ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
Α. ΞΕΠΑΠΑΔΕΑΣ
Κεφάλαιο 5: Δυναμικά Συστήματα
Λύσεις Ασκήσεων

Ασκήσεις 5.1

1) α. $\dot{y}_1 = y_1 + 4y_2$

$\dot{y}_2 = y_1 + y_2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ με $\det(A) = 1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow$ Σαγματικό σημείο.

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$ με ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1.$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα:

Για $\lambda_1 = 3$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 4 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{r} -2C_1^1 + 4C_1^2 = 0 \\ C_1^1 - 2C_1^2 = 0 \end{array} \right\} \text{θέτουμε } C_1^1 = 1 \text{ και προκύπτει: } C_1^2 = \tfrac{1}{2}$$

Για $\lambda_2 = -1$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 4 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^1 \\ C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{r} 2C_2^1 + 4C_2^2 = 0 \\ C_2^1 + 2C_2^2 = 0 \end{array} \right\} \text{θέτουμε } C_2^1 = 1 \text{ και προκύπτει: } C_2^2 = -\tfrac{1}{2}$$

Γενική Λύση:

$y_1(t) = B_1 e^{3t} + B_2 e^{-t}$

$y_2(t) = \tfrac{1}{2} B_1 e^{3t} - \tfrac{1}{2} B_2 e^{-t}$

β. $\dot{y}_1 = 6y_1 + 84y_2$

$\dot{y}_2 = -y_1 + 2y_2$

$A = \begin{bmatrix} 6 & 84 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ με $\det(A) = 12 + 84 = 96 > 0$

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$(6-\lambda)(2-\lambda) + 84 = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 96 = 0,$ με μιγαδικές ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 4 + 4\sqrt{5}i$ και $\lambda_2 = 4 - 4\sqrt{5}i.$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα:

Για $\lambda_1 = 4+4\sqrt{5}i$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 6-4-4\sqrt{5}i & 84 \\ -1 & 2-4-4\sqrt{5}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (2-4\sqrt{5}i)C_1^1 + 84C_1^2 = 0 \\ -C_1^1 + (-2-4\sqrt{5}i)C_1^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ θέτουμε } C_1^2 = 1 \text{ και προκύπτει: } C_1^1 = -2-4\sqrt{5}i$$

Για $\lambda_2 = 4-4\sqrt{5}i$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 6-4+4\sqrt{5}i & 84 \\ -1 & 2-4+4\sqrt{5}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^1 \\ C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (2+4\sqrt{5}i)C_2^1 + 84C_2^2 = 0 \\ -C_2^1 + (-2+4\sqrt{5}i)C_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ θέτουμε } C_2^2 = 1 \text{ και προκύπτει: } C_2^1 = -2+4\sqrt{5}i$$

Αφού $C_1^* = -2-4\sqrt{5}i$, θα έχουμε: $\gamma_1 = -2$ και $\gamma_2 = -4\sqrt{5}$. Επιπλέον, αφού $C_2^* = 1$, θα έχουμε: $\delta_1 = 1$ και $\delta_2 = 0$

Γενική Λύση:

$$y_1(t) = e^{4t}[-2(B_1 - B_2)\sigma\upsilon\nu(4\sqrt{5}t) - 2(B_1 + B_2)\eta\mu(4\sqrt{5}t)]$$
$$y_2(t) = e^{4t}[B_1\sigma\upsilon\nu(4\sqrt{5}t) + B_2\eta\mu(4\sqrt{5}t)]$$

γ. $\dot{y}_1 = 3y_1 - 18y_2$

$\dot{y}_2 = 2y_1 - 9y_2$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$ με $\det(A) = -27+36 = 9 > 0$

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$(3-\lambda)(-9-\lambda)+36 = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$ με μια πραγματική επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή $\mu = -3$

Για να βρούμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{pmatrix} 3+3 & -18 \\ 2 & -9+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 6C_1 - 18C_2 = 0 \\ 2C_1 - 6C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ θέτουμε } C_2 = 1 \text{ και προκύπτει: } C_1 = 3$$

Η λύση γράφεται ως:

$$y_1(t) = B_1 3e^{-3t} + B_2(n_1 + 3t)e^{-3t}$$
$$y_2(t) = B_1 e^{-3t} + B_2(n_2 + t)e^{-3t}$$

όπου οι σταθερές $n = (n_1, n_2)$ είναι λύση του συστήματος

$$(A - \mu I)n = c \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 3+3 & -18 \\ 2 & -9+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

από το οποίο προκύπτει $n_1 = 1$, $n_2 = \frac{1}{6}$

Η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$y_1(t) = B_1 3e^{-3t} + B_2(1+3t)e^{-3t}$$
$$y_2(t) = B_1 e^{-3t} + B_2(\tfrac{1}{6}+t)e^{-3t}$$

δ. $\dot{y}_1 = 6y_1 + 8y_2$

$\dot{y}_2 = -y_1 + 2y_2$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ με } \det(A) = 12 + 8 = 20 > 0$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$$(6-\lambda)(2-\lambda) + 8 = 0$$

$\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$, με μιγαδικές ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 4 + 2i$ και $\lambda_2 = 4 - 2i$.

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα:

Για $\lambda_1 = 4 + 2i$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 6-4-2i & 8 \\ -1 & 2-4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (2-2i)C_1^1 + 8C_1^2 &= 0 \\ -C_1^1 + (-2-2i)C_1^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ θέτουμε } C_1^2 = 1 \text{ και προκύπτει: } C_1^1 = -2-2i$$

Για $\lambda_2 = 4 - 2i$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 6-4+2i & 8 \\ -1 & 2-4+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^1 \\ C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (2+2i)C_2^1 + 8C_2^2 &= 0 \\ -C_2^1 + (-2+2i)C_2^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ θέτουμε } C_2^2 = 1 \text{ και προκύπτει: } C_2^1 = -2+2i$$

Αφού $C_1^* = -2-2i$, θα έχουμε: $\gamma_1 = -2$ και $\gamma_2 = -2$. Επιπλέον, αφού $C_2^* = 1$, θα έχουμε: $\delta_1 = 1$ και $\delta_2 = 0$

Γενική Λύση:

$$y_1(t) = e^{4t}[-2(B_1 - B_2)\sigma\upsilon\nu 2t - 2(B_1 + B_2)\eta\mu 2t]$$
$$y_2(t) = e^{4t}[B_1\sigma\upsilon\nu 2t + B_2\eta\mu 2t]$$

2) $\dot{y}(t) = Ay(t) + g$, με $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Βήμα 1: Ιδιοτιμές

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 6 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας, προκύπτει: $\lambda_1 = -1 + \sqrt{6}$ και $\lambda_2 = -1 - \sqrt{6}$

Βήμα 2: Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1 = -1+\sqrt{6}$:

$$\begin{pmatrix} -1+1-\sqrt{6} & 6 \\ 1 & -1+1-\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $C_1^1 = 1$ και $C_1^2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Για $\lambda_2 = -1-\sqrt{6}$: $\begin{pmatrix} -1+1+\sqrt{6} & 6 \\ 1 & -1+1+\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^1 \\ C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $C_2^1 = 1$ και $C_2^2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

Βήμα 3: Ειδική Λύση

$\bar{y} = -A^{-1}g$

$\det(A) = -5$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-5} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4: Γενική Λύση

$$y_1(t) = B_1 e^{(-1+\sqrt{6})t} + B_2 e^{(-1-\sqrt{6})t} - 9$$

$$y_2(t) = B_1 \frac{\sqrt{6}}{6} e^{(-1+\sqrt{6})t} - B_2 \frac{\sqrt{6}}{6} e^{(-1-\sqrt{6})t} - 4$$

Βήμα 5: Ορισμένη Λύση

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, λύνουμε το σύστημα:

$B_1 + B_2 - 9 = 3$

$B_1 \frac{\sqrt{6}}{6} - B_2 \frac{\sqrt{6}}{6} - 4 = 5$

Οι λύσεις είναι: $B_1 = 6 + \frac{9\sqrt{6}}{2}$ και $B_2 = 6 - \frac{9\sqrt{6}}{2}$. Αντικαθιστώντας, τα B_1, B_2 στο Βήμα 4, προκύπτει η γενική λύση του συστήματος.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 6+m \\ 1 & -z \end{pmatrix}$

$\zeta = tr(A) = -1 - z$

$\xi = \det(A) = z - (6+m)$

α). Αν $\xi < 0$, τότε έχουμε σαγματικό σημείο.

$\xi < 0 \Rightarrow z - 6 - m < 0 \Rightarrow z - m < 6$.

* Αν $\xi > 0$, τότε εξετάζουμε το: $\zeta^2 - 4\xi$

β). Εάν $\zeta^2 - 4\xi \geq 0$, τότε έχουμε δεσμό.

$\zeta^2 - 4\xi \geq 0 \Rightarrow (1+z)^2 - 4[z-(6+m)] \geq 0 \Rightarrow 1 + z^2 + 2z - 4z + 24 + 4m \geq 0 \Rightarrow (z-1)^2 + 6(4+m) \geq 0$, που ισχύει για κάθε τιμή του z και για τις τιμές εξής τιμές του m : $m \geq -4$. Εάν $\zeta = -1 - z < 0 \Rightarrow z > -1$, τότε ο δεσμός είναι ευσταθής. Εάν $\zeta = -1 - z > 0 \Rightarrow z < -1$, τότε ο δεσμός είναι ασταθής.

γ). Εάν $\zeta^2 - 4\xi < 0,$ τότε έχουμε σπείρα.

$\zeta^2 - 4\xi < 0 \Rightarrow (1+z)^2 - 4[z-(6+m)] < 0 \Rightarrow 1+z^2+2z-4z+24+4m < 0 \Rightarrow (z-1)^2 + 6(4+m) < 0.$

Εάν $\zeta = -1 - z < 0 \Rightarrow z > -1$, τότε η σπείρα είναι ευσταθής. Εάν $\zeta = -1 - z > 0 \Rightarrow z < -1$, τότε η σπείρα είναι ασταθής.

δ). Εάν $\zeta = tr(A) = -1 - z = 0 \Rightarrow z = -1,$ τότε έχουμε κέντρο.

Ασκήσεις 5.2

1) $\dot{x} = -y + x(\lambda - x^2 - y^2)$

$\dot{y} = x + y(\lambda - x^2 - y^2)$

Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=0\\ \dot{y}=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}-y + x(\lambda - x^2 - y^2) = 0\\ x + y(\lambda - x^2 - y^2) = 0\end{array}\right\}$$

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας, το (0,0).

Η Ιακωβιανή μήτρα είναι:

$$Df = \begin{bmatrix} \lambda - 3x^2 - y^2 & -1-2xy \\ 1-2yx & \lambda - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

και υπολογιζόμενη στο σημείο ισορροπίας είναι:

$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix},$ και $\det Df = \lambda^2 + 1 > 0$ και $tr = 2\lambda.$ Για $\lambda > 0$, θα έχουμε $tr > 0,$ που σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας θα είναι ασταθές. Για $\lambda < 0$, θα έχουμε $tr < 0,$ που σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας θα είναι ευσταθές. Τέλος, για $\lambda = 0$ και $tr = 0,$ θα έχουμε κέντρο.

2) Η δυναμική προσαρμογή της τιμής είναι:

$\dot{p} = \gamma(q^D - q^S) = \gamma(a + bp - mp) = \gamma a + \gamma(b-m)p$ και η μεταβολή του αριθμού των επιχειρήσεων δίνεται από τη σχέση: $\dot{N} = \delta(p - c).$ Στην ισορροπία θα ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{p}=0\\ \dot{N}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\gamma a + \gamma(b-m)p = 0\\ \delta(p-c) = 0\end{array}\right\}$$

Από την πρώτη σχέση προκύπτει η τιμή ισορροπίας: $p^* = \frac{a}{m-b} > 0$, γιατί $a, m > 0$ και $b < 0.$ Από τη δεύτερη σχέση προκύπτει ότι η τιμή ισορροπίας ισούται με το σταθερό μέσο κόστος παραγωγής: $p^* = c,$ πράγμα που σημαίνει ότι στην ισορροπία, ο αριθμός των επιχειρήσεων παραμένει σταθερός.

Για τον χαρακτηρισμό του σημείου ισορροπίας, η Ιακωβιανή είναι:

$$J(k^*, c^*) = \begin{pmatrix} \gamma(b-m) & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

Το σημείο ισορροπίας είναι μη-υπερβολικό επειδή η Ιακωβιανή ορίζουσα μηδενίζεται.

3) $\dot{k} = k^a - c - \delta k$

$\dot{c} = \frac{1}{\sigma}[ak^{a-1} - \omega]c$

Το σημείο ισορροπίας προσδιορίζεται ως (k^*, c^*): $\dot{k} = \dot{c} = 0$. Λύνοντας το σύστημα, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} k^{*a} - c - \delta k^* &= 0 \\ \tfrac{1}{\sigma}[ak^{*a-1} - \omega]c^* &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Από την δεύτερη εξίσωση προκύπτει: $k^* = (\frac{a}{w})^{\frac{1}{1-a}}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη, έχουμε: $c^* = (\frac{a}{w})^{\frac{a}{1-a}}[1 - \delta \frac{a}{w}]$.

Για τον χαρακτηρισμό του σημείου ισορροπίας, η Ιακωβιανή είναι:

$$J(k^*, c^*) = \begin{pmatrix} ak^{*a-1} - \delta & -1 \\ \frac{a(a-1)k^{*a-2}c^*}{\sigma} & \frac{1}{\sigma}[ak^{*a-1} - \omega] \end{pmatrix}$$

Επειδή στην ισορροπία $ak^{*a-1} - \omega = 0$, έχουμε $\det J\left(k^*, c^*\right) = \dfrac{a(a-1)k^{*a-2}c^*}{\sigma} < 0$ και επομένως το σημείο ισορροπίας είναι σαγματικό σημείο.

Για το διάγραμμα φάσης βλέπετε σχήμα 7.4 (σελίδα 324 του βιβλίου).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

4) $\dot{y}(t) = Ay(t) + g$, με $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Βήμα 1: Ιδιοτιμές

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας, προκύπτει: $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$

Βήμα 2: Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{5+\sqrt{37}}{2} & 3 \\ 3 & 3-\frac{5+\sqrt{37}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $C_1^1 = 1$ και $C_1^2 = \frac{1+\sqrt{37}}{6}$

Για $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{5-\sqrt{37}}{2} & 3 \\ 3 & 3-\frac{5-\sqrt{37}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^1 \\ C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $C_2^1 = 1$ και $C_2^2 = \frac{1-\sqrt{37}}{6}$

Βήμα 3: Ειδική Λύση

$\bar{y} = -A^{-1}g$

$\det(A) = -3$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Βήμα 4: Γενική Λύση

$$y_1(t) = B_1 e^{(\frac{5+\sqrt{37}}{2})t} + B_2 e^{(\frac{5-\sqrt{37}}{2})t}$$

$$y_2(t) = B_1 \tfrac{1+\sqrt{37}}{6} e^{(\frac{5+\sqrt{37}}{2})t} + B_2 \tfrac{1-\sqrt{37}}{6} e^{(\frac{5-\sqrt{37}}{2})t} - \tfrac{2}{3}$$

Βήμα 5: Ορισμένη Λύση

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, λύνουμε το σύστημα:

$$B_1 + B_2 = 2$$

$$B_1 \tfrac{1+\sqrt{37}}{6} + B_2 \tfrac{1-\sqrt{37}}{6} - \tfrac{2}{3} = 4$$

Οι λύσεις είναι: $B_1 = 1 + \frac{13\sqrt{37}}{37}$ και $B_2 = 1 - \frac{13\sqrt{37}}{37}$. Αντικαθιστώντας, τα B_1, B_2 στο Βήμα 4, προκύπτει η γενική λύση του συστήματος.

Βήμα 6: Χαρακτηρισμός ευστάθειας

$\det(A) = -3$ και επομένως το σημείο ισορροπίας είναι σαγματικό σημείο.

5) $\dot{y}(t) = Ay(t) + b$, με $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Βήμα 1: Ιδιοτιμές

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας, προκύπτει: $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -3$

Βήμα 2: Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} -2+1 & 1 \\ 1 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $C_1^1 = 1$ και $C_1^2 = 1$

Για $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} -2+3 & 1 \\ 1 & -2+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_2^1 \\ C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $C_2^1 = 1$ και $C_2^2 = -1$

Βήμα 3: Ειδική Λύση

$$\bar{y} = -A^{-1}b$$

$$\det(A) = 3$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = -\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Βήμα 4: Γενική Λύση

$$y_1(t) = B_1 e^{-t} + B_2 e^{-3t} + \tfrac{7}{3}$$
$$y_2(t) = B_1 e^{-t} - B_2 e^{-3t} + \tfrac{8}{3}$$

Βήμα 5: Ορισμένη Λύση

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, λύνουμε το σύστημα:

$$B_1 + B_2 + \tfrac{7}{3} = 2$$
$$B_1 - B_2 + \tfrac{8}{3} = 1$$

Οι λύσεις είναι: $B_1 = -1$ και $B_2 = \frac{2}{3}$. Αντικαθιστώντας, τα B_1, B_2 στο Βήμα 4, προκύπτει η γενική λύση του συστήματος.

Βήμα 6: Χαρακτηρισμός ευστάθειας

$$\xi = \det(A) = 3 > 0$$
$$\zeta = tr(A) = -4$$
$$\zeta^2 - 4\xi = 16 - 12 = 4 > 0$$

Οπότε έχουμε δεσμό, με $\zeta < 0$ που σημαίνει ότι ο δεσμός είναι ευσταθής.

6) $\dot{y}(t) = Ay(t)$, με $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Βήμα 1: Ιδιοτιμές

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας, προκύπτει: $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 1$

Βήμα 2: Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $C_1^1 = 1$ και $C_1^2 = 1$

Για $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_2^1 \\ C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $C_2^1 = 1$ και $C_2^2 = -1$

Βήμα 3: Γενική Λύση

$$y_1(t) = B_1 e^{3t} + B_2 e^{t}$$
$$y_2(t) = B_1 e^{3t} - B_2 e^{t}$$

Βήμα 4: Ορισμένη Λύση

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, λύνουμε το σύστημα:

$B_1 + B_2 = 1$

$B_1 - B_2 = 1$

Οι λύσεις είναι: $B_1 = 1$ και $B_2 = 0$. Αντικαθιστώντας, τα B_1, B_2 στο Βήμα 4, προκύπτει η γενική λύση του συστήματος:

$y_1(t) = e^{3t}$

$y_2(t) = e^{3t}$

Βήμα 5: Χαρακτηρισμός ευστάθειας

$\xi = \det(A) = 3 > 0$

$\zeta = tr(A) = 4 > 0$

$\zeta^2 - 4\xi = 16 - 12 = 4 > 0$

Οπότε έχουμε δεσμό, με $\zeta > 0$ που σημαίνει ότι ο δεσμός είναι ασταθής.

7) Αφού και στις 2 αγορές ισχύει: $\dot{P}_i(t) = D_i(t) - S_i(t)$, το σύστημα που περιγράφει την εξέλιξη των τιμών είναι:

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= D_1(t) - S_1(t) \\ \dot{P}_2(t) &= D_2(t) - S_2(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= a_0 + a_1P_1(t) + a_2P_2(t) - c_0 - c_1P_1(t) - c_2P_2(t) \\ \dot{P}_2(t) &= b_0 + b_1P_1(t) + b_2P_2(t) - d_0 - d_1P_1(t) - d_2P_2(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= (a_1 - c_1)P_1(t) + (a_2 - c_2)P_2(t) + (a_0 - c_0) \\ \dot{P}_2(t) &= (b_1 - d_1)P_1(t) + (b_2 - d_2)P_2(t) + (b_0 - d_0) \end{aligned}\right\}$$

Συνεπώς, το δυναμικό σύστημα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$\dot{P}(t) = AP(t) + g$

όπου $\dot{P}(t) = \begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{pmatrix}$, $P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 \end{pmatrix}$ και $g = \begin{pmatrix} a_0 - c_0 \\ b_0 - d_0 \end{pmatrix}$

Η τιμή ισορροπίας προσδιορίζεται από την ειδική λύση ως εξής:

$$\overline{P} = -A^{-1}g, \text{ όπου } A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} b_2 - d_2 & -(a_2 - c_2) \\ -(b_1 - d_1) & a_1 - c_1 \end{pmatrix}}{\left(a_1 - c_1)(b_2 - d_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - d_1)\right)}$$

Εάν ορίσουμε ως: $\xi = \det(A) = \left(a_1 - c_1)(b_2 - d_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - d_1\right)$ και

$\zeta = tr(A) = a_1 - c_1 + b_2 - d_2$, τότε:

α). Αν $\xi < 0$, θα έχουμε σαγματικό σημείο

β). Αν $\xi > 0$, εξετάζουμε το $\zeta^2 - 4\xi$

Για $\zeta^2 - 4\xi \geq 0$ έχουμε δεσμό. Εάν $\zeta < 0$ έχουμε ευσταθή δεσμό και εάν $\zeta > 0$ έχουμε ασταθή δεσμό.

Για $\zeta^2 - 4\xi < 0$ έχουμε σπείρα. Εάν $\zeta < 0$ έχουμε ευσταθή σπείρα και εάν $\zeta > 0$ έχουμε ασταθή σπείρα.

Για $\zeta = 0$ έχουμε κέντρο.

8) Το δυναμικό σύστημα $\left.\begin{array}{l}\dot{u} = u(1-v)\\ \dot{v} = av(u-1)\end{array}\right\}$ έχει δυο σημεία ισορροπίας:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{u} = 0\\ \dot{v} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}u(1-v) = 0\\ av(u-1) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}u = uv\\ avu = av\end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ ή } (1,1)$$

Η Ιακωβιανή μήτρα είναι:

$$Df = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ av & a(u-1) \end{pmatrix}$$

και υπολογιζόμενη στα σημεία ισορροπίας είναι:

$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, και $\det Df(0,0) = -a < 0$, οπότε έχουμε σαγματικό σημείο

$Df(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, και $\det Df(1,1) = a > 0$, και $tr = 0$, οπότε έχουμε κέντρο.