; Έχοντας κατά νου αυτό, επινοήσαμε μια δική μας εξεικονιστική αναπαράσταση, η οποία στις σελίδες του βιβλίου θα αποτελεί μέρος των ιστοριών των πρωταγωνιστών. Ξεκινήσαμε με την ιδέα ότι, αν οργανώσεις αντικείμενα όπως στην πρώτη εικόνα δεξιά, σύντομα αντιλαμβάνεσαι ότι εκεί υπάρχουν 9 κύκλοι.



Είναι μια εικόνα που εύκολα τη θυμάσαι και είμαστε σίγουροι ότι, αν τη βλέπουν συχνά οι μικροί μαθητές, από ένα σημείο και μετά θα την αναγνωρίζουν στιγμιαία. Από τη στιγμή που θα εξοικειωθούν με αυτό, τότε θα είναι εξίσου εύκολο να παρατηρήσουν ότι στην επόμενη εικόνα έχει προστεθεί ένας επιπλέον κύκλος που δεν ταιριάζει με την προηγούμενη διάταξη 3×3 .



Θέλοντας να εκμεταλλευθούμε το πλεονέκτημα τέτοιων αναγνωρίσιμων εικόνων επεκτείναμε την ιδέα δημιουργώντας μια ιστορία που εμπλέκει τη συσκευασία βόλων σε ένα κουτί το οποίο ταιριάζει πλήρως με τη διάταξη 3×3 που είδαμε πριν και στην οποία έχει προστεθεί ένας επιπλέον χώρος για τον δέκατο βόλο. Το ονομάζουμε «πακέτο της δεκάδας».



Από τη στιγμή που έχει προστεθεί ο τελικός - δέκατος βόλος, και μόνο τότε, το πακέτο μπορεί να κλείσει. Το κλειστό πακέτο σηματοδοτεί τη μία δεκάδα.



9



9 και 1 ακόμα!

Αν αυτό το επεκτείνουμε, τότε μπορούμε να δούμε γιατί το 40 είναι ισodύναμο με τέσσερις δεκάδες (πακέτα) και μηδέν μονάδες όπως γίνεται φανερό από το γεγονός ότι έχουμε 4 κλειστά γεμάτα «πακέτα της δεκάδας» και ένα ανοικτό άδειο πακέτο δίπλα τους.



Εάν θέλουμε να προσθέσουμε επιπλέον μονάδες στο 40, είναι εύκολο να το κάνουμε αφού στο ανοικτό πακέτο έχουμε τη δυνατότητα να βάλουμε



μέχρι και 9 βόλους χωρίς αυτό να επηρεάζει το πλήθος των δεκάδων. Για παράδειγμα, 40 βόλοι και ακόμη 6 αναπαρίστανται από το 46, όπως φαίνεται από τα 4 κλειστά «πακέτα της δεκάδας» (με 10 βόλους το καθένα μέσα τους) και ακόμη 6 βόλους.

Μια συνηθισμένη δυσκολία των μαθητών, την οποία γνωρίζουμε και από τη βιβλιογραφία, είναι ότι, όταν τους ζητούμε να γράψουν το σαράντα έξι (46), κάποια παιδιά το γράφουν ως 406. Προφανώς ως ενήλικες σας φαίνεται αστείο να το γράψει κανείς με αυτόν τον τρόπο. Αν όμως το σκεφτείτε καλύτερα, ίσως σας φανεί απόλυτα λογικό για ένα μικρό παιδί που διδάχτηκε ότι το σαράντα γράφεται 40 και το έξι γράφεται 6: σαράντα (40) έξι (6) ή αλλιώς 406. Πιστεύουμε όμως ότι, από τη στιγμή που τα παιδιά θα εξοικειωθούν με την ιδέα του «πακέτου της δεκάδας», ύστερα από λίγο τέτοια λάθη θα αποτελούν παρελθόν.

Φυσικά υπάρχουν πολύ περισσότερες προκλήσεις σχετικά με το πώς μαθαίνουμε να μετράμε και τις οποίες θα συζητήσουμε παρακάτω. Όμως, πριν το κάνουμε, ας σχολιάσουμε τον δεύτερο λόγο για τον οποίο είναι σημαντικό οι μικροί μαθητές να αναπτύξουν όσο γίνεται νωρίτερα μια ευρεία και βαθύτερη κατανόηση του μηδενός. Γνωρίζουμε ότι είναι πολύ δύσκολο να μεταβάλει κανείς τις βασικές σκέψεις και ιδέες που απόκτησε από πολύ μικρή ηλικία. Ίσως ο καλύτερος τρόπος να το εξηγήσουμε αυτό είναι να σας ζητήσουμε να θυμηθείτε κάτι που νομίζατε από μικροί ότι είναι αλήθεια και το οποίο αργότερα συνειδητοποιήσατε ότι δεν είναι έτσι. Ένα κλασικό παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η σιγουριά που είχατε ότι οι γονείς σας γνωρίζουν τα πάντα. Ίσως να ήταν κάπως σοκαριστική η διαπίστωση που κάνατε αργότερα ότι αυτό δεν είναι και τόσο αληθές!

Ή, για να εξετάσουμε ένα πιο καθημερινό παράδειγμα, ως μικρά παιδιά συνηθίζατε να πλένετε τα δόντια σας με έναν συγκεκριμένο τρόπο μέχρι που ο οδοντίατρος αργότερα σας συνέστησε να χρησιμοποιείτε συγκεκριμένες τεχνικές για τον σκοπό αυτό. Αν δεν είχατε την αντίστοιχη εμπειρία, τότε μπορείτε να βασιστείτε στην εμπειρία της Anne που βρήκε ιδιαίτερα προκλητική την αλλαγή της καθημερινής ρουτίνας στη στοματική της υγιεινή έπειτα από κάποια χρόνια που ακολουθούσε μian άλλη προσέγγιση! Και σημειώνουμε εδώ ότι οι γονείς της Anne είχαν υψηλό αίσθημα ευθύνης και έκαναν ό,τι καλύτερο μπορούσαν προκειμένου να της διδάξουν πώς να πλένει τα δόντια της. Την εποχή εκείνη που τα δόντια της ήταν λιγότερα απ' ό,τι τώρα, λίγα πράγματα γνώριζε η Anne για τις βλαβερές συνέπειες της τσίχλας, οι οδοντόβουρτσες ήταν λιγότερο επιτηδευμένες και αναμφίβολα υπήρχαν και άλλοι λόγοι που έκαναν τους γονείς –και πιθανόν και την ίδια– να θέλουν να κάνουν την όλη διαδικασία όσο το δυνατόν ευκολότερη.

Η συνειδητοποίηση της Anne ότι το 0 σημαίνει πολύ περισσότερα από το «τίποτα» ήταν πολύ μεγαλύτερο σοκ από την αποκάλυψη του οδοντίατρου ότι δεν καθαρίζει τα δόντια της με τον σωστό τρόπο.

Παρόλο που γνώριζε την αιτία για αυτές τις απαραίτητες αλλαγές σε σχέση με τον προηγούμενο τρόπο σκέψης της (ότι δηλαδή το μηδέν σήμαινε απλά το «τίποτα») ή της διαδικασίας που ακολουθούσε (όπως το πώς να καθαρίζει τα δόντια της χρησιμοποιώντας μια απλή αντί μιας ηλεκτρικής οδοντόβουρτσας), δεν της ήταν εύκολο να τα ενσωματώσει στον τρόπο που καθημερινά χρησιμοποιούσε αριθμούς ή καθάριζε τα δόντια της! Αυτό θα το πετύχαινε ευκολότερα αν είχε από πολύ νωρίς στέρεη γνώση και κατανόηση είτε για τους αριθμούς είτε για την υγιεινή των δοντιών της.

Σε έναν ιδανικό κόσμο, θα συνομιλούσαμε ξεχωριστά με τον καθένα σας και θα επιχειρούσαμε να ανακαλύψουμε πώς σκέφτεστε και αισθάνεστε για τα Μαθηματικά. Έτσι θα εξατομικεύαμε την προσέγγισή μας σαν να ήμασταν οι απόλυτα αποφασιστικές και με πλήρη κατανόηση μαθηματικές διάνοιες, που γνωρίζουν όλα όσα πρέπει να ξέρει κανείς και μπορούν να τα εξηγήσουν με έναν ξεκάθαρο και ευγενικό τρόπο. Δυστυχώς –όπως υποψιαζόμαστε ότι συμβαίνει με τους περισσότερους από τους αναγνώστες μας– δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι γνωρίζουμε τα πάντα, όμως ξέρουμε αρκετά και έχουμε όλη την καλή διάθεση να τα μοιραστούμε μαζί σας!



Οπότε, για να επιστρέψουμε στο μηδέν, θα σας προσφέραμε πολύ κακές υπηρεσίες εάν απλώς σας αφήναμε να πιστεύετε ότι το 0 σημαίνει μόνο την «απουσία από κάτι». Σκεφτείτε, για παράδειγμα, τους 0°C . Γνωρίζουμε ότι αυτό σημαίνει πως έξω έχει αρκετό κρύο, όμως προφανώς δεν μας λέει ότι υπάρχει απουσία θερμοκρασίας!

Το επόμενο παράδειγμα σίγουρα συγκαταλέγεται σε ανάλογη εμπειρία σας σε έναν ανελκυστήρα:



Όροφος 0 σίγουρα υπάρχει! Σε πολλές χώρες βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τον δρόμο, και ο όροφος -1 είναι στο υπόγειο, ενώ ο επόμενος προς τα πάνω όροφος δηλώνεται στον ανελκυστήρα ως 1.

Επίσης ιδιαίτερα σχετικό παράδειγμα, οικείο για γονείς με νεογέννητο βρέφος, είναι το γεγονός ότι υπάρχει μεγάλη κίνηση,

ευθυμία και χαρούμενη αναστάτωση στο σπίτι στα πρώτα του γενέθλια! Το βρέφος υπάρχει ήδη πολύ πριν από το 1. Μια ακόμη υπενθύμιση ότι η μέτρηση δεν ξεκινάει από το 1. Είναι πέρα από τις προθέσεις του βιβλίου αυτού να συζητήσουμε όλο το εύρος της σημασίας του μηδενός. Αρκεί να πούμε ότι βάζετε ένα λιθαράκι επιτυχίας κάθε φορά που εισάγετε ένα μικρό παιδί σε ένα εύρος μαθηματικών δυνατοτήτων όπως αυτές που συζητήσαμε πιο πριν.

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα, αφιερώστε λίγο χρόνο στο να σκεφτείτε πού έχετε συναντήσει το 0 στην καθημερινή σας ζωή. Σε ποιες περιπτώσεις σημαίνει την απουσία από κάτι; Μπορείτε να σκεφτείτε άλλες περιπτώσεις όπου λειτουργεί ως ένας σημαντικός δείκτης όπως στο θερμόμετρο; Σκεφτείτε για λίγο τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους παρουσιάζεται το 0. Για παράδειγμα, το βλέπουμε πάντα να είναι παρόν σε μια οριζόντια αναπαράσταση όπως στην αριθμογραμμή;



Πού πιθανόν θα
το συναντούσατε ως μέρος
ενός κυκλικού καντράν;

Υπάρχει περίπτωση όπου θα
το βλέπαμε σε μια διαγώνια
αναπαράσταση όπως παρακάτω;



Η σύστασή μας είναι να ενθαρρύνετε τα μικρά παιδιά να αναζητήσουν το 0 στο καθημερινό τους περιβάλλον και μαζί να συζητήσετε σε κάθε περίπτωση τι μπορεί να σημαίνει. Σε όσο περισσότερα σκηνικά συναντάτε το 0 τόσο το καλύτερο, διότι καθένα από αυτά βοηθά στο να αναπτυχθεί η ιδέα ότι το 0 υπηρετεί ένα εύρος λειτουργιών και μπορεί να εμφανίζεται με πολλές διαφορετικές μορφές και προσανατολισμούς.

Ευχάριστες δραστηριότητες

Ένα από τα πιο σημαντικά μηνύματα που θέλουμε να περάσουμε με το βιβλίο αυτό είναι ότι τα Μαθηματικά μπορεί να είναι απαλλαγμένα από άγχος και ταυτόχρονα διασκεδαστικά. Παρακάτω θα βρείτε μερικές ιδέες που αναπτύξαμε για να τις δοκιμάσετε με μικρά παιδιά στο σπίτι ή στο σχολείο. Είναι εστιασμένες στην ιδέα της απουσίας «από κάτι» ή «κάποιου». Δεν είναι απαραίτητο να κάνετε χρήση του όρου «μηδέν», εκτός και αν αισθάνεστε άνετα να το κάνετε. Αυτό που συνιστούμε όμως είναι να γίνει μια συζήτηση σχετικά με το γεγονός ότι παρατηρείτε πως στην κάθε κατάσταση κάτι σημαντικό απουσιάζει. Η ιδέα που βρίσκεται πίσω από κάτι τέτοιο θα γίνει ακόμη πιο ξεκάθαρη στο τέλος του Κεφαλαίου 1.

Πριν παρουσιάσουμε τις δραστηριότητες θα θέλαμε πρώτα να...

Γνωρίσετε τους 6 φίλους



Είμαι ο Luka και είμαι 6 χρονών. Αυτή είναι η αδελφή μου η Emily. Είναι 5 χρονών!



Έχουμε πολλούς φίλους. Να κάποιои από αυτούς:



Sami



Kim



Sky



Carlo

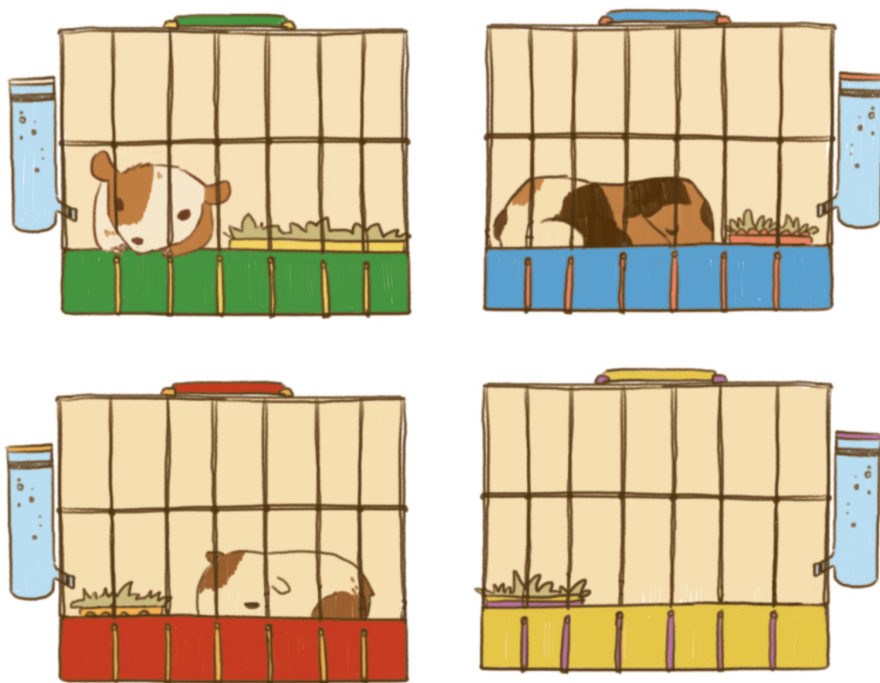
Θα δείτε σε αυτό το βιβλίο ότι είμαστε συνεχώς απασχολημένοι με ένα σωρό ενδιαφέροντα πράγματα. Στις επόμενες σελίδες θα μας συναντήσετε σε αρκετές από τις περιπέτειές μας. Μαζί μας, σε αυτό το κεφάλαιο, θα γνωρίσετε και κάποια από τα κατοικίδια μας. Νομίζουμε ότι θα τα συμπαθήσετε! Είναι και αυτά πολύ απασχολημένα. Όπως θα διαπιστώσετε, χρειαζόμαστε τη βοήθειά σας για να τα φροντίσουμε.

Ελάτε κι εσείς στην παρέα μας!

1: Λείπει!

Γρίφος 1

Ο Carlo έχει ινδικά χοιρίδια μέσα σε κλουβιά. Ένα από αυτά το έσκασε! Μπορείς να το βρεις σε κάποια από τις επόμενες σελίδες; Ελπίζω να τα καταφέρεις!



Ποιο νομίζεις ότι είναι το κλουβί του; Πώς το κατάλαβες;

Γρίφος 2

Ο Luka, η Sky και η Sami βγήκαν για ιππασία με τα άλογά τους. Η Sky όμως έπεσε! Αναρωτιέμαι, πού να πήγε το άλογό της; Μπορείς να το βρεις;



Πόσα άλογα είναι χωρίς καβαλάρη στην παραπάνω εικόνα για να διαλέξει ένα η Sky;

Γρίφος 3

Η Emily ταΐζει τα κουτάβια της, όμως δεν μπορεί να βρει ένα από αυτά. Μπορείς να το βρεις εσύ;

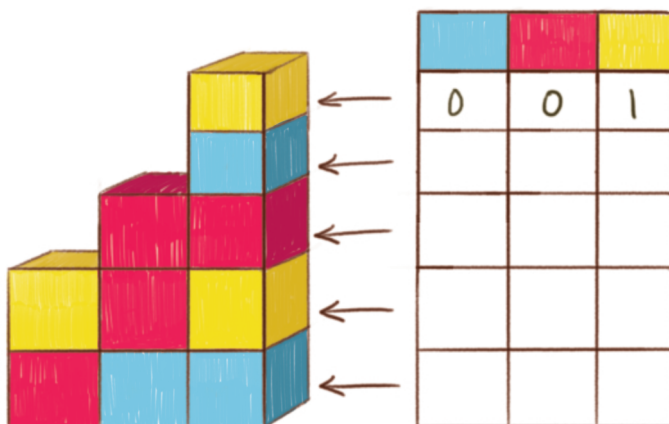


Πόσα κουτάβια στην παραπάνω εικόνα τρώνε από το κόκκινο πιάτο;



2: Πολύχρωμο κτήριο

Η Sami κατασκεύασε έναν πολύχρωμο πύργο χρησιμοποιώντας χρωματιστά τουβλάκια. Σε μερικούς ορόφους χρησιμοποίησε μπλε τουβλάκια ενώ σε άλλους όχι. Γιατί άραγε;



Μπορείς να κατασκευάσεις το δικό σου κτήριο και να συζητήσεις για αυτό με τους φίλους σου;

Σχόλιο

Δεν υπάρχει σωστή απάντηση σε αυτό το ερώτημα, αλλά μπορούμε να δούμε την κατασκευή αυτή σαν μια ευκαιρία να ξεκινήσουμε μια συζήτηση. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε την κατεύθυνση που θα πάρει η συζήτηση, αλλά μπορούμε να φανταστούμε ότι θα περιλαμβάνει φράσεις όπως: «Δεν υπάρχουν...» «Έχει μηδενικό αριθμό από...» κ.λπ.

3: Οι μπανάνες

Ο Kim πήρε μαζί του στο τρένο 3 μπανάνες.

Στη διάρκεια του ταξιδιού άρχισε να τις τρώει μία μία. Αφού έφαγε και την τελευταία μπανάνα, πόσες του έμειναν;



Και τελικά...

Βλέπετε πόσα παραδείγματα μπορείτε να βρείτε όπου το μηδέν παίζει σημαντικό ρόλο; Ποια από αυτά μπορείτε να μοιραστείτε με τα παιδιά σας (ή τους δικούς σας μαθητές);

Παραθέτουμε αρκετές δραστηριότητες σχετικές με το μηδέν, όμως τις συμπεριλάβαμε στο τέλος του επόμενου κεφαλαίου. Θεωρούμε ότι είναι πιο κατάλληλη στιγμή να τις δοκιμάσετε με τα παιδιά αφού πρώτα έχουν αρχίσει να μετρούν.



Μελετώντας λίγο περισσότερο το μηδέν

A – Η γέννηση του μηδενός

Η ιδέα του μηδενός επινοήθηκε πολύ αργότερα αφότου οι άνθρωποι άρχισαν να μετρούν. Αυτό δυσκόλεψε τους κατοίκους, μεταξύ άλλων περιοχών και της αρχαίας Βαβυλώνας. Σήμερα χρησιμοποιούμε τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9, όμως, σε αντίθεση με εμάς, οι Βαβυλώνιοι είχαν μόνο ένα σύμβολο, τη σφήνα Υ . Το χρησιμοποιούσαν για να αναπαραστήσουν το 1, το 60 ή το 3600. Εικάζουμε ότι θα ήταν σχετικά εύκολο να πει κανείς σε ποιον από τους τρεις αριθμούς αναφερόταν κάποιος με βάση το περιεχόμενο της συζήτησης. Για παράδειγμα, εάν συζητούσαν για τα αστέρια στον ουρανό, το σύμβολο μάλλον αναφερόταν στο 3600. Εάν όμως η συζήτηση περιστρεφόταν γύρω από το πόσα μπιζέλια είχαν στο μεσημεριανό πιάτο, το πιο πιθανό είναι το σύμβολο να αναφερόταν στο 60.

Η ζωή όμως έγινε ακόμη πιο πολύπλοκη όταν θέλησαν να γίνουν περισσότερα ακριβείς.

Για παράδειγμα, το σύμβολο $\Upsilon\Upsilon$ θα μπορούσε να σημαίνει 61 ($60 + 1$) ή 3660 ($3600 + 60$) ή 3601 ($3600 + 1$). Συνειδητοποίησαν λοιπόν ότι υπήρχε πρόβλημα, και η επινοήση του μηδενός ήταν η λύση στο πρόβλημα αυτό. Έτσι, γύρω στο 300 π.Χ. άρχισαν να χρησιμοποιούν δύο κεκλιμένες σφήνες $\nearrow \nwarrow$ που αναπαριστούσαν ένα κενό διάστημα διευκολύνοντας έτσι τη σωστή ερμηνεία των αριθμών και τη διάκριση μεταξύ του 61 ($\Upsilon\Upsilon$: $60 + 1$) και του 3601 ($\Upsilon \nearrow \nwarrow \Upsilon$: $3600 + 0 + 1$). Έτσι, το μηδέν γεννήθηκε από την ανάγκη να δώσουμε νόημα σε μια ακολουθία ψηφίων με μοναδικό τρόπο.

Β – Φαίνεται παράδοξο

Το 0 είναι ένας αριθμός και έχει πολύ συγκεκριμένη αξία, όμως μερικές φορές τον χρησιμοποιούμε κατά τρόπο που δείχνει ακριβώς το αντίθετο. Η θέση του στην αριθμογραμμή είναι ακριβώς πριν από το 1.



Αν όμως παρατηρήσετε προσεκτικά το πληκτρολόγιο του υπολογιστή σας, θα διαπιστώσετε ότι το 0 είναι τοποθετημένο μετά το 9! Το ίδιο θα διαπιστώσετε και στο smartphone σας, και στην αριθμομηχανή σας, και στο τηλεχειριστήριο της τηλεόρασής σας. Νομίζετε ότι κάτι τέτοιο θα μπορούσε να μπερδέψει τα παιδιά; Πώς είναι δυνατόν το 0 –που είναι μικρότερο από το 1– να τοποθετηθεί σε θέση που αφήνει να εννοηθεί ότι είναι μεγαλύτερο από το 9; Από τη μαθηματική σκοπιά μόνο μία θέση υπάρχει για το 0 πάνω στην αριθμογραμμή και αυτή είναι ακριβώς πριν από το 1. Καμία άλλη θέση δεν έχει νόημα. Υπάρχει ωστόσο μια ενδιαφέρουσα εύλογη εξήγηση για το ότι τοποθετούμε το 0 μετά το 9 σε ένα πληκτρολόγιο, και η εξήγηση αυτή δεν είναι μαθηματική. Στις γραφομηχανές τοποθετούσαν το 0 μετά το 9 γιατί συνήθως ακολουθεί άλλους αριθμούς –για παράδειγμα, στο 40, στο 90 κ.λπ.– και έτσι η πληκτρολόγησή τους γίνεται ευκολότερα και γρηγορότερα. Με την πάροδο του χρόνου και την εμφάνιση των πληκτρολογίων του υπολογιστή και των smartphones, η θέση αυτή του μηδενός ήταν ήδη εδραιωμένη και αποτελούσε αποδεκτή σύμβαση, η οποία εξακολουθεί πρακτικά να μας διευκολύνει να πληκτρολογήσουμε πολύ πιο γρήγορα μεγάλους αριθμούς.



Γ – Μηδέν: Ένας άτακτος αριθμός!

Ο Γιάννης (ο άλλος από τους συγγραφείς αυτού του βιβλίου) κάποιες φορές περιγράφει το μηδέν στους φοιτητές του και μελλοντικούς δασκάλους ως τον «άτακτο αριθμό», και εξηγεί:

Σκεφτήκατε ποτέ ότι το μηδέν είναι ένας «άτακτος αριθμός»; Η περιέργη συμπεριφορά του είναι ο λόγος που κάνει το μηδέν τόσο διαφορετικό από όλους τους άλλους αριθμούς;

Ας το εξηγήσουμε. Ο Αρχιμήδης (γεννήθηκε στη Σικελία το 287 π.Χ.) λέει πως αν έχετε δύο οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς όπως το 3 και το 5, τότε μπορείτε πάντα να προσθέσετε τον μικρότερο –στην περίπτωση μας το 3– στον εαυτό του αρκετές φορές ώστε να ξεπεράσει τον μεγαλύτερο αριθμό, στην περίπτωση μας το 5. Με άλλα λόγια, ο μικρότερος αριθμός προσδευτικά γίνεται όλο και μεγαλύτερος όσο τον προσθέτετε στον εαυτό του (δηλαδή $3 + 3 + 3 \dots$). Όμως, αν δοκιμάσετε να κάνετε το ίδιο με το μηδέν, αυτό αρνείται να γίνει μεγαλύτερο. Επιπλέον, αν προσθέσετε το μηδέν σε οποιονδήποτε άλλον αριθμό, ποτέ δεν θα τον κάνει μεγαλύτερο. Προσθέστε στο 8 το 0 και θα πάρετε και πάλι 8. Αν προσέξετε, θα διαπιστώσετε ότι κάτι ανάλογο ισχύει και για την αφαίρεση. Δοκιμάστε το.

Αυτή η «προβληματική» συμπεριφορά γίνεται ακόμη πιο σοβαρή στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Μηδέν φορές οποιονδήποτε αριθμό κάνει πάντα μηδέν. Θυμάστε επίσης καθόλου τη φράση «Η διαίρεση με το μηδέν δεν ορίζεται»; Αναρωτηθήκατε ποτέ το γιατί; Όπως θα συζητήσουμε στο Κεφάλαιο 3, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη διαίρεση ως την αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.

Για παράδειγμα, επειδή $2 \times 3 = 6$, τότε $6 \div 3 = 2$. Στο ίδιο πνεύμα πιθανόν να σκεφτείτε ότι η διαίρεση με το μηδέν είναι το αντίστροφο του πολλαπλασιασμού με το μηδέν. Ίσως φαντάζεστε ότι, αφού $6 \times 0 = 0$, τότε θα πρέπει $0 \div 0 = 6$. Όμως με την ίδια λογική θα ισχύει ότι αφού $5 \times 0 = 0$ τότε θα πρέπει και $0 \div 0 = 5$ και ούτω καθεξής. Αυτό όμως θα σήμαινε ότι $0 \div 0$ είναι ίσο με 5, με 6, με 7, ... με οποιονδήποτε αριθμό, κάτι που δεν έχει νόημα στα Μαθηματικά!



Προτεινόμενα προς ανάγνωση

Αν και πολλοί ερευνητές γράφουν για το μηδέν, συνήθως το κάνουν επιφανειακά και ως μέρος κάποιας μεγαλύτερης έννοιας όπως η αρίθμηση. Αν όμως επιθυμείτε να μάθετε περισσότερα για τον αριθμό αυτό, τότε ίσως σας ενδιαφέρει το κεφάλαιο που έγραψε η Anne με τον συνάδελφό της Paul Parslow-Williams, με τίτλο «Zero: understanding an apparently paradoxical number». Θα το βρείτε στο:

Cockburn, A.D., & Littler, G. (2008). *Mathematical Misconceptions*. London: Sage.

Οι πολυπλοκότητες του μηδενός και το πώς αυτές μπορούν να αντιμετωπιστούν σταδιακά από τα μικρά παιδιά περιγράφονται στην εργασία των Glenda Anthony και Margaret Walshaw.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2004). Zero: a “none” number? *Teaching Children Mathematics*, 11(1), 38-42.

Αν σας ενδιαφέρει να μελετήσετε σε μεγαλύτερο βάθος την ιστορία του μηδενός, τότε θα βρείτε ενδιαφέρον το βιβλίο του Charles Seife:

Seife, C. (2000). *Zero. The biography of a dangerous idea*. New York: Viking Penguin.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΟΥΚΙΑ ΜΕΤΡΗΜΕΝΑ

ΣΤΑ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΠΑΙΔΙΑ αρέσει να μαθαίνουν να μετρούν! Εντυπωσιάζεται κανείς με τον ενθουσιασμό που τα συναρπάζει όταν συνειδητοποιούν ότι μπορούν να λένε τους αριθμούς μέχρι το 100. Θεωρούν αυτή την ικανότητα μια ένδειξη του πόσο έχουν μεγαλώσει. Στην πραγματικότητα, αυτή η προσπάθεια των παιδιών να μάθουν να μετρούν είναι ένα αρκετά πολύπλοκο εγχείρημα. Στην πορεία αυτή υπάρχουν κάποια εμπόδια τόσο για εσάς όσο και για τα παιδιά, που θα συζητήσουμε στη συνέχεια.

Όπως αναμένεται, ένα από τα πρώτα βήματα είναι να μάθουν τα παιδιά να απαριθμούν με τη σωστή σειρά. Σε αυτές τις πολύ μικρές ηλικίες, όταν μιλάμε για αριθμούς, αναφερόμαστε πάντα στους φυσικούς αριθμούς (τους αριθμούς δηλαδή που χρησιμοποιούμε για να μετράμε, 1, 2, 3, ..., χωρίς σταματημό). Αν τα παιδιά σας ακούν συχνά να απαριθμείτε φωναχτά, πολύ σύντομα θα μάθουν τις λέξεις για κάποιους αριθμούς. Αρχικά ίσως παρατηρείτε να τους εκφέρουν με τυχαία σειρά, αλλά ύστερα από λίγο θα αρχίσουν να χρησιμοποιούν πιο σταθερά ακολουθίες όπως 1, 2, 4, 5, 8. Μάλλον το βρίσκετε και αυτό κάπως απογοητευτικό, αλλά σας διαβεβαιώνουμε, δεν υπάρχει λόγος ανησυχίας εάν το παιδί στην αρχή δεν απαριθμεί σωστά την ακολουθία των αριθμών. Ακούστε το προσεκτικά. Για παράδειγμα, η Sami λέει συνεχώς και απαράλλαχτα, «1, 2, 4, 5, 8». Αυτό σημαίνει πως αναγνωρίζει ότι τα ονόματα των αριθμών πάντα ακολουθούν την ίδια σειρά, γεγονός που αποτελεί δομικό λίθο στο να μάθει ένα παιδί να μετρά. Εάν το καλοσκεφτείτε, θα ήταν σκέτη απελπισία αν



το παιδί σας κάποια φορά απαριθμούσε μια συλλογή αντικειμένων ως «1, 2, 3, 7, 9» και την επόμενη φορά ως «2, 4, 6, 7, 8»!

Για να βοηθήσετε τα παιδιά να μάθουν τα «ονόματα» των αριθμών με τη σωστή σειρά, συνιστούμε να αναπτύξετε τη συνήθεια της καταμέτρησης αντικειμένων, δείχνοντάς τα την ίδια στιγμή με το δάχτυλό σας και εκφέροντας φωναχτά το όνομα του αριθμού. Αν αυτό γίνει μέρος της καθημερινής ζωής –για παράδειγμα, όταν μετράτε τα πιάτα καθώς ετοιμάζετε το μεσημεριανό τραπέζι ή τις καρέκλες που τοποθετείτε γύρω του–, τότε τα παιδιά θα αρχίσουν να συγκρατούν τους αριθμούς με τη σωστή σειρά, χωρίς να αισθανθούν πίεση. Παρόλο που μπορεί να σας φανεί περίεργο αρχικά, εντούτοις προτείνουμε να αρχίζετε την ακολουθία των αριθμών πάντα με το 0, όπως συζητήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για παράδειγμα, καθώς ξεκινάτε το στρώσιμο του τραπεζιού, μπορείτε να πείτε: «Αυτή τη στιγμή υπάρχουν μηδέν πιάτα στο τραπέζι, τώρα έχουμε ένα, δύο, ...».



Όποτε μπορείτε, είτε εσείς είτε κάποια από τα μεγαλύτερα παιδιά, να δείχνετε ή να αγγίζετε τα αντικείμενα καθώς τα μετράτε, με τρόπο που να το βλέπουν τα μικρότερα παιδιά. Η εικονογράφος μας, η Άννα, σχεδίασε παρακάτω μερικά παραδείγματα που δείχνουν πώς μπορεί να γίνει αυτό.

