ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Α. ΞΕΠΑΠΑΔΕΑΣ

Κεφάλαιο 4: Διαφορικές Εξισώσεις

Λύσεις Ασκήσεων

Ασκήσεις 4.1

1) α. Η προτεινόμενη λύση είναι: $s = K\,t^2$. Οπότε: $\frac{ds}{dt} = 2Kt.$ Αντικαθιστώντας τις δύο σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$t\,\frac{ds}{dt} - 2s = t\,(2Kt) - 2K\,t^2 = 2K\,t^2 - 2K\,t^2 = 0 \ .$$

β. Η προτεινόμενη λύση είναι: $y = t + C\,t^2$. Οπότε: $\frac{dy}{dt} = 1 + 2C\,t.$
Αντικαθιστώντας τις δύο σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$t\,\frac{dy}{dt} - 2y = t\,(1 + 2C\,t) - 2(t + C\,t^2) = t + 2Ct^2 - 2t - 2Ct^2 = -t \ .$$

γ. Η προτεινόμενη λύση είναι: $V = \sigma\upsilon\nu(t) + Ce^{-t}$. Οπότε: $\frac{dV}{dt} = -\eta\mu(t) - Ce^{-t}$.
Αντικαθιστώντας τις δύο σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$\frac{dV}{dt} + V = -\eta\mu(t) - Ce^{-t} + \sigma\upsilon\nu(t) + Ce^{-t} = \sigma\upsilon\nu(t) - \eta\mu(t) \ .$$

δ. Η προτεινόμενη λύση είναι: $y = (3t + C)e^{-2t}$. Οπότε: $\frac{dy}{dt} = 3e^{-2t} - 6te^{-2t} - 2Ce^{-2t}$.
Αντικαθιστώντας τις δύο σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3e^{-2t} - 6te^{-2t} - 2Ce^{-2t} + 2(3t + C)e^{-2t} = 3e^{-2t} - 6te^{-2t} - 2Ce^{-2t} + 6te^{-2t} + 2Ce^{-2t} = 3e^{-2t}$$

ε. Η προτεινόμενη λύση είναι: $s = C_1\,\eta\mu(4t) + C_2\,\sigma\upsilon\nu(4t)$ Οπότε:
$\frac{ds}{dt} = 4C_1\sigma\upsilon\nu(4t) - 4C_2\eta\mu(4t)$ και $\frac{d^2s}{dt^2} = -16C_1\eta\mu(4t) - 16C_2\sigma\upsilon\nu(4t).$
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:
$$\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = -16C_1\eta\mu(4t) - 16C_2\sigma\upsilon\nu(4t) + 16C_1\,\eta\mu(4t) + 16C_2\,\sigma\upsilon\nu(4t) = 0 \ .$$

2) Διαφορική εξίσωση:
$\frac{dQ}{dt} = k(Q - 500) \Rightarrow \frac{dQ}{dt} - kQ = -500k.$
Η ομογενής εξίσωση γράφεται ως εξής: $\frac{dQ}{dt} - kQ = 0$ και η λύση της είναι:
$Q_h(t) = Ae^{kt}.$

Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε την: $\overline{Q}(t) = b$.
Αντικαθιστώντας την στην αρχική διαφορική εξίσωση, έχουμε:
$-kb = -500k \Rightarrow b = 500.$ Γενική Λύση: $Q(t) = Q_h(t) + \overline{Q}(t) = Ae^{kt} + 500.$

3) Εάν $y = e^{mt}$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης, τότε έχουμε: $\frac{dy}{dt} = me^{mt}$ και $\frac{d^2y}{dt^2} = m^2e^{mt}$.
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:
$2\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} - 3y = 0 \;\Rightarrow\; 2m^2e^{mt} - 5me^{mt} - 3e^{mt} = 0 \;\Rightarrow\; 2m^2 - 5m - 3 = 0,$ η οποία επιβεβαιώνεται για δύο τιμές του m : $m_1 = 3$ και $m_2 = -\frac{1}{2}$

Ασκήσεις 4.2

1) α. $\dot{y} + 3y = 2$, $y(0) = 1.$
Η ομογενής εξίσωση γράφεται ως εξής: $\dot{y} + 3y = 0$ και η λύση της είναι:
$y_h(t) = Ae^{-3t}.$
Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε την: $\overline{y}(t) = b$.
Αντικαθιστώντας την στην αρχική διαφορική εξίσωση, έχουμε: $3b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3}.$
Γενική Λύση: $y(t) = y_h(t) + \overline{y}(t) = Ae^{-3t} + \frac{2}{3}.$ Για τον προσδιορισμό του A χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη, οπότε: $y(0) = A + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$ Οπότε η Γενική Λύση γίνεται: $y(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}$

β. $\dot{y} + y = t$, $y(0) = 1.$
Η ομογενής εξίσωση γράφεται ως εξής: $\dot{y} + y = 0$ και η λύση της είναι:
$y_h(t) = Ae^{-t}.$
Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε την: $\overline{y}(t) = \delta_0 + \delta_1 t$, από την οποία προκύπτει: $\dot{\overline{y}}(t) = \delta_1$. Αντικαθιστώντας στην αρχική διαφορική εξίσωση, έχουμε: $\delta_1 + \delta_0 + \delta_1 t = t$, από την οποία προσδιορίζονται τα δ_0, δ_1 ως εξής: $\delta_1 = 1$ και $\delta_0 + \delta_1 = 0 \Rightarrow \delta_0 = -1.$ Γενική Λύση: $y(t) = y_h(t) + \overline{y}(t) = Ae^{-t} - 1 + t.$ Για τον προσδιορισμό του A χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη, οπότε:
$y(0) = A - 1 = 1 \Rightarrow A = 2.$ Οπότε η Γενική Λύση γίνεται: $y(t) = 2e^{-t} + t - 1.$

γ. $\dot{y} + 2y = e^{-2t}$
Η ομογενής εξίσωση γράφεται ως εξής: $\dot{y} + 2y = 0$ και η λύση της είναι:
$y_h(t) = Ae^{-2t}.$
Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε την: $\overline{y}(t) = Ce^{-2t}$, από την οποία προκύπτει: $\dot{\overline{y}}(t) = -2Ce^{-2t}$. Αντικαθιστώντας στην αρχική διαφορική εξίσωση, έχουμε: $-2Ce^{-2t} + 2Ce^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow \quad 0 = e^{-2t}$, από την οποία προκύπτει απροσδιοριστία (δεν προσδιορίζεται το C). Έτσι, δοκιμάζουμε την ειδική λύση: $\overline{y}(t) = tCe^{-2t}$, από την οποία προκύπτει: $\dot{\overline{y}}(t) = Ce^{-2t} - 2tCe^{-2t}$. Αντικαθιστώντας

στην αρχική διαφορική εξίσωση, έχουμε: $Ce^{-2t} - 2tCe^{-2t} + 2tCe^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow C = 1$.
Γενική Λύση: $y(t) = y_h(t) + \bar{y}(t) = Ae^{-2t} + te^{-2t} = (A+t)e^{-2t}$.

2) Έστω $y(t) = A_1e^{2t} + A_2e^{-3t}$ η λύση της διαφορικής εξίσωσης: $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0$.
Βρίσκουμε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης:
$\dot{y} = 2A_1e^{2t} - 3A_2e^{-3t}$ και $\ddot{y} = 4A_1e^{2t} + 9A_2e^{-3t}$. Τις αντικαθιστούμε στη διαφορική:
$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 4A_1e^{2t} + 9A_2e^{-3t} + 2A_1e^{2t} - 3A_2e^{-3t} - 6A_1e^{2t} - 6A_2e^{-3t} = 0$. Οπότε, η $y(t)$ είναι λύση της διαφορικής

3) α. $\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 0$
Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η λύση του ομογενούς της μέρους. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ και $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$. Η γενική λύση είναι $y(t) = A_1e^{(2+\sqrt{3})t} + A_2e^{(2-\sqrt{3})t}$
β. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$
Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η λύση του ομογενούς της μέρους. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ με μία διπλή ρίζα $\lambda_{1,2} = -2$. Η γενική λύση είναι $y(t) = A_1e^{-2t} + A_2te^{-2t}$
γ. $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$
Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η λύση του ομογενούς της μέρους. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = -3$. Η γενική λύση είναι $y(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t}$

4) α. $\ddot{y} + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η λύση του ομογενούς της μέρους. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 + 2 = 0$ με $\Delta = -8 < 0$, οπότε έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2 = u \pm vi$, όπου $u = 0$, $v = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$. Οπότε η γενική λύση γράφεται: $y(t) = A_1\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}t) + A_2\eta\mu(\sqrt{2}t)$. Για να προσδιορίσουμε τα A_1, A_2 βρίσκουμε το $\dot{y}(t) = -\sqrt{2}A_1\eta\mu(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}A_2\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}t)$ και χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες: $y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ και $\dot{y}(0) = 1 \Rightarrow \sqrt{2}A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Οπότε η γενική λύση γίνεται: $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\mu(\sqrt{2}t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu(\sqrt{2}t)$.

β. $\ddot{y} + 5\dot{y} + 5y = 5,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0$

Για τη λύση του ομογενούς της μέρους χρησιμοποιούμε τη χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + 5\lambda + 5 = 0$ με $\Delta = 5 > 0$, οπότε έχουμε δύο πραγματικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$.
Οπότε η λύση του ομογενούς μέρους είναι: $y_h(t) = A_1e^{(\frac{-5+\sqrt{5}}{2})t} + A_2e^{(\frac{-5-\sqrt{5}}{2})t}$. Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε $\bar{y}(t) = b$ και την αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση: $5b = 5 \Rightarrow b = 1$. Οπότε, η γενική λύση γίνεται:
$y(t) = y_h(t) + \bar{y}(t) = A_1e^{(\frac{-5+\sqrt{5}}{2})t} + A_2e^{(\frac{-5-\sqrt{5}}{2})t} + 1$. Για να προσδιορίσουμε τα A_1, A_2 βρίσκουμε το $\dot{y}(t) = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}A_1e^{(\frac{-5+\sqrt{5}}{2})t} + \frac{-5-\sqrt{5}}{2}A_2e^{(\frac{-5-\sqrt{5}}{2})t}$ και χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες: $y(0) = 1 \Rightarrow A_1 + A_2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow A_1 = -A_2$ και
$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \frac{-5+\sqrt{5}}{2}A_1 + \frac{-5-\sqrt{5}}{2}A_2 = 0$. Λύνοντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει: $A_1 = 0$,

$A_2 = 0$. Οπότε η γενική λύση γίνεται: $y(t) = 1$.

γ. $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 2e^{3t}$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$

Για τη λύση του ομογενούς της μέρους χρησιμοποιούμε τη χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ με $\Delta = 0$, οπότε έχουμε μία διπλή ρίζα: $\lambda_1, \lambda_2 = 3$. Οπότε η λύση του ομογενούς μέρους είναι: $y_h(t) = A_1 e^{3t} + A_2 t e^{3t}$. Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε τις $\bar{y}(t) = \Gamma e^{3t}$ και $\bar{y}(t) = t\Gamma e^{3t}$, από τις οποίες προκύπτει απροσδιοριστία (ο συντελεστής Γ παραμένει απροσδιόριστος). Γι' αυτό δοκιμάζουμε την: $\bar{y}(t) = t^2 \Gamma e^{3t}$ και παραγωγίζοντας έχουμε: $\dot{\bar{y}}(t) = 2t\Gamma e^{3t} + 3t^2 \Gamma e^{3t}$ και $\ddot{\bar{y}}(t) = 2\Gamma e^{3t} + 6t\Gamma e^{3t} + 6t\Gamma e^{3t} + 9t^2\Gamma e^{3t}$. Τις αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση και έχουμε: $\Gamma = 1$. Οπότε η ειδική λύση είναι: $\bar{y}(t) = t^2 e^{3t}$. Η γενική λύση γίνεται: $y(t) = y_h(t) + \bar{y}(t) = A_1 e^{3t} + A_2 t e^{3t} + t^2 e^{3t}$. Για να προσδιορίσουμε τα A_1, A_2 βρίσκουμε το $\dot{y}(t) = 3A_1 e^{3t} + A_2 e^{3t} + 3A_2 t e^{3t} + 2te^{3t} + 3t^2 e^{3t}$ και χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες: $y(0) = 1 \Rightarrow A_1 = 1$ και $\dot{y}(0) = 1 \Rightarrow 3A_1 + A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = -2$.

Οπότε η γενική λύση γίνεται: $y(t) = e^{3t} - 2te^{3t} + t^2 e^{3t}$.

Ασκήσεις 4.3

1.α. $(2ty + 3y)dt + (4y^3 + t^2 + 3t + 4)dy$

Έχουμε: $P = (2ty + 3y)$, $Q = (4y^3 + t^2 + 3t + 4)$ και $\frac{\partial P}{\partial y} = 2t + 3 = \frac{\partial Q}{\partial t}$ συνεπώς η εξίσωση είναι ακριβής. Για τη λύση της, υπολογίζουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$\int P\, dt = \int (2ty + 3y)dt = yt^2 + 3yt$ και

$g(y) = \int [Q - \frac{\partial}{\partial y}(\int P dt)]dy = \int [(4y^3 + t^2 + 3t + 4) - \frac{\partial}{\partial y}(yt^2 + 3yt)]dy =$

$\int [(4y^3 + t^2 + 3t + 4) - (t^2 + 3t)]dy = \int (4y^3 + 4)dy = y^4 + 4y$

Επομένως, η λύση είναι: $z(y,t) = y^4 + 4y + yt^2 + 3yt = A$

β. $(t^2 + y^2)dt + 2ytdy = 0$

Έχουμε: $P = (t^2 + y^2)$, $Q = 2yt$ και $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial t}$ συνεπώς η εξίσωση είναι ακριβής. Για τη λύση της, υπολογίζουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$\int P\, dt = \int (t^2 + y^2)dt = \frac{t^3}{3} + y^2 t$ και

$g(y) = \int [Q - \frac{\partial}{\partial y}(\int P dt)]dy = \int [2yt - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{t^3}{3} + y^2 t)]dy = \int [2yt - 2yt]dy = 0$ Επομένως, η λύση είναι: $z(y,t) = \frac{t^3}{3} + y^2 t = A$

2.α. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t}$

Έχουμε $tdy - ydt = 0$. Διαιρώντας με ty παίρνουμε: $\frac{1}{y}dy - \frac{1}{t}dt = 0$.

Ολοκληρώνοντας έχουμε: $\int \frac{1}{y}dy - \int \frac{1}{t}dt = A$ ή $\ln y - \ln t = A$.

β. $2(y^2 + 1)dt = 4ytdy$

Διαιρούμε την εξίσωση με: $2(y^2+1)t$. Έτσι, έχουμε:
$\frac{2(y^2+1)dt}{2(y^2+1)t} = \frac{4ytdy}{2(y^2+1)t} \Rightarrow \frac{1}{t}dt - \frac{4y}{2y^2+2}dy = 0$. Ολοκληρώνοντας έχουμε:
$\int \frac{1}{t}dt - \int \frac{4y}{2y^2+2}dy = A$ ή $\ln t - \ln(1+y^2) = A$. [Σημ: το ολοκλήρωμα $\int \frac{4y}{2y^2+2}dy$ λύνεται με τη μέθοδο της αλλαγής μεταβλητής. Έτσι, θέτουμε $u = y^2+1$, οπότε $du = 2ydy$. Επομένως, έχουμε: $\int \frac{4y}{2y^2+2}dy = \int \frac{2y}{y^2+1}dy = \int \frac{1}{u}du = \ln u + c = \ln(y^2+1)+c$.]

3.α. $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = 3t^2$

Για την εξίσωση αυτή ισχύει: $a_1(t) = \frac{2}{t}$ και $g(t) = 3t^2$, οπότε:
$\int a_1(t)dt = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t$ και $\exp\int a_1(t)dt = e^{2\ln t} = t^2$. Η λύση της εξίσωσης προκύπτει από τον ακόλουθο τύπο: $\frac{d}{dt}[(\exp\int a_1(t)dt)y(t)] = g(t)[\exp\int a_1(t)dt]$. Οπότε, $\frac{d}{dt}[t^2 y(t)] = 3t^2\ t^2$. Ολοκληρώνοντας, έχουμε: $t^2 y(t) = \int(3t^4)dt$ ή $t^2 y(t) = \frac{3t^5}{5} + A$ ή $y(t) = \frac{3t^3}{5} + A$

β. $\dot{y} - 2y = 4e^t$

Η ομογενής εξίσωση γράφεται ως εξής: $\dot{y} - 2y = 0$ και η λύση της είναι:
$y_h(t) = Ae^{2t}$.
Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε την: $\bar{y}(t) = Ce^t$, από την οποία προκύπτει: $\dot{\bar{y}}(t) = Ce^t$. Αντικαθιστώντας στην αρχική διαφορική εξίσωση, έχουμε: $Ce^t - 2Ce^t = 4e^t \Rightarrow \ -Ce^t = 4e^t \Rightarrow C = -4$. Γενική Λύση:
$y(t) = y_h(t) + \bar{y}(t) = Ae^{2t} - 4e^t$.

4. $\dot{y} = y - \beta y^2, \quad y(0) = y_0$

$\dot{y} - y = -\beta y^2$. Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της εξίσωσης με y^{-2} έχουμε:
$\dot{y}\ y^{-2} - y\ y^{-2} = -\beta y^2\ y^{-2}$ ή $\dot{y}\ y^{-2} - y^{-1} = -\beta$ (*).

Θέτουμε: $z = y^{-1}$, $\dot{z} = -y^{-2}\dot{y}$ και τις αντικαθιστούμε στην (*): $-\dot{z} - z = -\beta$
$\dot{z} + z = \beta$. Έτσι, λύνουμε την διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η ομογενής εξίσωση γράφεται ως εξής: $\dot{z} + z = 0$ και η λύση της είναι: $z_h(t) = Ae^{-t}$. Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε την: $\bar{z}(t) = C$. Αντικαθιστώντας στην αρχική διαφορική εξίσωση, έχουμε: $C = \beta$. Γενική Λύση:
$z(t) = z_h(t) + \bar{z}(t) = Ae^{-t} + \beta$. Επομένως, $y(t)^{-1} = Ae^{-t} + \beta$ ή $y(t) = \frac{1}{Ae^{-t}+\beta}$. Από την αρχική συνθήκη έχουμε: $y(0) = \frac{1}{A+\beta} = y_0 \Rightarrow A = \frac{1}{y_0} - \beta$. Οπότε, η Γενική Λύση γίνεται: $y(t) = \frac{1}{(\frac{1}{y_0}-\beta)e^{-t}+\beta}$

Ασκήσεις 4.4

1. (α). Τιμή Ισορροπίας:

$$D(t) = S(t) \Rightarrow \ 100 - 2P(t) = 0{,}5P(t) \ \Rightarrow \ P^*(t) = 40$$

(β). $\dot{P}(t) = 0{,}5[D(t) - S(t)],\ P(0) = 10$.

$\dot{P}(t) = 0{,}5[D(t) - S(t)] = 0{,}5[100 - 2P(t) - 0{,}5P(t)] = 0{,}5[100 - 2{,}5P(t)] = 50 - 1{,}25P(t)$
ή
$\dot{P}(t) + 1{,}25P(t) = 50$.
Η ομογενής εξίσωση γράφεται ως εξής: $\dot{P}(t) + 1{,}25P(t) = 0$ και η λύση της είναι: $P_h(t) = Ae^{-1{,}25t}$.
Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε την: $\overline{P}(t) = b$.
Αντικαθιστώντας την στην αρχική διαφορική εξίσωση, έχουμε: $1{,}25b = 50 \Rightarrow b = 40$.

Γενική Λύση: $P(t) = P_h(t) + \overline{P}(t) = Ae^{-1{,}25t} + 40$. Για τον προσδιορισμό του A χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη, οπότε: $P(0) = A + 40 = 10 \Rightarrow A = -30$. Οπότε η Γενική Λύση γίνεται: $P(t) = -30e^{-1{,}25t} + 40$

(γ). Η ισορροπία είναι ευσταθής, αφού $-1{,}25 < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ομογενής λύση τείνει στο μηδέν καθώς $t \to +\infty$.

2. $D(t) = a_0 + a_1P(t) + a_2\dot{P}(t) + \ddot{P}(t)$
$S(t) = \beta_0 + \beta_1P(t) + \gamma e^{\delta t}$
Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής είναι:
$\dot{P}(t) = k[D(t) - S(t)] = k[a_0 + a_1P(t) + a_2\dot{P}(t) + \ddot{P}(t) - \beta_0 - \beta_1P(t) - \gamma e^{\delta t}]$ ή
$\ddot{P}(t) + (a_2 - k)\dot{P}(t) + (a_1 - \beta_1)P(t) = (\beta_0 - a_0) + \gamma e^{\delta t}$ (*)
Η λύση του ομογενούς μέρους προσδιορίζεται με τον συνήθη τρόπο. Για την ειδική λύση δοκιμάζουμε την $\overline{P}(t) = C_0 + C_1e^{\delta t}$ από την οποία λαμβάνουμε:
$\dfrac{d\overline{P}(t)}{dt} = \delta C_1e^{\delta t}, \dfrac{d^2\overline{P}(t)}{dt^2} = \delta^2C_1e^{\delta t}$. Αντικαθιστώντας στην (*) και εξισώνοντας τον συντελεστή του $e^{\delta t}$ και τον συντελεστή του σταθερού όρου με το μηδέν, λαμβάνουμε
$C_0 = \dfrac{\beta_0 - a_0}{a_1 - \beta_1}, C_1 = \dfrac{\gamma}{\delta^2 + (a_2 - k)\delta + (a_1 - \beta_1)}$.

3. $\dot{k}(t) = sf(k) - bk$
Τα σημεία ισορροπίας προσδιορίζονται ως εξής: $\dot{k} = 0$ ή $sf(k) = bk$. Η τιμή του k^*, η οποία είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η μακροχρόνια τιμή ισορροπίας για την οικονομία. Στο σχήμα 4.15(β) (σελίδα 179) του βιβλίου φαίνονται τα 2 σημεία ισορροπίας. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως εξής: $h(k) = \dot{k} = sf(k) - bk$. Βασιζόμενοι στις υποθέσεις για την συνάρτηση παραγωγής, έχουμε: $h(0) = 0,\ h'(0) > 0,\ \lim_{k \to +\infty} h'(k) < 0$. Επιπλέον, η $h(k)$ είναι κοίλη ως άθροισμα κοίλων συναρτήσεων. Επομένως, η $h(k)$ έχει τη μορφή που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.15(β) Από τα δύο σημεία ισορροπίας, η αρχή των αξόνων είναι ασταθής επειδή $h'(0) > 0$, ενώ το σημείο k^* είναι ευσταθές αφού $h'(k^*) < 0$. Εάν αυξηθεί το s, η καμπύλη $sf(k)$ θα μετακινηθεί προς τα πάνω, και το σημείο τομής της $sf(k)$ και της bk που προσδιορίζει το δεύτερο σημείο ισορροπίας, θα μετακινηθεί προς τα δεξιά. Άρα, η τιμή του k^* θα αυξηθεί. Εάν

αυξηθεί το b η καμπύλη bk θα μετακινηθεί προς τα πάνω, και σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, το σημείο ισορροπίας k^* θα μετακινηθεί προς τα αριστερά. Εάν $f(k) = k^a$, $a = 0{,}8$, $s = 0{,}5$, $b = 0{,}01$, η διαφορική εξίσωση γίνεται: $\dot{k}(t) = 0{,}5k^{0,8} - 0{,}01k$. Ισορροπία: $\dot{k} = 0$ ή $0{,}5k^{0,8} = 0{,}01k$. Τα σημεία ισορροπίας είναι: $k^* = 0$ ή $k^* = 3{,}125 * 10^8$. Για τον χαρακτηρισμό των σημείων ισορροπίας ως προς την ευστάθεια υπολογίζουμε τα: $\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}|_{k^*=0} = 0{,}4\, k^{*^{-0,2}} - 0{,}01 > 0$, άρα το σημείο ισορροπίας $k^* = 0$ είναι ασταθές. Επίσης, $\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}|_{k^*=3,125*10^8} = 0{,}4\, k^{*^{-0,2}} - 0{,}01 < 0$, άρα το σημείο ισορροπίας $k^* = 3{,}125 * 10^8$ είναι ευσταθές.

4. (α). Στο υπόδειγμα του Solow, οι ρυθμοί μεταβολής των κατά κεφαλή προϊόντος, κεφαλαίου και κατανάλωσης ισούνται με τον εξωγενή ρυθμό τεχνολογικής προόδου. Έτσι: $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = g = 0{,}03$.

(β). Για τεχνολογία Cobb-Douglas έχουμε $Y = K^a (AL)^{1-a}$, και η θεμελιώδης εξίσωση της οικονομικής μεγέθυνσης γράφεται ως: $\dot{k} = sk^a - (n + g + \delta)k$. Στην ισορροπία έχουμε: $\dot{k} = 0$ ή $sk^a = (n + g + \delta)k$ ή $k^* = \left[\frac{s}{n+g+\delta}\right]^{\frac{1}{1-a}}$. Η συνάρτηση παραγωγής σε κατά κεφαλή όρους, γράφεται: $y = k^a$, οπότε στη μακροχρόνια ισορροπία το προϊόν είναι: $y^* = k^{*^a} = \left[\frac{s}{n+g+\delta}\right]^{\frac{a}{1-a}} = \left[\frac{0{,}15}{0{,}01+0{,}03+0{,}02}\right]^{\frac{0,4}{1-0,4}} = 1{,}842$. Όταν αυξηθεί η οριακή ροπή προς αποταμίευση κατά 5%, το προϊόν ισορροπίας ανά ενεργό εργαζόμενο γίνεται: $y^{*'} = \left[\frac{s'}{n+g+\delta}\right]^{\frac{a}{1-a}} = \left[\frac{0{,}2}{0{,}01+0{,}03+0{,}02}\right]^{\frac{0,4}{1-0,4}} = 2{,}23$. Οπότε, η ποσοστιαία μεταβολή είναι: $\frac{y^{*'} - y^*}{y^*} = 0{,}21$ ή 21%.

(γ). Ο χρόνος t^* που απαιτείται για να φτάσει η τιμή του k στο ήμισυ της μακροχρόνιας τιμής ισορροπίας k^* ορίζεται ως: $t^* = \frac{-\ln(0,5)}{\lambda} = \frac{0{,}69}{\lambda}$, όπου $\lambda = -[1 - Share(k^*)](n + g + \delta) = -[1 - 0{,}4](0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}02) = 0{,}036$. Οπότε, $t^* = \frac{0{,}69}{\lambda} = \frac{0{,}69}{0{,}036} \approx 19$χρόνια.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1) α. Η προτεινόμενη λύση είναι: $V = C_1 \eta\mu(3t) + C_2 \sigma\upsilon\nu(3t)$. Οπότε:

$\frac{dV}{dt} = 3C_1 \sigma\upsilon\nu(3t) - 3C_2 \eta\mu(3t)$ και $\frac{d^2V}{dt^2} = -9C_1 \eta\mu(3t) - 9C_2 \sigma\upsilon\nu(3t)$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 9V = -9C_1 \eta\mu(3t) - 9C_2 \sigma\upsilon\nu(3t) + 9C_1 \eta\mu(3t) + 9C_2 \sigma\upsilon\nu(3t) = 0 .$$

β. Η προτεινόμενη λύση είναι: $s = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1$. Οπότε: $\frac{ds}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$ και $\frac{d^2s}{dt^2} = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε: $\frac{d^2s}{dt^2} - s = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_1 e^t - C_2 e^{-t} + 1 = 1$.

γ. Η προτεινόμενη λύση είναι: $x = \sigma\upsilon\nu(t) + Ce^{-t}$. Οπότε: $\frac{dx}{dt} = -\eta\mu(t) - Ce^{-t}$ και $\frac{d^2x}{dt^2} = -\sigma\upsilon\nu(t) + Ce^{-t}$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = -\sigma\upsilon\nu(t) + Ce^{-t} - 2\eta\mu(t) - 2Ce^{-t} + \sigma\upsilon\nu(t) + Ce^{-t} = -2\eta\mu(t)\ .$$

δ. Η προτεινόμενη λύση είναι: $y = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$. Οπότε:
$\frac{dy}{dt} = -2C_1e^{-2t} + C_2e^{-2t} - 2C_2te^{-2t}$ και $\frac{d^2y}{dt^2} = 4C_1e^{-2t} - 2C_2e^{-2t} + 4C_2te^{-2t} - 2C_2e^{-2t}$.
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 4C_1e^{-2t} - 2C_2e^{-2t} + 4C_2te^{-2t} - 2C_2e^{-2t} + 4(-2C_1e^{-2t} + C_2e^{-2t} - 2C_2te^{-2t})$$
$$+4(C_1 + C_2t)e^{-2t} = 0\ .$$

2) Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι: $y = e^{mt}$. Οπότε: $\frac{dy}{dt} = me^{mt}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = m^2e^{mt}$ και $\frac{d^3y}{dt^3} = m^3e^{mt}$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:
$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow m^3e^{mt} + 3m^2e^{mt} - 2me^{mt} = 0 \Rightarrow (m^3 + 3m^2 - 2m)e^{mt} = 0$$
ή
$$\Rightarrow (m^2 + 3m - 2)me^{mt} = 0$$
$(m^2 + 3m - 2)m = 0$ (*). Η (*) έχει 3 ρίζες:
$m_1 = 0,\ m_2 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{17}),\ m_3 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})$. Γι' αυτές τις τιμές του m η $y = e^{mt}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = 0$.

3) α. $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$
Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η λύση του ομογενούς της μέρους. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ με μια διπλή ρίζα $\lambda_1, \lambda_2 = 3$. Η γενική λύση είναι $y(t) = A_1e^{3t} + A_2te^{3t}$

β. $\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 16y = 0$
Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η λύση του ομογενούς της μέρους. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ με μια διπλή ρίζα $\lambda_1, \lambda_2 = -4$. Η γενική λύση είναι $y(t) = A_1e^{-4t} + A_2te^{-4t}$

4) α. $\ddot{y} + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η λύση του ομογενούς της μέρους. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 + 2 = 0$ με $\Delta = -8 < 0$, οπότε έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2 = u \pm vi$, όπου $u = 0$, $v = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$. Οπότε η γενική λύση γράφεται: $y(t) = A_1\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}t) + A_2\eta\mu(\sqrt{2}t)$. Για να προσδιορίσουμε τα A_1, A_2 βρίσκουμε το $\dot{y}(t) = -\sqrt{2}A_1\eta\mu(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}A_2\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}t)$ και χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες: $y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ και $\dot{y}(0) = 1 \Rightarrow \sqrt{2}A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Οπότε η γενική λύση γίνεται: $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\mu(\sqrt{2}t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu(\sqrt{2}t)$.

β. $\ddot{y}+5\dot{y}+5y=5,\ \ y(0)=1,\ \ \dot{y}(0)=0$

Για τη λύση του ομογενούς της μέρους χρησιμοποιούμε τη χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2+5\lambda+5=0$ με $\Delta=5>0$, οπότε έχουμε δύο πραγματικές ρίζες

Οπότε η λύση του ομογενούς μέρους είναι:
$y_h(t)=A_1e^{(\frac{-5+\sqrt{5}}{2})t}+A_2e^{(\frac{-5-\sqrt{5}}{2})t}$. Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε $\bar{y}(t)=b$ και την αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση: $5b=5\Rightarrow b=1$. Οπότε, η γενική λύση γίνεται: $y(t)=y_h(t)+\bar{y}(t)=A_1e^{(\frac{-5+\sqrt{5}}{2})t}+A_2e^{(\frac{-5-\sqrt{5}}{2})t}+1$. Για να προσδιορίσουμε τα A_1,A_2 βρίσκουμε το $\dot{y}(t)=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}A_1e^{(\frac{-5+\sqrt{5}}{2})t}+\frac{-5-\sqrt{5}}{2}A_2e^{(\frac{-5-\sqrt{5}}{2})t}$ και χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες: $y(0)=1\Rightarrow A_1+A_2+1=1\ \ \Rightarrow A_1=-A_2$ και $\dot{y}(0)=0\Rightarrow\frac{-5+\sqrt{5}}{2}A_1+\frac{-5-\sqrt{5}}{2}A_2=0$. Λύνοντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει: $A_1=0$, $A_2=0$. Οπότε η γενική λύση γίνεται: $y(t)=1$.

γ. $\ddot{y}-6\dot{y}+9y=2e^{3t},\ \ y(0)=1,\ \ \dot{y}(0)=1$
Για τη λύση του ομογενούς της μέρους χρησιμοποιούμε τη χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2-6\lambda+9=0$ με $\Delta=0$, οπότε έχουμε μία διπλή ρίζα: $\lambda_1,\lambda_2=3$. Οπότε η λύση του ομογενούς μέρους είναι: $y_h(t)=A_1e^{3t}+A_2te^{3t}$. Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης δοκιμάζουμε τις $\bar{y}(t)=\Gamma e^{3t}$ και $\bar{y}(t)=t\Gamma e^{3t}$, από τις οποίες προκύπτει απροσδιοριστία (ο συντελεστής Γ παραμένει απροσδιόριστος). Γι' αυτό δοκιμάζουμε την: $\bar{y}(t)=t^2\Gamma e^{3t}$ και παραγωγίζοντας έχουμε: $\dot{\bar{y}}(t)=2t\Gamma e^{3t}+3t^2\Gamma e^{3t}$ και $\ddot{\bar{y}}(t)=2\Gamma e^{3t}+6t\Gamma e^{3t}+6t\Gamma e^{3t}+9t^2\Gamma e^{3t}$. Τις αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση και έχουμε: $\Gamma=1$. Οπότε η ειδική λύση είναι: $\bar{y}(t)=t^2e^{3t}$. Η γενική λύση γίνεται: $y(t)=y_h(t)+\bar{y}(t)=A_1e^{3t}+A_2te^{3t}+t^2e^{3t}$. Για να προσδιορίσουμε τα A_1,A_2 βρίσκουμε το $\dot{y}(t)=3A_1e^{3t}+A_2e^{3t}+3A_2te^{3t}+2te^{3t}+3t^2e^{3t}$ και χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες: $y(0)=1\Rightarrow A_1=1$ και $\dot{y}(0)=1\Rightarrow 3A_1+A_2=1\Rightarrow A_2=-2$.
Οπότε η γενική λύση γίνεται: $y(t)=e^{3t}-2te^{3t}+t^2e^{3t}$.

5) $\frac{dy}{dt}=yt(t^2-2)^{-1/2}$ ή $(t^2-2)^{1/2}dy=ytdt$

Διαιρούμε την εξίσωση με: $(t^2-2)^{1/2}y$. Έτσι, έχουμε:
$\frac{(t^2-2)^{1/2}}{(t^2-2)^{1/2}y}dy=\frac{yt}{(t^2-2)^{1/2}y}dt\Rightarrow\frac{1}{y}dy-\frac{t}{(t^2-2)^{1/2}}dt=0$. Ολοκληρώνοντας έχουμε:
$\int\frac{1}{y}dy-\int\frac{t}{(t^2-2)^{1/2}}dt=A$ ή $\ln y-(t^2-2)^{1/2}=A$. [Σημ: το ολοκλήρωμα $\int\frac{t}{(t^2-2)^{1/2}}dt$ λύνεται με τη μέθοδο της αλλαγής μεταβλητής. Έτσι, θέτουμε $u=t^2-2$, οπότε $du=2tdt$. Επομένως, έχουμε: $\int\frac{t}{(t^2-2)^{1/2}}dt=\int\frac{1}{2u^{1/2}}du=u^{1/2}+c=(t^2-2)^{1/2}+c$.]

6) α. $t^2\dot{y}+3yt=\frac{1}{t}\sigma\upsilon\nu x$ ή $\dot{y}+\frac{3}{t}y=\frac{1}{t^3}\sigma\upsilon\nu x$
Για την εξίσωση αυτή ισχύει: $a_1(t)=\frac{3}{t}$ και $g(t)=\frac{1}{t^3}\sigma\upsilon\nu x$, οπότε:
$\int a_1(t)dt=\int\frac{3}{t}dt=3\ln t$ και $\exp\int a_1(t)dt=e^{3\ln t}=t^3$. Η λύση της εξίσωσης προκύπτει

από τον ακόλουθο τύπο: $\frac{d}{dt}[(\exp\int a_1(t)dt)y(t)] = g(t)[\exp\int a_1(t)dt]$. Οπότε,
$\frac{d}{dt}[t^3 y(t)] = \frac{1}{t^3}\sigma\upsilon\nu x\; t^3$. Ολοκληρώνοντας, έχουμε: $t^3 y(t) = \int(\sigma\upsilon\nu x)dt$ ή
$t^3 y(t) = (\sigma\upsilon\nu x)t + A$ ή $y(t) = \frac{1}{t^2}\sigma\upsilon\nu x + A$

β. $t\dot{y} + 3y = t^4$ ή $\dot{y} + \frac{3}{t}y = t^3$

Για την εξίσωση αυτή ισχύει: $a_1(t) = \frac{3}{t}$ και $g(t) = t^3$, οπότε: $\int a_1(t)dt = \int \frac{3}{t}dt = 3\ln t$ και $\exp\int a_1(t)dt = e^{3\ln t} = t^3$. Η λύση της εξίσωσης προκύπτει από τον ακόλουθο τύπο: $\frac{d}{dt}[(\exp\int a_1(t)dt)y(t)] = g(t)[\exp\int a_1(t)dt]$. Οπότε, $\frac{d}{dt}[t^3 y(t)] = t^3$.
Ολοκληρώνοντας, έχουμε: $t^3 y(t) = \int t^3 dt$ ή $t^3 y(t) = \frac{t^4}{4} + A$ ή $y(t) = \frac{t^4}{7} + A$

7) $\dot{y} = y(a - by)$, $a,b > 0$

$\dot{y} = ay - by^2$. Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας:
$\dot{y} = 0 \Rightarrow y(a - by) = 0 \Rightarrow y^* = 0$ ή $y^* = \frac{a}{b}$.

Χαρακτηρισμός σημείων ισορροπίας ως προς την ευστάθεια: $\frac{d\dot{y}}{dy} = a - 2by$.
Επομένως, υπολογίζουμε τα εξής: $\frac{d\dot{y}}{dy}\Big|_{y^*=0} = a > 0$, που σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας $y^* = 0$ είναι ασταθές και $\frac{d\dot{y}}{dy}\Big|_{y^*=\frac{a}{b}} = a - 2b\frac{a}{b} = -a < 0$, που σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας $y^* = \frac{a}{b}$ είναι ευσταθές. Το διάγραμμα είναι παρόμοιο με το διάγραμμα 4.15(β), σελίδα 179.

Εάν αυξηθούν τα a,b έχουμε 3 περιπτώσεις: 1) Εάν αυξηθούν τόσο ώστε ο λόγος $\frac{a}{b}$ να μείνει σταθερός, τότε το σχήμα δεν αλλάζει. 2) Εάν αυξηθεί περισσότερο το a ώστε ο λόγος $\frac{a}{b}$ να αυξηθεί και $(\frac{a}{b})' > \frac{a}{b}$, το σημείο τομής στον οριζόντιο άξονα y μετακινείται προς τα δεξιά. 3) Εάν αυξηθεί λιγότερο το a σε σχέση με το b ώστε ο λόγος $\frac{a}{b}$ να μειωθεί και $(\frac{a}{b})'' < \frac{a}{b}$, το σημείο τομής στον οριζόντιο άξονα y μετακινείται προς τα αριστερά.

8)
$$D(t) = S(t) \Rightarrow a_0 + a_1 P(t) + a_2\dot{P}(t) + \ddot{P}(t) = \beta_0 + \beta_1 P(t) \Rightarrow \ddot{P}(t) + a_2\dot{P}(t) + (a_1 - \beta_1)P(t) = \beta_0 - a_0$$

(α). Για τις τιμές $a_0 = 50$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $\beta_0 = 90$, $\beta_1 = 2$ << να διορθωθεί η τιμή της παραμέτρου β_0 στην εκφώνηση της άσκησης από 10 σε 90.>>, έχουμε:
$\ddot{P}(t) + 2\dot{P}(t) + 2P(t) = 40$. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, με Δ=-4<0.
Οπότε υπολογίζουμε τα: $u = \frac{-2}{2} = -1$ και $v = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$. Έτσι, η λύση του ομογενούς μέρους είναι:
$P_h(t) = e^{ut}[A_1\sigma\upsilon\nu(vt) + A_2\eta\mu(vt)] = e^{-t}[A_1\sigma\upsilon\nu(t) + A_2\eta\mu(t)]$. Για την ειδική λύση, δοκιμάζουμε: $\overline{P}(t) = b$, και αντικαθιστώντας το στην διαφορική εξίσωση, προκύπτει: $2b = -40 \Rightarrow b = 20$. Επομένως, η τιμή ισορροπίας είναι $\overline{P}(t) = 20$. Η γενική λύση γίνεται: $P(t) = P_h(t) + \overline{P}(t) = e^{-t}[A_1\sigma\upsilon\nu(t) + A_2\eta\mu(t)] + 20$. Υπολογίζουμε το:
$\dot{P}(t) = -A_1\eta\mu t\, e^{-t} - A_1\sigma\upsilon\nu t\, e^{-t} + A_2\sigma\upsilon\nu t\, e^{-t} - A_2\eta\mu t\, e^{-t}$. Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε: $P(0) = 5 \Rightarrow A_1 - 20 = 5 \Rightarrow A_1 = 25$ και
$\dot{P}(0) = 1 \Rightarrow -A_1 + A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = 26$. Οπότε, η γενική λύση γίνεται:
$P(t) = e^{-t}[25\sigma\upsilon\nu(t) + 26\eta\mu(t)] + 20$. Για την ευστάθεια, εξετάζουμε την τιμή του

$u=-1<0$. Άρα η τιμή ισορροπίας είναι ευσταθής.
(β). Για τις τιμές $a_0=50,\ a_1=4,\ a_2=3,\ \beta_0=90,\ \beta_1=2$, έχουμε:
$\ddot{P}(t)+3\dot{P}(t)+2P(t)=-40$. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2+3\lambda+2=0$, με Δ=1>0.
Οπότε έχουμε δύο πραγματικές ρίζες: $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=-2$. Έτσι, η λύση του ομογενούς μέρους είναι: $P_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$. Για την ειδική λύση, δοκιμάζουμε: $\overline{P}(t)=b,$ και αντικαθιστώντας το στην διαφορική εξίσωση, προκύπτει:
$2b=-40\ \Rightarrow\ b=20$. Επομένως, η τιμή ισορροπίας είναι $\overline{P}(t)=20$. Η γενική λύση γίνεται: $P(t)=P_h(t)+\overline{P}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}+20$. Υπολογίζουμε το:
$\dot{P}(t)=-A_1e^{-t}-2A_2e^{-2t}$. Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:
$P(0)=5\ \Rightarrow A_1+A_2-20=5$ και $\dot{P}(0)=1\ \Rightarrow -A_1-2A_2=1$. Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $A_1=51$ και $A_2=-26$. Οπότε, η γενική λύση γίνεται:
$P(t)=51e^{-t}-26e^{-2t}+20$. Για την ευστάθεια, εξετάζουμε τα $\lambda_1,\lambda_2<0$. Άρα η τιμή ισορροπίας είναι ευσταθής.
(γ). Για τις τιμές $a_0=50,\ a_1=4,\ a_2=\sqrt{8},\ \beta_0=90,\ \beta_1=2$, έχουμε:
$\ddot{P}(t)+\sqrt{8}\dot{P}(t)+2P(t)=40$. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2+\sqrt{8}\lambda+2=0$, με Δ=0.
Οπότε έχουμε μία διπλή ρίζα: $\lambda_1,\ \lambda_2=-\sqrt{2}$. Έτσι, η λύση του ομογενούς μέρους είναι: $P_h(t)=A_1e^{-\sqrt{2}t}+A_2te^{-\sqrt{2}t}$. Για την ειδική λύση, δοκιμάζουμε: $\overline{P}(t)=b,$ και αντικαθιστώντας το στην διαφορική εξίσωση, προκύπτει: $2b=-40\ \Rightarrow\ b=20$.
Επομένως, η τιμή ισορροπίας είναι $\overline{P}(t)=20$. Η γενική λύση γίνεται:
$P(t)=P_h(t)+\overline{P}(t)=A_1e^{-\sqrt{2}t}+A_2te^{-\sqrt{2}t}+20$. Υπολογίζουμε το:
$\dot{P}(t)=-\sqrt{2}A_1e^{-\sqrt{2}t}+A_2e^{-\sqrt{2}t}-\sqrt{2}A_2te^{-\sqrt{2}t}$. Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:
$P(0)=5\ \Rightarrow A_1-20=5\ \Rightarrow A_1=25$ και
$\dot{P}(0)=1\ \Rightarrow -\sqrt{2}A_1+A_2=1\Rightarrow A_2=1+\sqrt{2}\ 25$. Οπότε, η γενική λύση γίνεται:
$P(t)=25e^{-\sqrt{2}t}+(1+\sqrt{2}\ 25)te^{-\sqrt{2}t}+20$. Για την ευστάθεια, εξετάζουμε τα $\lambda_1,\lambda_2<0$.
Άρα η τιμή ισορροπίας είναι ευσταθής.

(δ). Για τις τιμές $a_0=50,\ a_1=4,\ a_2=-0{,}5,\ \beta_0=90,\ \beta_1=2$,έχουμε:
$\ddot{P}(t)-0{,}5\dot{P}(t)+2P(t)=40$. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2-0{,}5\lambda+2=0$, με Δ<0.
Ακολουθώντας τα βήματα του ερωτήματος (α), προκύπτει η εξής γενική λύση:
$P(t)=e^{\frac{1}{4}t}[25\sigma\upsilon\nu(\frac{\sqrt{31}}{4}t)-\frac{21}{31}\eta\mu(\frac{\sqrt{31}}{4}t)\sqrt{31}]+20$. Για την ευστάθεια, εξετάζουμε την τιμή του $u=\frac{1}{4}>0$. Άρα η τιμή ισορροπίας είναι ασταθής.

9) Θεωρώντας τη γραμμική συνάρτηση παραγωγής σε κατά κεφαλή όρους, $y=Ak$, η θεμελιώδης εξίσωση της οικονομικής μεγέθυνσης γράφεται ως: $\dot{k}=sAk-(n+\delta)k$. Διαιρώντας και τα δύο μέλη με k έχουμε: $\frac{\dot{k}}{k}=\frac{sAk-(n+\delta)k}{k}=sA-(n+\delta)$. Εξ' ορισμού, στη μακροχρόνια ισορροπία, το $\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^*$ είναι σταθερό. Αφού, λοιπόν, τα n,δ,s είναι σταθερά, θα πρέπει και το A να είναι σταθερό και έτσι, έχουμε:
$\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^*=sA-(n+\delta)=x$. Το κατά κεφαλή εισόδημα δίνεται από τον τύπο: $y=Ak$.
Παραγωγίζοντας, έχουμε: $\dot{y}=\dot{A}k+A\dot{k}$. Διαιρώντας και τα δύο μέλη με y :
$\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{A}k+A\dot{k}}{y}=\frac{\dot{A}k+A\dot{k}}{Ak}=\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{k}}{k}$. Αφού στη σταθερή κατάσταση το A δεν μεταβάλλεται,

έχουμε: $\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^* = 0$, οπότε $\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^* = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^* = sA - (n+\delta) = x$. Τέλος, η κατά κεφαλή κατανάλωση προσδιορίζεται από τη σχέση: $c = (1-s)\,y$. Επομένως, $\dot{c} = (1-s)\,\dot{y}$ και διαιρώντας με c έχουμε: $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{(1-s)\,\dot{y}}{c} = \frac{(1-s)\,\dot{y}}{(1-s)\,y} = \frac{\dot{y}}{y} = x$. Συνοψίζοντας, $\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^* = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^* = \left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^* = x$.