ΞΕΠΑΠΑΔΕΑΣ – ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

1. **Αν Α και Β είναι δύο σύνολα, να αποδείξετε ότι $(A\cap B^c)\cup B=(B\cap A^c)\cup A=A\cup B$**

ΛΥΣΗ: Εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης ως προς την τομή έχουμε:

$$\left(A\cap B^c\right)\cup B=\left(A\cup B\right)\cap\left(B^c\cup B\right)=A\cup B$$

Παρόμοια είναι $\left(B\cap A^c\right)\cup A=\left(B\cup A\right)\cap\left(A^c\cup A\right)=A\cup B$

2. **Αν Α και Β είναι δύο σύνολα, να αποδείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (νόμοι De Morgan):**

   (α) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ και

   (β) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

ΛΥΣΗ: (α) $x\in(A\cup B)^c$ αν και μόνο αν $x\notin(A\cup B)$ ή ($x\notin A$ και $x\notin B$) ή ($x\in A^c$ και $x\in B^c$)

(β) Η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται παρόμοια.

3. **Θεωρήστε δύο σύνολα Α και Β. Να αποδείξετε ότι**

   (α) $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$

   (β) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

   (γ) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ΛΥΣΗ:

(α) $\left(A-B\right)\cap\left(A\cap B\right)=\left(A\cap B^c\right)\cap\left(A\cap B\right)$

$=\left(A\cap B^c\right)\cap\left(B\cap A\right)$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

$=A\cap\left(B^c\cap B\right)\cap A=\varnothing$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(β) $\left(A-B\right)\cap\left(B-A\right)=\left(A\cap B^c\right)\cap\left(B\cap A^c\right)$

$=A\cap\left(B^c\cap B\right)\cap A^c=\varnothing$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(γ) $\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)=\left(A\cap B^c\right)\cup\left(B\cap A^c\right)$

$=\left[\left(A\cap B^c\right)\cup B\right]\cap\left[\left(A\cap B^c\right)\cup A^c\right]$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$=\left[\left(A\cup B\right)\cap\left(B^c\cup B\right)\right]\cap\left[\left(A\cup A^c\right)\cap\left(B^c\cup A^c\right)\right]$ (ομοίως)

$=\left(A\cup B\right)\cap\left(B^c\cup A^c\right)$

$=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cap B\right)^c$ (νόμος de Morgan)

$=\left(A\cup B\right)-\left(A\cap B\right)$ (διαφορά συνόλων)

4. **Αν Α και Β είναι δύο σύνολα, να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:**

   (α) $(A\cup B^c)^c=A^c\cap B$ και

   (β) $(A\cap B^c)^c=A^c\cup B$

ΛΥΣΗ: Εφαρμόζοντας τους νόμους de Morgan έχουμε:

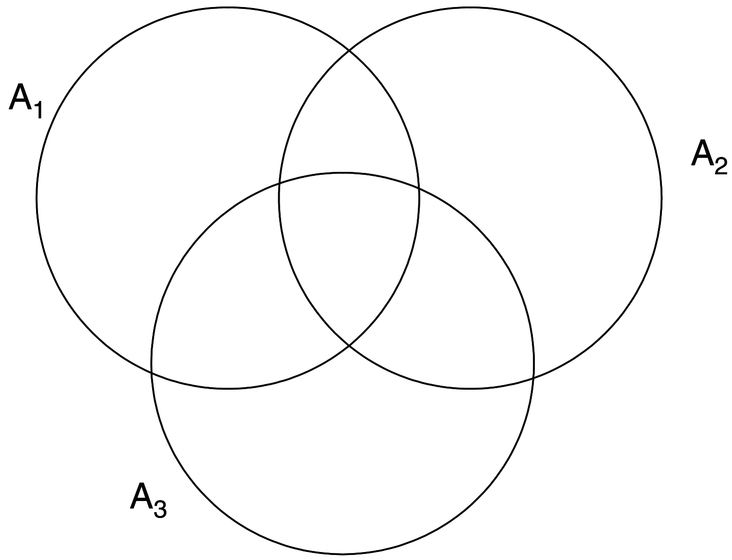
(α) $\left(A\cup B^c\right)^c=A^c\cap\left(B^c\right)^c=A^c\cap B$

(β) $\left(A \cap B^c\right)^c = A^c \cup \left(B^c\right)^c = A^c \cup B$

5. Ένα σύνολο Α έχει n στοιχεία και τρία υποσύνολά του A_1, A_2 και A_3 έχουν n_1, n_2 και n_3 στοιχεία αντίστοιχα. Επίσης, είναι γνωστό ότι τα σύνολα $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_3$ και $A_1 \cap A_2$ έχουν ν, $ν_1$, $ν_2$ και $ν_3$ στοιχεία αντίστοιχα. Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων των παρακάτω συνόλων:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_2 \cup A_3$ και $A_1 \cup A_3$

ΛΥΣΗ:



Με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn προκύπτει ότι κατά τον προσδιορισμό του πλήθους των στοιχείων της ένωσης $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ έχουμε πάρει από δύο φορές τα στοιχεία της τομής $A_i \cap A_j$ (i,j=1,2,3 και i≠j). Για το λόγο αυτό αφαιρούμε τα στοιχεία αυτά ($ν_1+ν_2+ν_3$) από το άθροισμα $n_1+n_2+n_3$. Επειδή, όμως, έτσι αφαιρούμε τα ν στοιχεία της τομής $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ μία επιπλέον φορά, προσθέτουμε το πλήθος ν στο τελικό άθροισμα και έτσι το πλήθος των στοιχείων της ένωσης $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ είναι $n_1+n_2+n_3-ν_1-ν_2-ν_3+ν$.

Παρόμοια, το πλήθος των στοιχείων της ένωσης $A_2 \cup A_3$ είναι $n_2+n_3-ν_1$ και της ένωσης $A_1 \cup A_3$ είναι $n_1+n_3ν_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

(α) $(16)^{7/4}$

(β) $(27)^{2/3}$

(γ) $(100)^{-5/2}$

ΛΥΣΗ:

(α) $(16)^{7/4} = \left(2^4\right)^{7/4} = 2^7 = 128$

(β) $(27)^{2/3} = \left(3^3\right)^{2/3} = 3^2 = 9$

(γ) $(100)^{-\frac{5}{2}} = \left(10^2\right)^{-\frac{5}{2}} = 10^{-5} = 0{,}00001$

2. **Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:**

(α) $|x_1+x_2+...+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+...+|x_n|$

(β) $|x_1+x_2+...+x_n| \geq |x_1|-|x_2|-...-|x_n|$

(γ) $|x-y| \leq |x|+|y|$

(δ) $|x-y| \geq |x|-|y|$

ΛΥΣΗ:

(α) $|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$ αν και μόνο $|x_1+x_2|^2 \leq (|x_1|+|x_2|)^2$

ή $(x_1+x_2)^2 \leq |x_1|^2+|x_2|^2+2|x_1|\cdot|x_2|$ ή… $x_1x_2 \leq |x_1x_2|$, που ισχύει.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $|x_1+x_2+...+x_n| \leq |x_1+x_2+...+x_{n-1}|+|x_n|$

$\leq |x_1|+|x_2|+...+|x_n|$

(β) Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $|x_1+x_2+...+x_n| \geq |x_1|-|x_2|-...-|x_n|$

(γ) $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|(-y)| = |x|+|y|$ (με βάση το ερώτημα (α))

(δ) $|x-y| = |x+(-y)| \geq |x|-|(-y)| = |x|-|y|$ (με βάση το ερώτημα (β))

3. **Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι φραγμένα κάτω (ή άνω) και, όπου είναι δυνατό, να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο τους, το ελάχιστο άνω φράγμα τους και το μέγιστο κάτω φράγμα τους.**

(α) A={x: x>2}

(β) B={1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,…, $\frac{1}{\nu}$,…}

ΛΥΣΗ:

(α) Το σύνολο A είναι φραγμένο κάτω με μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) το 2.

(β) Το σύνολο B είναι φραγμένο κάτω με μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) το 0 και φραγμένο άνω με μέγιστο στοιχείο το 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.3

1. **Να υπολογίσετε τις παρακάτω τιμές:**

(α) $e^{-i\pi}$

(β) $e^{-i\pi/2}$

(γ) $e^{-i\pi/3}$

ΛΥΣΗ:

(α) Αν $x = \rho e^{i\theta}$, ο x γράφεται σε μορφή πολικών συντεταγμένων ως $x = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$. Για $x = e^{-i\pi}$ είναι ρ=1 και θ=−π, οπότε $x = \sigma\upsilon\nu(-\pi) + i\eta\mu(-\pi)$ =−1+i·0=(−1, 0).

(β) Παρόμοια, αν $x = e^{-i\pi/2}$ είναι ρ=1 και θ=−π/2,

οπότε $x = \sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(-\frac{\pi}{2})$ =0−i·1=(0,−1)

(γ) Αν $x = e^{-i\pi/3}$ είναι ρ=1 και θ=−π/3, οπότε $x = \sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{3}) + i\eta\mu(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (0{,}5, -0{,}866)$

2. Αν z∈C να αποδείξετε ότι $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

ΛΥΣΗ:

Αν $z = x + y \cdot i$, τότε $\bar{z} = x - y \cdot i$. Επομένως,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

3. Αν k είναι ένας οποιοδήποτε ακέραιος αριθμός και α=4k+n, 0≤ n < 4, να αποδείξετε ότι: $i^{\alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ n=0 \\ i, & \alpha\nu\ n=1 \\ -1, & \alpha\nu\ n=2 \\ -i, & \alpha\nu\ n=3 \end{cases}$

ΛΥΣΗ:

Είναι $i^a = i^{4k+n} = i^{4k} \cdot i^n = \left(i^4\right)^k \cdot i^n = 1^k \cdot i^n = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ n=0 \\ i, & \alpha\nu\ n=1 \\ -1, & \alpha\nu\ n=2 \\ -i, & \alpha\nu\ n=3 \end{cases}$

4. Έστω η εξίσωση $z^8 + 13z^6 - \pi \cdot z = 0$. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός z∈C είναι λύση της εξίσωσης, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}$ είναι επίσης λύση.

ΛΥΣΗ:

Αν ο z είναι λύση της εξίσωσης, τότε $z^8 + 13z^6 - \pi \cdot z = 0$, οπότε

$\overline{z^8 + 13z^6 - \pi \cdot z} = \bar{0}$ ή $\left(\overline{z^8}\right) + 13\left(\overline{z^6}\right) - \pi \cdot \bar{z} = 0$ ή $\bar{z}^8 + 13\bar{z}^6 - \pi \cdot \bar{z} = 0$

Άρα και ο $\bar{z}$ είναι λύση της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.4

1. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R ορίζεται η διμελής σχέση α*R*β «α, β έτσι ώστε α·β≥0»Να αποδείξετε ότι η σχέση *R* είναι ανακλαστική και συμμετρική, ενώ δεν είναι αντισυμμετρική και μεταβατική.

ΛΥΣΗ:

Ανακλαστική: α*R*α σημαίνει α·α≥0, που ισχύει.

Συμμετρική: Αν α*R*β, δηλαδή α·β≥0, τότε είναι και β·α≥0, δηλαδή β*R*α.

Η σχέση *R* δεν είναι αντισυμμετρική γιατί α·β≥0 και β·α≥0 δε συνεπάγεται α=β. Για παράδειγμα, 5·3≥0 και 3·5≥0, αλλά 5≠3.

Τέλος, η σχέση δεν είναι μεταβατική. Πράγματι, αν π.χ. α=−1, β=0 και γ=3, τότε α·β≥0, β·γ≥0 αλλά α·γ<0.

2. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$ ορίζεται η διμελής σχέση α*R*β «α, β έτσι ώστε α·β<0». Να αποδείξετε ότι η σχέση *R* είναι μόνο συμμετρική.

ΛΥΣΗ:

Είναι προφανές ότι η σχέση είναι συμμετρική, αφού αν αβ<0, τότε και βα<0.

Δεν είναι ανακλαστική γιατί $\alpha\cdot\alpha=\alpha^2\geq 0$.

Δεν είναι μεταβατική γιατί αν π.χ. α=1, β=−2 και γ=4, τότε είναι α·β<0 και β·γ<0, ενώ α·γ>0.

3. Στο σύνολο $\Re^2$ ορίζεται η διμελής σχέση (α, β) *R* (γ, δ) «α<γ ή (α=γ και β≤δ)». Να αποδείξετε ότι η σχέση αυτή είναι σχέση πλήρους διάταξης στο $\Re^2$.

ΛΥΣΗ:

Θα δείξουμε ότι η σχέση είναι ανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική.

Είναι προφανές ότι η *R* είναι ανακλαστική.

Επίσης, έστω (α,β)*R*(γ,δ) και (γ,δ)*R*(ε,ζ). Τότε είναι:

α<γ ή (α=γ και β≤δ) και

γ<ε ή (γ=δ και δ≤ζ)

Εξετάζοντας όλες τις περιπτώσεις καταλήγουμε ότι είναι α<ε ή (α=ε και β≤ζ) οπότε (α,β)*R*(ε,ζ) και η σχέση είναι μεταβατική.

Τέλος, η *R* είναι αντισυμμετρική γιατί αν (α,β)*R*(γ,δ) και (γ,δ)*R*(α,β), δηλαδή αν

α<γ ή (α=γ και β≤δ) και ταυτόχρονα

γ<α ή (γ=α και δ≤β)

τότε είναι α=γ και β=δ, δηλαδή (α,β)=(γ,δ).

4. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$ ορίζεται η διμελής σχέση α*R*β «η διαφορά α−β είναι πολλαπλάσιο του 50». Να αποδείξετε ότι η σχέση *R* είναι σχέση ισοδυναμίας.

ΛΥΣΗ:

Θα δείξουμε ότι η *R* είναι ανακλαστική, μεταβατική και συμμετρική.

Η σχέση είναι ανακλαστική γιατί α*R*α σημαίνει ότι η διαφορά α−α=0 είναι πολλαπλάσιο του 50, που ισχύει.

Η σχέση είναι μεταβατική, γιατί αν α*R*β και β*R*γ τότε:

- Η διαφορά α−β είναι πολλαπλάσιο του 50 και μπορεί να γραφεί α−β=50κ (k∈Z)
- Η διαφορά β−γ είναι πολλαπλάσιο του 50 και μπορεί να γραφεί β−γ=50μ (μ∈Z).

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει α−γ=50(κ+μ), δηλαδή και η διαφορά α−γ είναι πολλαπλάσιο του 50.

Τέλος, η σχέση *R* είναι συμμετρική, γιατί αν α*R*β, δηλαδή αν α−β=50κ (k∈Z), τότε είναι β−α=5(−κ), οπότε β*R*α.

Επομένως, η *R* είναι σχέση ισοδυναμίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.5

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες. Για κάθε συνάρτηση που είναι αντιστρέψιμη να βρείτε την αντίστροφή της.

(α) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ **, x∈[0, +∞)**

(β) $g(x)=2+e^{x-1}$**, x∈ℜ**

(γ) $h(x)=|x|+1$**, x∈ℜ**

(δ) $u(x)=\sqrt{x+1}$**, x∈[−1, +∞)**

ΛΥΣΗ:

(α) Η f είναι αντιστρέψιμη γιατί για κάθε y του πεδίου τιμών της υπάρχει ένα μόνο x του πεδίου ορισμού της, το $x=-\dfrac{y}{y-1}$. Πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο των y για τα οποία x∈[0, +∞) δηλαδή $-y(y-1)\geq 0$ ή y∈[0, 1).

(β) Παρόμοια, η g είναι αντιστρέψιμη γιατί σε κάθε y του πεδίου τιμών της αντιστοιχεί ένα μόνο x του πεδίου ορισμού της, το $x=\ln(y-2)+1$. Πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το (2, +∞).

(γ) Η h δεν είναι αντιστρέψιμη γιατί π.χ. h(1)=h(−1)=2.

(δ) Η u είναι αντιστρέψιμη γιατί σε κάθε y του πεδίου τιμών της, που είναι το διάστημα [0, +∞), αντιστοιχεί ένα μόνο x, το $x=y^2-1$. Πεδίο ορισμού της u^{-1} είναι το πεδίο τιμών της u, δηλαδή το [0, +∞).

2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$**, x ≠ −1 και**

$g(x)=\dfrac{1}{x}$**, x ≠ 0**

Να βρείτε τη συνάρτηση g°f

ΛΥΣΗ:

Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο ℜ−{−1}. Για να ορίζεται η g°f πρέπει να είναι f(x)≠0, δηλαδή x≠3. Επομένως, η g°f ορίζεται στο σύνολο ℜ−{−1, 3} και έχει τύπο

$$(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=\frac{1}{f(x)}=\frac{x+1}{x-3}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$**. Να βρείτε τη συνάρτηση f°f.**

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση f°f ορίζεται στο ℜ και έχει τύπο:

$$(f\circ f)(x)=f\left[f(x)\right]=\left[f(x)\right]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

4. Να αποδείξετε ότι $\ln(x)+\ln(\frac{1}{x})=0$**.**

ΛΥΣΗ:

$$\ln(x)+\ln(\frac{1}{x})=\ln(x\cdot\frac{1}{x})=\ln(1)=0$$

5. Να λύσετε την εξίσωση $\log_6(x+5)+\log_6(x)=2$**.**

ΛΥΣΗ:

$\log_6(x+5)+\log_6(x)=2$ ή $\log_6\left[x(x+5)\right]=2$ ή $x(x+5)=6^2$ ή

$x^2+5x-36=0$, που έχει ρίζες $x_1=4$ ή $x_2=-9$ η οποία απορρίπτεται. Άρα x=4.

6. Να λύσετε την εξίσωση $(1,1)^x = 1,999$.

ΛΥΣΗ:

$$(1,1)^x = 1,999 \text{ ή } x\ln(1,1) = \ln(1,999) \text{ ή } x = \frac{\ln(1,999)}{\ln(1,1)} \approx 7,2673$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

1. Έστω ένα καθολικό σύνολο S και δύο υποσύνολά του A και B. Να αποδείξετε ότι:

(α) αν $A\subseteq B$, τότε $B^c\subseteq A^c$
(β) αν $A\subseteq B$, τότε $A\cup(B-A)=B$
(γ) $A-B\subseteq A\cup B$
(δ) $(A-B)^c=A^c\cup B$
(ε) $B^c-A^c=A-B$

ΛΥΣΗ:

(α) Αν $A\subseteq B$, τότε $A\cap B=A$ και $(A\cap B)^c=A^c$, οπότε $A^c\cup B^c=A^c$, που σημαίνει ότι $B^c\subseteq A^c$.

(β) Αν $A\subseteq B$, τότε $A\cup B=B$ οπότε

$$A\cup(B-A)=A\cup\left(B\cap A^c\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup A^c\right)=A\cup B=B$$

(γ) Αν $x\in A-B$, τότε $x\in A$, οπότε $x\in(A\cup B)$. Επομένως $A-B\subseteq A\cup B$.

(δ) $(A-B)^c=\left(A\cap B^c\right)^c=A^c\cup\left(B^c\right)^c=A^c\cup B$

(ε) $B^c-A^c=B^c\cap\left(A^c\right)^c=B^c\cap A=A\cap B^c=A-B$

2. Έστω ένα καθολικό σύνολο S και τρία υποσύνολά του A, B και C. Να αποδείξετε ότι:

(α) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$
(β) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$
(γ) $A-(B-C)^c=(A\cap B)-C$
(δ) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ΛΥΣΗ:

(α) $A-(B-C)=\left(A\cap B^c\right)\cap C^c=A\cap\left(B^c\cap C^c\right)=A\cap(B\cup C)^c=A-(B\cup C)$

(β) $A-(B-C)=A\cap(B-C)^c=A\cap\left(B\cap C^c\right)^c=A\cap\left(B^c\cup C\right)$

$$=\left(A\cap B^c\right)\cup\left(A\cap C\right)=(A-B)\cup(A\cap C)$$

(γ) $A-(B-C)^c=A\cap(B-C)=A\cap\left(B\cap C^c\right)=(A\cap B)\cap C^c=(A\cap B)-C$

(δ) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C^c=\left(A\cap C^c\right)\cup\left(B\cap C^c\right)=(A-C)\cup(B-C)$

3. Θεωρήστε τα παρακάτω υποσύνολα του συνόλου των φυσικών αριθμών N:

$X_i=\{x\in N \mid 10(i-1)<x\leq 10i,\ i\in N\}$
Να αποδείξετε ότι τα υποσύνολα X_i αποτελούν διαμερισμό του N.

ΛΥΣΗ: Θα δείξουμε ότι για κάθε i∈N και j∈N με i≠j είναι $X_i \cap X_j = \varnothing$ και ότι $\bigcup_i X_i = N$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι i<j. Τότε i≤j−1 οπότε 10i≤10(j−1). Έστω ένας φυσικός αριθμός k∈X_i. Τότε θα είναι 10(i−1)<k≤10i. Επειδή, όμως, 10i≤10(j−1), θα είναι και k≤10(j−1), οπότε k∉X_j. Επομένως, $X_i \cap X_j = \varnothing$.

Για να αποδείξουμε ότι $\bigcup_i X_i = N$, θα δείξουμε ότι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός k θα ανήκει σε κάποιο σύνολο X_i με i∈N. Πράγματι, οποιοσδήποτε k∈N μπορεί να γραφεί ως k=10π+υ, όπου π είναι το πηλίκο της διαίρεσης του k με το 10 και υ το υπόλοιπο. (0≤υ<10). Αν υ>0, τότε είναι 10π<k≤10(π+1) και ο k ανήκει στο σύνολο $X_{π+1}$. Διαφορετικά, αν υ=0, τότε k=10π και ο k ανήκει στο σύνολο $X_π$.

4. (α) Έστω s_A ένα άνω φράγμα ενός συνόλου A. Να αποδείξετε ότι s_A=supA αν και μόνο αν για κάθε ε>0 υπάρχει α′∈A τέτοιο ώστε α′>s_A−ε.
(β) Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα του ℜ. Θεωρήστε το σύνολο C={a+b | a∈A και b∈B}. Να αποδείξετε ότι supC=supA+supB.

ΛΥΣΗ:

(α) Έστω s_A=supA. Προφανώς α≤s_A για κάθε α∈A. Επίσης, για κάθε ε>0 η διαφορά s_A−ε<s_A δεν είναι άνω φράγμα για το σύνολο A, οπότε υπάρχει α′∈A τέτοιο ώστε α′>s_A−ε.

Αντίστροφα, αν α≤s_A και για κάθε ε>0 υπάρχει α′∈A τέτοιο ώστε α′>s_A−ε, τότε το s_A είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει M τέτοιο ώστε α≤M και M<s_A. Τότε, αν θέσουμε ε=s_A−M>0 υπάρχει α′∈A τέτοιο ώστε α′>s_A−s_A+M ή α′>M, που είναι άτοπο γιατί το M είναι άνω φράγμα.

(β) Έστω s_A=supA, s_B=supB και c=a+b ένα οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου C. Τότε a≤ s_A και b≤ s_A και κάθε ε>0 θα υπάρχουν a′∈A και b′∈B τέτοια ώστε a′>s_A−ε και b′>s_B−ε. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε c=a+b≤s_A+s_B και a′+b′>s_A+s_B−2ε ή c′>s_A+s_B−ε′ (θέσαμε c′=a′+b′ και ε′=2ε). Επομένως, το s_A+s_B είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) του συνόλου C.

5. Έστω ένα σύνολο A⊂ℜ, το οποίο είναι φραγμένο άνω. Θεωρήστε το σύνολο B={x∈ℜ | −x∈A}. Να αποδείξετε ότι infB=−supA.

ΛΥΣΗ:

Έστω s=supA. Τότε για κάθε x∈A είναι x≤s, οπότε −s≤−x. Αν x′=−x, τότε x′∈B και x′≥−s για κάθε x′∈B. Άρα το −s είναι κάτω φράγμα για το σύνολο B.

Επειδή s=supA, για κάθε ε>0 υπάρχει α∈A τέτοιο ώστε α>s−ε, οπότε −α>−s+ε (βλέπε προηγούμενη άσκηση). Αν α′=−α, τότε α′∈B και α′>−s+ε, οπότε το −s είναι το μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) του συνόλου B.

6. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι φραγμένα κάτω (ή άνω) και, όπου είναι δυνατό, να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο τους.

(α) $A = \{(-1)^n, \quad n \in N\}$

(β) $B = \{\frac{1}{n^2}, \quad n \in N\}$

(γ) $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2n, 2n+1]$

ΛΥΣΗ:

(α) Το σύνολο Α={−1,1} είναι φραγμένο κάτω με ελάχιστη τιμή −1 και φραγμένο άνω με μέγιστη τιμή 1.

(β) Το σύνολο $B=\{1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},...\}$ είναι φραγμένο κάτω με μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) το 0 και φραγμένο άνω με μέγιστη τιμή το 1.

(γ) Το σύνολο $C=[2,3]\cup[4,5]\cup[6,7]\cup...$ είναι φραγμένο κάτω με ελάχιστη τιμή το 2.

7. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε μορφή καρτεσιανών συντεταγμένων:

(α) $8e^{i\pi/2}$

(β) $2e^{i\pi/3}$

(γ) $e^{-3i\pi/4}$

(δ) 4(συν$\frac{\pi}{4}$+i·ημ$\frac{\pi}{4}$)

ΛΥΣΗ:

Αν $x=\rho e^{i\theta}$, ο αριθμός γράφεται σε μορφή καρτεσιανών συντεταγμένων ως $x=x_1+x_2 i$ όπου x_1=ρσυνθ και x_2=ρημθ

(α) Αν x=$8e^{i\pi/2}$ είναι ρ=8 και θ=π/2, οπότε $x_1=8\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2})$ και $x_2=8\eta\mu(\frac{\pi}{2})$. Άρα x=0+8·i=(0,8).

(β) Αν x=$2e^{i\pi/3}$ είναι ρ=2 και θ=π/3, οπότε $x_1=2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3})=1$ και $x_2=2\eta\mu(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$. Άρα x=1+$\frac{\sqrt{3}}{2}$·i=(1, 0,866).

(γ) Παρόμοια είναι x=$e^{-3i\pi/4}$=$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$·i=(−0,71, 0,71)

(δ) x=4(συν$\frac{\pi}{4}$+i·ημ$\frac{\pi}{4}$)=4συν$\frac{\pi}{4}$+i·4ημ$\frac{\pi}{4}$)=2$\sqrt{2}$ + i·$\sqrt{2}$ =(2,83, 2,83)

8. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε μορφή πολικών συντεταγμένων:

(α) 1+$\sqrt{8}$·i **(β) 5($\sqrt{6}$ + i)**

ΛΥΣΗ:

Αν $x=x_1+x_2 i$, ο x γράφεται σε μορφή πολικών συντεταγμένων ως εξής: x=ρ(συνθ+iημθ) όπου ρ=|x|, $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x_1}{|x|}$ και $\eta\mu\theta=\frac{x_2}{|x|}$

(α) Αν x=1+$\sqrt{8}$·i είναι ρ=|x|= $\sqrt{1+8}=3$, συνθ=1/3 και ημθ=$\sqrt{8}$/3.

(β) Αν x=5($\sqrt{6}$ + i)=5$\sqrt{6}$ +5i, είναι ρ=$|x|$ = $\sqrt{175}$, συνθ= $\dfrac{5\sqrt{6}}{\sqrt{175}}$ και ημθ=$\dfrac{5}{\sqrt{175}}$.

9. Αν $x_1=\rho_1$(συνθ_1+iημθ_1) και $x_2=\rho_2$(συνθ_2+iημθ_2), να αποδείξετε ότι

$$x_1 x_2 = \rho_1\rho_2\left[\text{συν}(\theta_1+\theta_2) + i\cdot \text{ημ}(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\text{συν}(\theta_1-\theta_2) + i\cdot \text{ημ}(\theta_1-\theta_2)\right]$$

ΛΥΣΗ:

Οι x_1 και x_2 γράφονται σε τριγωνομετρική μορφή ως $x_1=\rho_1 e^{i\theta_1}$ και $x_2=\rho_2 e^{i\theta_2}$ αντίστοιχα. Είναι $x_1x_2=\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ και σε μορφή πολικών συντεταγμένων είναι $x_1 x_2 = \rho_1\rho_2\left[\text{συν}(\theta_1+\theta_2) + i\cdot \text{ημ}(\theta_1+\theta_2)\right]$.

Παρόμοια είναι $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ ή $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left[\text{συν}(\theta_1-\theta_2) + i\cdot \text{ημ}(\theta_1-\theta_2)\right]$

10. Αν $x = \rho e^{i\theta}$, να αποδείξετε ότι $\overline{x} = \rho e^{-i\theta}$.

ΛΥΣΗ:

Είναι $x=\rho e^{i\theta}$ ή x=ρ(συνθ+i·ημθ). Ο συζυγής είναι $\overline{x}$ =ρ(συνθ−i·ημθ) =ρσυνθ+i·(−ρ·ημθ)

Επειδή συν(−θ)=συνθ και ημ(−θ)= −ημθ, είναι $\overline{x}$ =ρσυν(−θ)+i·ρημ(−θ), οπότε $\overline{x} = \rho e^{-i\theta}$.

11. Έστω μια σχέση *R* σε ένα σύνολο S. Αν η *R* είναι σχέση ασθενούς διάταξης και σχέση ισοδυναμίας, να αποδείξετε ότι για κάθε x, y ∈ S, x*R*y αν και μόνο αν x=y.

ΛΥΣΗ:

Έστω x*R*y. Επειδή η *R* είναι σχέση ισοδυναμίας, είναι συμμετρική οπότε y*R*x. Άρα x=y γιατί η *R* είναι και αντισυμμετρική, ως σχέση ασθενούς διάταξης. Αντίστροφα, αν x=y τότε ισχύει x*R*y γιατί η *R* είναι ανακλαστική, ως σχέση ασθενούς διάταξης.

12. Έστω A ένα μη κενό σύνολο και f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Θεωρήστε τη σχέση *R*={(x, y)| x∈A και y∈A με f(x)=f(y)}. Να αποδείξετε ότι η *R* είναι σχέση ισοδυναμίας στο A και να βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

ΛΥΣΗ:

Η σχέση x*R*y είναι:

- Ανακλαστική, γιατί f(x)=f(x) για κάθε x∈A.
- Μεταβατική, γιατί αν f(x)=f(y) και f(y)=f(z) τότε είναι και f(x)=f(z)
- Συμμετρική γιατί xRy σημαίνει f(x)=f(y) ή f(y)=f(x), δηλαδή yRx.

Επομένως, η *R* είναι σχέση ισοδυναμίας. Κάθε τιμή c που ανήκει στο πεδίο τιμών της f προσδιορίζει μια κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκουν όλα τα στοιχεία x του A για τα οποία f(x)=c.

13. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες. Για κάθε συνάρτηση που είναι αντιστρέψιμη να βρείτε την αντίστροφή της.

(α) $f(x) = (2x-1)^3$, $x \in \Re$

(β) $g(x) = \log(x^3+1)$, $x \in (-1, +\infty)$

(γ) $h(x) = 3(10)^{x+1}$, $x \in \Re$

(δ) $u(x) = (2x+5)^2$, $x \in [-\frac{5}{2}, +\infty)$

ΛΥΣΗ:

(α) Η f είναι 1-1 γιατί $f(x_1)=f(x_2)$ αν και μόνο αν $x_1=x_2$. Πεδίο τιμών της f είναι το $\Re$. Η f είναι αντιστρέψιμη. Έστω $y=(2x-1)^3$. Είναι

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{y}+1}{2}, & \alpha\nu\ y \geq 0 \\ -\dfrac{\sqrt[3]{-y}-1}{2}, & \alpha\nu\ y < 0 \end{cases}$$

(β) Η g έχει πεδίο τιμών το σύνολο $\Re$ και είναι αντιστρέψιμη. Αν $y=\log(x^3+1)$ τότε $10^y = x^3+1$ ή $x^3 = 10^y - 1$. Αν $10^y \geq 1$, δηλ. αν $y \geq 0$, τότε $x = \sqrt[3]{10^y - 1}$. Διαφορετικά, αν $y<0$, τότε $x = -\sqrt[3]{-10^y+1}$.

(γ) Πεδίο τιμών της h είναι το διάστημα $(0, +\infty)$. Η h είναι αντιστρέψιμη γιατί είναι 1-1 και επί. Πράγματι, $h(x_1)=h(x_2)$ αν και μόνο αν $x_1=x_2$ και για κάθε $y \in (0, +\infty)$, υπάρχει $x \in \Re$ τέτοιο ώστε $y=h(x)$. Αν $y = 3(10)^{x+1}$, τότε $\log y = \log 3 + (x+1)$ και $x = h^{-1}(y) = \log y - \log 3 - 1$

(δ) Η u είναι 1-1 στο διάστημα $[-\frac{5}{2}, +\infty)$ γιατί $u(x_1)=u(x_2)$ αν και μόνο αν $x_1=x_2$ στο διάστημα αυτό. Η u έχει πεδίο τιμών το διάστημα $[0, +\infty)$. Για κάθε $y \in [0, +\infty)$ υπάρχει $x \in [-\frac{5}{2}, +\infty)$ τέτοιο ώστε $y=u(x)$. Πράγματι, αν $y=(2x+5)^2$, τότε είναι $x = \dfrac{\sqrt{y}-5}{2}$. Επομένως, η u είναι αντιστρέψιμη, έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ και τύπο $u^{-1}(y) = \dfrac{\sqrt{y}-5}{2}$

14. Το μέσο ημερήσιο κόστος θέρμανσης (ή ψύξης) ενός κτιρίου όταν η θερμοκρασία είναι Τ βαθμοί Κελσίου δίνεται από τη συνάρτηση $C(T) = 0{,}35 + 0{,}03(43-2T)^2$. Η μέση ημερήσια θερμοκρασία σχετίζεται με τον αριθμό των ημερών t που έχουν περάσει από την 1η Ιανουαρίου και δίνεται από τη συνάρτηση $T = 9 + 15\eta\mu(2\pi \cdot \frac{t-80}{365})$. Ποιο είναι το κόστος 90 ημέρες μετά την 1η Ιανουαρίου;

ΛΥΣΗ:

Το κόστος 90 ημέρες από την αρχή του έτους είναι C[T(90)]. Η θερμοκρασία είναι

$T(90) = 9 + 15 \cdot \eta\mu(2\pi \cdot \frac{10}{365}) = 11{,}57$, οπότε το κόστος είναι

$C(11{,}57) = 0{,}35 + 0{,}03(43 - 2 \cdot 11{,}57)^2 = 12{,}184$ χρηματικές μονάδες.

15. Αν $\log_5(x)=8$, να βρείτε το $\log_5\frac{\sqrt{x}}{25}$.

ΛΥΣΗ:

$$\log_5\frac{\sqrt{x}}{25}=\log_5\sqrt{x}-\log_5 25=\log_5(x^{1/2})-2=\frac{1}{2}\log_5 x-2=4-2=2$$

16. Να λύσετε την εξίσωση $5^{x-1}=3^x$

ΛΥΣΗ:

Παίρνοντας τους λογάριθμους των δύο μελών έχουμε:

$\ln 5^{x-1}=\ln 3^x$ ή (x−1)ln5=x·ln3 ή x(ln5-ln3)=ln5 ή $x=\dfrac{\ln 5}{\ln(5/3)}=3{,}15$

17. Να απλοποιήσετε την παράσταση $e^{x-\ln x}+\ln(xe^x)$.

ΛΥΣΗ:

$$e^{x-\ln x}+\ln(xe^x)=\frac{e^x}{e^{\ln x}}+\ln x+\ln e^x=\frac{e^x}{x}+\ln x+x$$

18. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2(4^{x+4})+7$. Να βρείτε την αντίστροφή της.

ΛΥΣΗ:

Πεδίο ορισμού της f είναι το $\Re$ και πεδίο τιμών της το διάστημα (7, +∞). Η f είναι 1-1 γιατί $f(x_1)=f(x_2)$ αν και μόνο αν $x_1=x_2$. Αν y= $f(x)=2\cdot(4^{x+4})+7$, τότε έχουμε:

$$2\cdot 4^{x+4}=y-7$$

Παίρνοντας λογάριθμους με βάση 2 έχουμε:

$\log_2 2+(x+4)\log_2 4=\log_2(y-7)$ ή

$1+(x+4)\cdot 2=\log_2(y-7)$ ή

$$x=\frac{\log_2(y-7)-9}{2} \qquad (1)$$

Επομένως, η f^{-1} ορίζεται στο σύνολο (7, +∞) και ο τύπος της δίνεται από τη σχέση (1).

ΛΥΣΕΙΣ 2^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 2.1

1. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

(α) Μία ε-περιοχή ενός σημείου x του $\mathbf{R}^{\nu}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο.

(β) Η ένωση και η τομή δύο ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτά σύνολα.

(γ)Η τομή δύο κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

(δ) Η ένωση και η τομή δύο φραγμένων συνόλων είναι φραγμένα σύνολα.

ΛΥΣΗ:

(α) Έστω $N_\varepsilon(x)$ μια ε-περιοχή του $x\in\Re^{\nu}$ και x′ ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής αυτής. Τότε είναι $\|x-x'\|<\varepsilon$. Αν θέσουμε ε-$\|x-x'\|$=δ>0, τότε το x′ περιλαμβάνεται σε μια ανοιχτή σφαίρα Β(x,δ). Επομένως, η περιοχή $N_\varepsilon(x)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

(β) Αν Α και Β είναι δύο ανοιχτά σύνολα και $x\in(A\cup B)$, τότε $x\in A$ ή $x\in B$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του Α ή του Β. Αν το x είναι εσωτερικό σημείο π.χ. του Α, τότε οπωσδήποτε είναι και εσωτερικό σημείο του ευρύτερου συνόλου $A\cup B$.

Αν $x\in(A\cap B)$, τότε το x είναι εσωτερικό σημείο και του Α και του Β. Επομένως, υπάρχουν σφαίρες $B(x,\varepsilon_1)$ και $B(x,\varepsilon_2)$ τέτοιες ώστε $B(x,\varepsilon_1)\subset A$ και $B(x,\varepsilon_2)\subset B$. Αν θέσουμε $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ τότε $B(x, \varepsilon)\subset(A\cap B)$, οπότε και η τομή είναι ανοιχτό σύνολο.

(γ) Αν Α και Β είναι δύο κλειστά σύνολα, θα δείξουμε πρώτα ότι το συμπλήρωμα $(A\cap B)^c$ είναι ανοιχτό σύνολο. Πράγματι, είναι $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$. Εφόσον τα σύνολα Α και Β είναι κλειστά, τα συμπληρώματά τους A^c και B^c είναι ανοιχτά. Άρα (βλέπε (β)) και το σύνολο $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$ είναι ανοιχτό οπότε το συμπλήρωμά του $A\cap B$ είναι κλειστό.

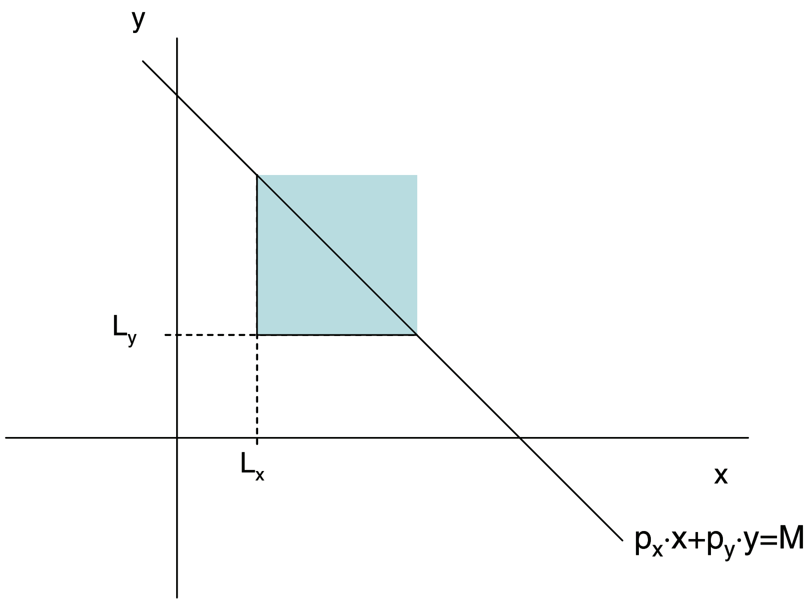
(δ) Έστω δύο φραγμένα σύνολα Α και Β. Τότε μπορούμε να βρούμε μία ανοιχτή σφαίρα Β(α,r) τέτοια ώστε $A\subset B(\alpha,r)$ και $B\subset B(\alpha,r)$. Τα σύνολα $A\cup B$ και $A\cap B$ επίσης περιλαμβάνονται στη σφαίρα αυτή, γιατί π.χ. αν $x\in A\cap B$, τότε $x\in A$ και $x\in B$, οπότε

$x\in B(\alpha,r)$. Επομένως και τα δύο σύνολα $A\cup B$ και $A\cap B$ είναι φραγμένα.

2. Ένας καταναλωτής αγοράζει δύο αγαθά σε ποσότητες x και y. Το σύνολο των συνδυασμών που είναι διατεθειμένος να αγοράσει είναι $A=\{(x,y)\in\Re^2 \mid x\ge L_x>0,\ y\ge L_y>0\}$, όπου L_x και L_y είναι οι ελάχιστες ποσότητες των δύο αγαθών που ο καταναλωτής θεωρεί ότι πρέπει να αγοράσει. Οι συνδυασμοί των δύο αγαθών που μπορεί να αγοράσει ο καταναλωτής με το εισόδημα που διαθέτει προσδιορίζοναι από το σύνολο $B=\{(x,y)\in\Re^2 \mid p_x x+p_y y\le M\}$, όπου p_x και p_y είναι οι τιμές των δύο αγαθών και Μ το εισόδημα του καταναλωτή. Να εξετάσετε αν η τομή $A\cap B$ είναι: (α) κλειστό σύνολο (β) φραγμένο σύνολο.

ΛΥΣΗ:

Το σύνολο $A\cap B$ παρουσιάζεται γραφικά στο παρακάτω διάγραμμα:



Είναι φανερό ότι το σύνολο αυτό είναι κλειστό και φραγμένο.

3. Για κάθε ένα από τα παρακάτω σύνολα βρείτε αν είναι κλειστό, ανοιχτό ή συμπαγές.

(α) $\left\{(x_1, x_2) \in \Re^2 \middle| x_i \geq 0 \ i = 1{,}2 \ \kappa\alpha\iota \ \ x_1^2 + x_2^2 \geq 1\right\}$

(β) $\left\{(x_1, x_2) \in \Re^2 \middle| x_i \geq 0 \ i = 1{,}2 \ \kappa\alpha\iota \ \ x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$

(γ) $\left\{(x_1, x_2) \in \Re^2 \middle| -10 \leq x_1 \leq 1\right\}$

(δ) $\left\{(x_1, x_2) \in \Re^2 \middle| x_i \geq 0 \ i = 1{,}2 \ \kappa\alpha\iota \ \ x_1 \cdot x_2 < 2\right\}$

(ε) $\left\{(x, y) \in \Re^2 \middle| \ x^2 + y^2 = 1\right\}$

(στ) $\left\{(x, y) \in \Re^2 \middle| \ x \geq 0, y \geq 0 \ \kappa\alpha\iota \ xy \geq 1\right\}$

(ζ) $\left\{(x, y) \in \Re^2 \middle| \ -1 < x < 1 \ \kappa\alpha\iota \ \ y = x\right\}$

(η) $\left\{(x, y) \in \Re^2 \middle| \ 0 < x \leq 10 \ \kappa\alpha\iota \ \ 0 \leq y \leq \ln x\right\}$

(θ) $\left\{(x, y) \in \Re^2 \middle| \ xy < 1\right\}$

(ι) $\left\{x \in \Re \middle| \ x^2 \leq 1\right\}$

(ια) $\left\{x \in \Re \middle| \ x^2 > 1\right\}$

ΛΥΣΗ:

Το είδος κάθε συνόλου διαπιστώνεται εύκολα κάνοντας το διάγραμμά του.

(α) Το σύνολο είναι κλειστό γιατί περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του, τα οποία είναι το τόξο του κύκλου με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα 1, το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Το σύνολο είναι συμπαγές γιατί είναι και φραγμένο.

(β) Το σύνολο δεν είναι κλειστό γιατί περιλαμβάνει κάποια σημεία συσσώρευσης, π.χ. το (0,0), αλλά δεν τα περιλαμβάνει όλα, π.χ. δεν περιλαμβάνει το σημείο (0,1). Επίσης, το σύνολο είναι φραγμένο.

(γ) Το σύνολο είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο φραγμένο.

(δ) Το σύνολο δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό γιατί περιλαμβάνει ορισμένα σημεία συσσώρευσης, π.χ. το σημείο (0,0), αλλά όχι όλα, π.χ. δεν περιλαμβάνει τα σημεία της καμπύλης $x_1x_2=2$.

(ε) Το σύνολο είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, οπότε είναι συμπαγές.

(στ) Το σύνολο είναι κλειστό γιατί περιλαμβάνει όλα τα σημεία συσσώρευσής του που είναι τα σημεία της καμπύλης xy=1. Δεν είναι συμπαγές γιατί δεν είναι φραγμένο.

(ζ) Το σύνολο είναι ανοιχτό γιατί δεν περιλαμβάνει τα σημεία συσσώρευσης (−1,−1) και (1,1). Επίσης, είναι φραγμένο γιατί περιλαμβάνεται εντός του κύκλου με κέντρο (0,0) και ακτίνα 1.

(η) Το σύνολο είναι το χωρίο που είναι κάτω από την καμπύλη y=ln x και περικλείεται από τις ευθείες x=1 και x=10. Προφανώς το σύνολο είναι συμπαγές.

(θ) Το σύνολο είναι ανοιχτό γιατί δεν περιλαμβάνει τα σημεία συσσώρευσής του, που είναι τα σημεία της υπερβολής xy=1.

(ι) Το σύνολο είναι κλειστό γιατί περιλαμβάνει όλα τα σημεία συσσώρευσής του, δηλαδή τα σημεία της παραβολής x^2=1. Επίσης, το σύνολο είναι φραγμένο, άρα είναι συμπαγές.

(ια) Το σύνολο είναι ανοιχτό γιατί είναι το συμπλήρωμα του συνόλου του ερωτήματος (ι), το οποίο είναι κλειστό.

Ασκήσεις 2.2

1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4+\dfrac{3}{n^2+7}}{5+\dfrac{2}{n}},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n^2+n},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)(n^2-1)}{2n^3}$$

ΛΥΣΗ:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4+\dfrac{3}{n^2+7}}{5+\dfrac{2}{n}}=\frac{4+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n^2+7}}{5+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}}=\frac{4}{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}}{1+\lim\limits_{n+\to\infty}\dfrac{1}{n}}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)(n^2-1)}{2n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+5n^2-n-5}{2n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}}{2}=$$

$$=\frac{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n^3}}{2}=\frac{1}{2}$$

2. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+13x+36}{x+4}$, **(β)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+3x-4}{x^2+5x-3}$, (γ) $\lim\limits_{x\to2}[16+\sqrt{x-2}]$

(δ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+5x-6}$, **(ε)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$, **(στ)** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^3-7x^2+17x-20}{x^2-5x+4}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+13x+36}{x+4}=\dfrac{4^2+13\cdot 4+36}{4+4}=\dfrac{104}{8}$

(β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-4}{x^2+5x-3}=\dfrac{2\cdot 1^2+3\cdot 1-4}{1^2+5\cdot 1-3}=\dfrac{1}{3}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 2}[16+\sqrt{x-2}]=16+\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}=16$

(δ) Είναι $\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+5x-6}=\dfrac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(x+6)}$.

Για x≠1 είναι $\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+5x-6}=\dfrac{2x+5}{x+6}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+5x-6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+5}{x+6}=1$

(ε) Είναι $\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\dfrac{2x+5-9}{(x-2)[\sqrt{2x+5}+3]}=\dfrac{2(x-2)}{(x-2)[\sqrt{2x+5}+3]}$

Για x≠2 είναι $\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$, οπότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}=\frac{1}{3}$$

(στ) Είναι $\dfrac{x^3-7x^2+17x-20}{x^2-5x+4}=\dfrac{(x-4)(x^2-3x+5)}{(x-4)(x-1)}$

Για x≠4 είναι $\dfrac{x^3-7x^2+17x-20}{x^2-5x+4}=\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$, οπότε

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-7x^2+17x-20}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x+5}{x-1}=3$$

3. Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-x}{x^2-9}=c$, όπου $c\in\Re$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

ΛΥΣΗ:

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{x^2-9}$. Τότε για x≠3 και x≠ −3 είναι $f(x)=g(x)(x^2-9)+x$ και

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}g(x)\cdot\lim_{x\to 3}(x^2-9)+\lim_{x\to 3}x=c\cdot 0+3=3$$

4. Αν $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=8$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3f(x)-2|}{[f(x)]^2+1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|}{[f(x)]^2+1}=\frac{\left|3\lim\limits_{x\to 1}f(x)-2\right|}{\left[\lim\limits_{x\to 1}f(x)\right]^2+1}=\frac{22}{65}$$

5. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2y^2 - x^2 - 4y^2 + 4}{yx - x - 2y + 2}, \quad \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2y - x^2 - 4y + 4}{xy^2 - x - 2y^2 + 2}$$

ΛΥΣΗ:

Είναι $\frac{x^2y^2 - x^2 - 4y^2 + 4}{yx - x - 2y + 2} = \frac{x^2(y^2-1) - 4(y^2-1)}{x(y-1) - 2(y-1)} = \frac{(y+1)(y-1)(x+2)(x-2)}{(y-1)(x-2)}$

Για (x,y)≠(2,1) είναι $\frac{x^2y^2 - x^2 - 4y^2 + 4}{yx - x - 2y + 2} = (y+1)(x+2)$ και

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2y^2 - x^2 - 4y^2 + 4}{yx - x - 2y + 2} = \lim_{(x,y)\to(2,1)} [(y+1)(x+2)] = 2\cdot 4 = 8$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2y - x^2 - 4y + 4}{xy^2 - x - 2y^2 + 2} = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+2}{y+1} = 2$$

Ασκήσεις 2.3

1. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x\to 4^+} \frac{|x-4|}{x^2-16}$, **(β)** $\lim_{x\to 8^+} \frac{3x+2}{9x^2 - 69x - 24}$, (γ) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $\frac{|x-4|}{x^2-16} = \frac{|x-4|}{(x-4)(x+4)}$. Για x>4 είναι $\frac{|x-4|}{x^2-16} = \frac{1}{x+4}$ οπότε

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{|x-4|}{x^2-16} = \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{8}$$

(β) Είναι $\frac{3x+2}{9x^2 - 69x - 24} = \frac{3x+2}{(x-8)(9x+3)}$

Επειδή $\lim_{x\to 8^+}(x-8) = 0$, $\lim_{x\to 8^+}(3x+2) = 26 > 0$ και για x>8 είναι (x–8)(9x+3)>0, θα είναι:

$$\lim_{x\to 8^+} \frac{3x+2}{9x^2 - 69x - 24} = \lim_{x\to 8^+} \frac{3x+2}{(x-8)(9x+3)} = +\infty$$

(γ) Είναι $\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x = \frac{x^2 - 4x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x} = \frac{-4x+1}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x}$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x+1}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = -\frac{4}{2} = -2$$

2. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 10$ **και** $g(x) = 3x^2 + 6x - 11$**, να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to\alpha} g[f(x)]$**.**

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως πολυωνυμική, οπότε

$$\lim_{x\to\alpha} g[f(x)] = g\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = g(10) = 349$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \beta x - 6, & x < 1 \\ c & , \quad x = 1 \\ \alpha x + \beta & , \quad x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε για ποιες τιμές των παραμέτρων α και β η f είναι συνεχής στο x_0=1.

ΛΥΣΗ: Για να είναι η f συνεχής στο x_0=1, πρέπει :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, δηλαδή $a^2 + \beta - 6 = a + \beta = c$ ή

$$\begin{cases} a^2 + \beta - 6 = a + \beta \\ a + \beta = c \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} a^2 - a - 6 = 0 \\ a + \beta = c \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει α=3 ή α= −2. Επομένως, για να είναι η f συνεχής στο x_0=1 πρέπει να είναι α=3 και β=c−3 ή α=−2 και β=c+2.

4. Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να προσδιορίσετε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής:

(α) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ **(β)** $g(x,y) = \dfrac{x+y}{x+4y}$ (γ) $h(x,y) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(|x-y|)}$

ΛΥΣΗ:

(α) Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{(x,y) \in \Re^2 \,|\, x \neq y\}$ και είναι συνεχής στο σύνολο αυτό ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

(β) Η g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B = \left\{(x,y) \in \Re^2 \,\middle|\, y \neq -\dfrac{x}{4}\right\}$. Ομοίως, η g είναι συνεχής στο σύνολο αυτό ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

(γ) Η h έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\Gamma = \{(x,y) \in \Re^2 \,|\, x > 0 \;\kappa\alpha\iota\; y \neq x \pm 1\}$ και είναι συνεχής για κάθε (x,y)∈Γ.

5. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ x - y, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

ΛΥΣΗ: Για κάθε $(\alpha,\beta)\in\Re^2$ είναι:

$$\lim_{(x,y)\to(a,\beta)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,\beta)} (x-y) = \begin{cases} \alpha - \alpha = f(\alpha,\alpha) & \text{αν } \alpha = \beta \\ \alpha - \beta = f(\alpha,\beta) & \text{αν } \alpha \neq \beta \end{cases},$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\Re^2$.

6. **Δίνεται η συνάρτηση**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο (0,0).

ΛΥΣΗ:

Αν υπολογίσουμε το όριο της f στο (0,0) για x=y έχουμε:

$$\lim_{(y,y)\to(0,0)}\frac{y^3}{y^4+y^2}=\lim_{(y,y)\to(0,0)}\frac{y}{y^2+1}=0$$

Αν τώρα υπολογίσουμε το όριο στο (0,0) για $y=x^2$ έχουμε:

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\lim_{(x,x^2)\to(0,0)}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}$$

Εφόσον τα δύο παραπάνω όρια διαφέρουν, δεν υπάρχει το όριο της f στο (0,0), οπότε η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

6. **Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.**

ΛΥΣΗ:

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ για το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\alpha_n=1$. Επειδή ο n είναι περιττός, είναι $\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$. Επομένως, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β τέτοιοι ώστε $P(\alpha)\cdot P(\beta)<0$ οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε P(x)=0.

8. **Έστω μια συνάρτηση f: [0, 1]→ [0, 1] για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, για κάθε x, y ∈ [0, 1] με x≠y. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο x_0 στο [0, 1] τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.**

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in[0,1]$. Πράγματι, είναι $|f(x)-f(x_0)|<|x-x_0|$ και αν $x\to x_0$, τότε $f(x)\to f(x_0)$.

Εφόσον η f είναι συνεχής, η συνάρτηση g με τύπο g(x)=f(x)−x είναι και αυτή συνεχής. Για τη g είναι $g(0)=f(0)\geq0$ και $g(1)=f(1)-1\leq0$, γιατί η f έχει πεδίο τιμών το [0,1]. Αν g(0)=0 ή g(1)=0, τότε $x_0=0$ ή $x_0=1$ αντίστοιχα. Διαφορετικά, αν g(0)>0 και g(1)<0, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=f(x_0)-x_0=0$ ή $f(x_0)=x_0$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

1. **Έστω (S, d) ένας μετρικός χώρος και έστω p∈S. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f : S→ℜ με τύπο f(x)=d(x, p) είναι συνεχής στο S.**

ΛΥΣΗ:

Έστω $x_0 \in S$. Επειδή η d είναι απόσταση, ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, οπότε $d(x,p) \le d(x,x_0) + d(x_0,p)$ ή $d(x,p) - d(x_0,p) \le d(x,x_0)$. Αλλά

$\lim\limits_{x \to x_0} d(x,x_0) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} d(x,p) = d(x_0,p)$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. **Έστω μία συνεχής συνάρτηση f : $\Re^2 \to \Re$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g : :$\Re^2 \to \Re$, για την οποία ισχύει g(x,y)=f(x+y, x-y) είναι συνεχής στο $\Re^2$.**

ΛΥΣΗ:

Είναι

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x+y, x-y) = f(x_0+y_0, x_0-y_0) = g(x_0,y_0)$$

γιατί η f είναι συνεχής. Δηλαδή, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = g(x_0,y_0)$, οπότε και η g είναι συνεχής.

3. **Να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον κύβο του κατά 1.**

ΛΥΣΗ:

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \Re$ τέτοιο ώστε $x_0 = x_0^3 + 1$. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x_0) = x_0^3 - x_0 + 1$, η οποία είναι συνεχής στο $\Re$ ως πολυωνυμική. Είναι $f(-1)=-1<0$ και $f(1)=1>0$. Επομένως, υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ ή $x_0 = x_0^3 + 1$.

4. **Δίνονται η συνάρτηση ζήτησης D(p) και η συνάρτηση προσφοράς S(p) ενός προϊόντος:**

$$\mathrm{D(p)} = \begin{cases} 50 - \mathrm{p}, & \text{αν } \mathrm{p} > 30 \\ 70 - \mathrm{p}, & \text{αν } \mathrm{p} \le 30 \end{cases}$$

$\mathrm{S(p)} = -12+\mathrm{p}$

Να βρείτε, αν υπάρχει, σημείο ισορροπίας στην αγορά του προϊόντος. Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ:

Αλγεβρικά προκύπτει ότι η συνάρτηση προσφοράς τέμνει τον πρώτο κλάδο της D(p) για p=31, που απορρίπτεται γιατί ο πρώτος κλάδος ισχύει για p>30 και το δεύτερο κλάδο για p=42,5 που επίσης απορρίπτεται γιατί ο κλάδος αυτός ισχύει για p≤30. Επομένως, δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας.

Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγούμαστε αν παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης. Η απουσία σημείου ισορροπίας οφείλεται στην ασυνέχεια της συνάρτησης D στο p=30.

5. **Η κυβέρνηση φορολογεί το εισόδημα κάθε φορολογούμενου με συντελεστή 30% για ετήσιο εισόδημα μεγαλύτερο των 25000 Ευρώ. Για να αυξήσει τα έσοδα από τη φορολογία χωρίς να επιβαρύνει τους οικονομικά ασθενέστερους, η κυβέρνηση σκέπτεται να επιβάλει πρόσθετη φορολογία ίση με 2000 Ευρώ**

για όσους έχουν ετήσιο εισόδημα τουλάχιστον 40000 Ευρώ. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση από την οποία προκύπτει το καθαρό εισόδημα κάθε φορολογούμενου, μετά την καταβολή του φόρου. Τι επιπτώσεις αναμένεται να έχει η επιβολή της πρόσθετης φορολογίας σε όσους έχουν υψηλά εισοδήματα;

ΛΥΣΗ:

Έστω N(x) το εισόδημα, μετά τη φορολογία, ενός φορολογούμενου με ετήσιο εισόδημα x Ευρώ. Αν x<25000, ο φορολογούμενος απαλλάσσεται του φόρου, οπότε N(x)=x. Αν 25000≤x<40000, το εισόδημα πάνω από τα 25000 Ευρώ φορολογείται με συντελεστή 30%, οπότε N(x)=25000+0,7(x−25000). Τέλος, αν x≥40000, τότε επιβάλλεται πρόσθετη φορολογία 2000 Ευρώ, οπότε N(x)= 25000+0,7(x−25000)−2000. Έτσι, η συνάρτηση του καθαρού εισοδήματος είναι:

$$N(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \le \text{x} < 25000 \\ 7500 + 0{,}7x, & \text{αν } 25000 \le \text{x} < 40000 \\ 5500 + 0{,}7x, & \text{αν x} \ge 40000 \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια στο x=40000 γιατί $\lim_{x \to 40000^-} N(x) = 35500$, ενώ $\lim_{x \to 40000^+} N(x) = N(40000) = 33500$. Αποτέλεσμα αυτής της ασυνέχειας είναι ότι οι φορολογούμενοι με ετήσιο εισόδημα που πλησιάζει τα 40000 Ευρώ δεν έχουν ουσιαστικό κίνητρο να προσπαθήσουν να αυξήσουν το εισόδημά τους πάνω από τα 40000 Ευρώ γιατί αυτό θα συνεπάγεται μείωση του καθαρού εισοδήματός τους κατά 2000 Ευρώ.

6. Έστω οι συναρτήσεις $\mathrm{f(x, y)} = \dfrac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{x+y}}$ και $\mathrm{g(x, y)} = \dfrac{\mathrm{y - 1}}{\mathrm{x+y}}$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια των συναρτήσεων αυτών καθώς το (x, y) τείνει στο (0, 0). Επίσης να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης h(x,y)=f(x,y) + g(x,y) καθώς το (x, y) τείνει στο (0, 0). Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ:

Αν υπολογίσουμε το όριο της f για x=y έχουμε $\lim_{\mathrm{(x,x)\to(0,0)}} \mathrm{f(x, y)} = \lim_{\mathrm{(x,x)\to(0,0)}} \dfrac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{2x}}$. Το όριο αυτό δεν υπάρχει γιατί $\lim_{\mathrm{(x,x)\to(0,0)^+}} \dfrac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{2x}} = +\infty$, ενώ $\lim_{\mathrm{(x,x)\to(0,0)^-}} \dfrac{\mathrm{x+1}}{\mathrm{2x}} = -\infty$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει το όριο της g καθώς το (x,y) τείνει στο (0,0).

Το άθροισμα των δύο συναρτήσεων είναι $h(x, y) = \dfrac{x+y}{x+y} = 1$ για x≠ −y και έχει όριο το 1 καθώς το (x,y) τείνει στο (0,0).

ΛΥΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 3.1

1. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι κυρτά.

(α) S_1= $\left\{(x, \quad y) \in \Re^2 \middle| x \geq 1, y \geq 1, xy \leq 9\right\}$

(β) S_2= $\left\{(x, \quad y) \in \Re^2 \middle| xy < 0 \ \kappa\alpha\iota \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

(γ) **S_3=** $\left\{(x, \quad y) \in \Re^2 \middle| x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4 \kappa\alpha\iota \ x^2 + y^2 \geq 1\right\}$

(δ) S_4= $\left\{(x, \quad y) \in \Re^2 \middle| y \geq x \ \kappa\alpha\iota \ xy \geq 1\right\}$

(ε) S_5= $\left\{ x \in R^\nu \middle| \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 1 \right\}$

(στ) S_6= $\left\{ x \in R^\nu \middle| \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \leq 1 \right\}$

(ζ) S_7= $\left\{ x \in R^\nu \middle| \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \geq 1 \right\}$

ΛΥΣΗ:

Τα σύνολα των περιπτώσεων (α)–(δ) μπορεί να παρασταθούν διαγραμματικά. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι κανένα από τα σύνολα αυτά δεν είναι κυρτό.

(α) Το σύνολο περιέχει τα σημεία Α(1,9) και Β(9,1) αλλά όχι και το σημείο Γ(5, 5) που είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

(β) Το σύνολο περιέχει τα σημεία Α(−0,5, 0,5) και Β(0,5, −0,5) αλλά όχι και το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, που είναι το σημείο (0,0).

(γ) Το σύνολο περιέχει τα σημεία Α(0,1) και Β(1,0) αλλά όχι και το σημείο Γ(0,5, 0,5) που είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

(δ) Στο σύνολο ανήκουν τα σημεία Α(1,1) και Β(−1,−1) αλλά όχι και η αρχή των αξόνων που είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

(ε) Έστω τα σημεία **x**=(1,0,…,0) και **y**=(0,1,…,0) τα οποία ανήκουν στο σύνολο S_5. Ας θεωρήσουμε το σημείο **z**=λ**x**+(1−λ)**y** για λ=0,5 δηλαδή το σημείο **z**=(0,5, 0,5, …, 0). Επειδή $\mathbf{z} \notin S_5$, το σύνολο S_5 δεν είναι κυρτό.

(στ) Έστω **x** και **y** δύο σημεία του συνόλου S_6 και **z**=λ**x**+(1−λ)**y** με λ∈[0,1]. Τότε είναι $\sum_i x_i^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \leq 1$ και $\sum_i y_i^2 = \|\mathbf{y}\|^2 \leq 1$ ή

$\|\mathbf{x}\| \leq 1$ και $\|\mathbf{y}\| \leq 1$.

Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της πρώτης ανίσωσης με λ, της δεύτερης με (1-λ) όπου λ∈[0,1] και προσθέσουμε κατά μέλη, τότε έχουμε:

$$\lambda\|\mathbf{x}\| + (1-\lambda)\|\mathbf{y}\| \leq 1$$

Για το σημείο **z** του μετρικού χώρου $\Re^\nu$ είναι:

$\|\mathbf{z}\| = \|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\| \leq \|\lambda\mathbf{x}\| + \|(1-\lambda)\mathbf{y}\|$ (τριγωνική ανισότητα) και

$$\|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\| \leq \lambda\|\mathbf{x}\| + (1-\lambda)\|\mathbf{y}\| \leq 1$$

Οπότε είναι και

$$\left\|\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\right\|^2 = \left\|\mathbf{z}\right\|^2 \leq 1$$

Επομένως, $\mathbf{z} \in S_6$ για κάθε $\lambda \in [0,1]$, άρα το σύνολο είναι κυρτό.

(ζ) Τα σημεία $\mathbf{x}=(1,0,\ldots,0)$ και $\mathbf{y}=(0,1,\ldots,0)$ ανήκουν στο σύνολο S_7. Το σημείο $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}$ για $\lambda=0,5$ δηλαδή το σημείο $\mathbf{z}=(0,5,\ 0,5,\ \ldots,\ 0)$ δεν ανήκει στο σύνολο αυτό. Επομένως, το σύνολο S_7 δεν είναι κυρτό.

2. Αν $A = \left\{x \in \Re^2 \middle| \ 0 \leq x_1 \leq 1 \ \kappa\alpha\iota \ \ 2 \leq x_2 \leq 3\right\}$ **και**

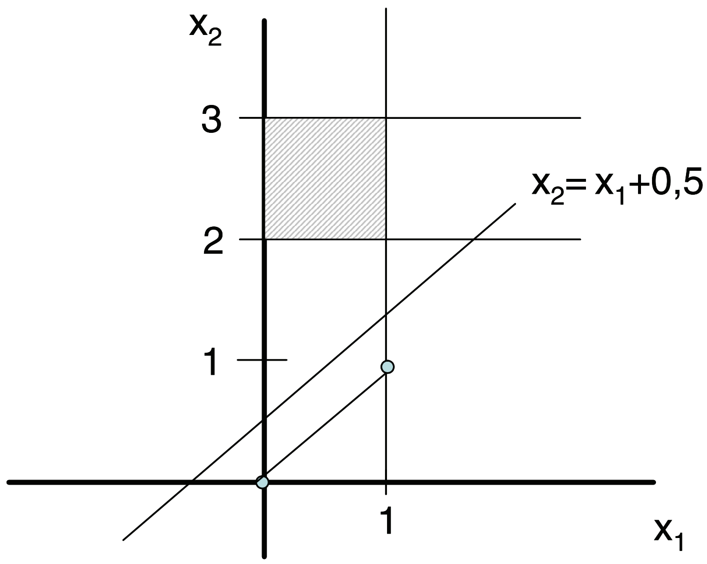
$B = \left\{x \in \Re^2 \middle| \ 0 \leq x_1 \leq 1 \ \kappa\alpha\iota \ \ x_2 = x_1\right\}$

(α) Να βρείτε το σύνολο $A \cup B$.

(β) Να βρείτε ένα υπερεπίπεδο το οποίο χωρίζει το A από το B

ΛΥΣΗ:

(α) Το σύνολο περιλαμβάνει τα σημεία του σκιασμένου τετραγώνου καθώς και τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0,0) και (1,1).



(β) Ένα από τα (άπειρα) υπερεπίπεδα που χωρίζουν το A από το B είναι το υπερεπίπεδο $-x_1+x_2=0,5$ δηλαδή η ευθεία $x_2=x_1+0,5$.

3. (α) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Αν ένα σύνολο S είναι κυρτό τότε και το σύνολο W= $\left\{y \middle| y = \alpha x,\ x \in S\right\}$ **είναι κυρτό για κάθε $\alpha \in \Re$.**

(ii) Αν δύο σύνολα S_1 και S_2 είναι κυρτά, τότε και το σύνολο V= $\left\{y \middle| y = x + z, \quad x \in S_1,\ z \in S_2\right\}$ **είναι κυρτό.**

(iii) Η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα συνόλων A και B τα οποία είναι κυρτά, ενώ η ένωση $A \cup B$ δεν είναι.

ΛΥΣΗ:

(α) (i) Έστω $\mathbf{y}_1$ και $\mathbf{y}_2$ δύο σημεία του W και $\lambda\in[0,1]$. Τότε υπάρχουν $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ στο S τέτοια ώστε $\mathbf{y}_1=\alpha\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{y}_2=\alpha\mathbf{x}_2$. Για το σημείο $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{y}_1+(1-\lambda)\mathbf{y}_2$ έχουμε:

$$\lambda\mathbf{y_1}+(1-\lambda)\mathbf{y_2}=\lambda\cdot a\mathbf{x_1}+(1-\lambda)a\mathbf{x_2}=a\left[\lambda\mathbf{x_1}+(1-\lambda)\mathbf{x_2}\right]=a\mathbf{z}$$

Το σημείο $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2$ ανήκει στο S, γιατί το S είναι κυρτό, οπότε και το α$\mathbf{z}$ ανήκει στο W. Επομένως, το W είναι κυρτό σύνολο.

(ii) Έστω $\mathbf{y}_1$ και $\mathbf{y}_2$ δύο σημεία του V και $\lambda\in[0,1]$. Τότε υπάρχουν $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ στο S_1 και $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ στο S_2 τέτοια ώστε $\mathbf{y}_1=\mathbf{x}_1+\mathbf{z}_2$ και $\mathbf{y}_2=\mathbf{x}_2+\mathbf{z}_2$. Για το σημείο $\mathbf{y}=\lambda\mathbf{y}_1+(1-\lambda)\mathbf{y}_2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}&=\lambda\mathbf{y}_1+(1-\lambda)\mathbf{y_2}=\lambda(\mathbf{x_1}+\mathbf{z_1})+(1-\lambda)(\mathbf{x_2}+\mathbf{z_2})\\&=\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x_2}+\lambda\mathbf{z_1}+(1-\lambda)\mathbf{z_2}=\mathbf{x}'+\mathbf{z}'\end{aligned}$$

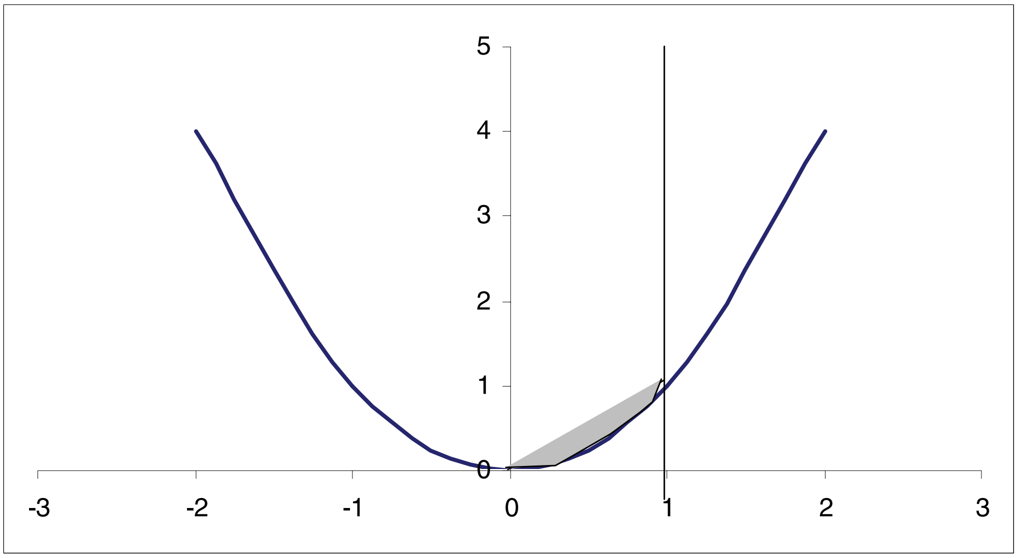
Τα σημεία $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{z}'$ ανήκουν στα σύνολα S_1 και S_2 αντίστοιχα, οπότε και το $\mathbf{y}$ ανήκει στο σύνολο V. Επομένως, το V είναι κυρτό σύνολο.

(iii) Έστω $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A\cap B$. Τότε το σημείο $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}$ με $\lambda\in[0,1]$ ανήκει στο σύνολο A, γιατί το A είναι κυρτό σύνολο. Παρόμοια, το $\mathbf{z}$ ανήκει και στο σύνολο B γιατί και το B είναι κυρτό. Έτσι, το $\mathbf{z}$ ανήκει στην τομή $A\cap B$, η οποία είναι κυρτό σύνολο.

(β) Η ένωση $A\cup B$ δεν είναι απαραίτητα κυρτή. Για παράδειγμα, αν A=[2, 3] και B=[4, 5], η ένωση $A\cup B$ δεν περιλαμβάνει τα σημεία του διαστήματος (3, 4), οπότε δεν είναι κυρτό σύνολο.

4. Να βρείτε το κυρτό κέλυφος του συνόλου $S=\{(x, y): y=x^2, 0\leq x\leq 1\}$.

ΛΥΣΗ:



Το σύνολο περιλαμβάνει τα σημεία της υπερβολής $y=x^2$ για τα οποία είναι $0\leq x\leq 1$. Το κυρτό του κέλυφος είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα σημεία του S, δηλαδή το χωρίο που περικλείεται από την ευθεία y=x και την καμπύλη $y=x^2$.

Ασκήσεις 3.2

1. **Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές και ποιες κοίλες; Επιβεβαιώστε την απάντησή σας ελέγχοντας το διάγραμμα της συνάρτησης.**

(α) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

(β) $f(x) = \log(1 + x^2)$

(γ) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

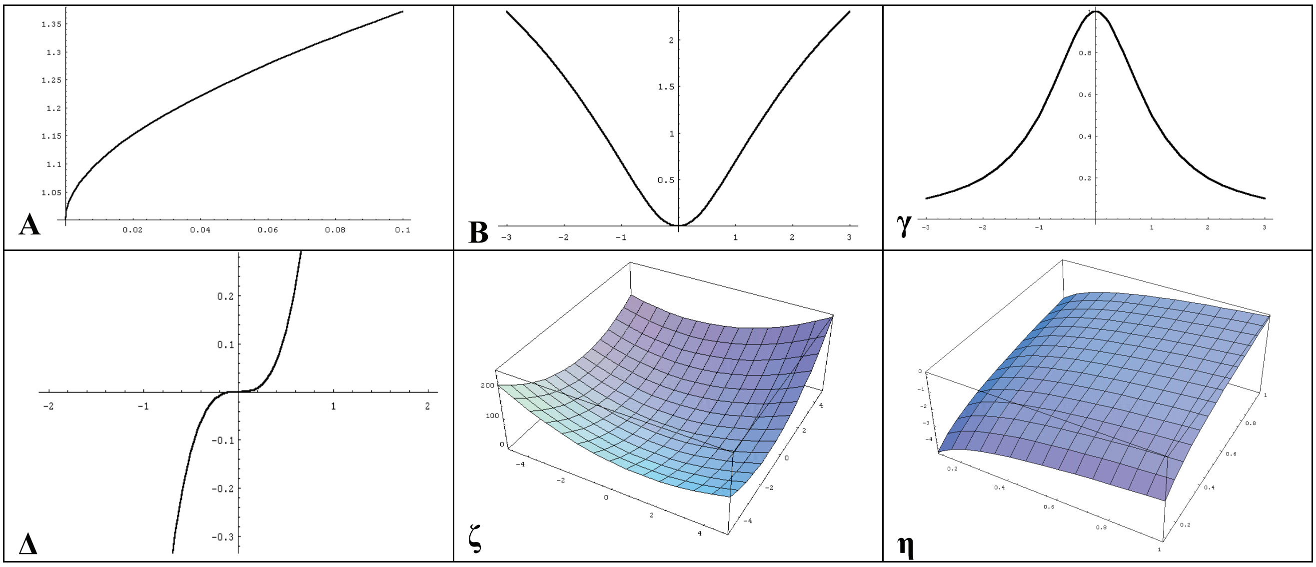
(δ) $f(x) = x^3$

(ε) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

(στ) $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1^2 + 4x_2$

(ζ) $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_2^2 + x_1 + 3x_2 + 5$

(η) $f(x_1, x_2) = \log(x_1 x_2)$



ΛΥΣΗ:

Για τις συναρτήσεις των οποίων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μπορούμε να διαπιστώσουμε διαγραμματικά αν είναι κυρτές ή κοίλες. Κυρτές είναι οι συναρτήσεις των ερωτημάτων (β) και (ζ) και κοίλες οι συναρτήσεις των ερωτημάτων (α), (γ) και (η). Η συνάρτηση του ερωτήματος (δ) δεν είναι ούτε κοίλη ούτε κυρτή. Ο έλεγχος στα ερωτήματα (ε) και (στ) γίνεται αναλυτικά ως εξής:

(ε) Έστω $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ και $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$ δύο οποιαδήποτε σημεία του πεδίου ορισμού της f και $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}$ με $\lambda\in[0,1]$. Θα δείξουμε ότι

$$f[\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}] \le \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}).$$

Πράγματι, μετά από πράξεις είναι

$$f[\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}] - \lambda f(\mathbf{x}) - (1-\lambda) f(\mathbf{y}) = \ldots =$$

$$-\lambda(1-\lambda)(x_1 + y_1)^2 - 2\lambda(1-\lambda)(x_2 + y_2)^2 - 3\lambda(1-\lambda)(x_3 + y_3)^2 \le 0$$

για κάθε $\lambda\in[0,1]$. Άρα η f είναι κυρτή.

(στ) Παρόμοια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$f[\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}] - \lambda f(\mathbf{x}) - (1-\lambda) f(\mathbf{y}) =$$
$$-6\lambda(1-\lambda)(x_1 - y_1)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x_2 - y_2)^2 + 3\lambda(1-\lambda)(x_3 - y_3)^2$$

Η παράσταση αυτή αλλάζει πρόσημο ανάλογα με τις τιμές των x_i και y_i. Για παράδειγμα, αν $x_2-y_2=x_3-y_3=1$ και $x_1=y_1$ η παράσταση είναι θετική, ενώ αν $x_i-y_i=1$ για όλα τα i, είναι αρνητική. Επομένως, η συνάρτηση δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

2. (α) Θεωρήστε μια συνάρτηση g:$\Re^*\to\Re$ με τύπο g(t)= $\frac{1}{t}$ και t>0. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή.

(β) Θεωρήστε μια συνάρτηση f:$\Re\to\Re$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$, για κάθε x. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη, να αποδείξετε ότι η $\frac{1}{f}$ είναι κυρτή.

ΛΥΣΗ:

(α) Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $S = \{t > 0 | g(t) \le a\}$ είναι κυρτό για κάθε α>0. Πράγματι, έστω $t_1 \in S$ και $t_2 \in S$. Είναι $\frac{1}{t_1} \le a$ και $\frac{1}{t_2} \le a$ ή $t_1 \ge \frac{1}{a}$ και $t_2 \ge \frac{1}{a}$ γιατί t_1, t_2 και α θετικά. Τότε έχουμε:

$\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \ge \lambda\frac{1}{\alpha} + (1-\lambda)\frac{1}{\alpha}$ ή $\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \ge \frac{1}{\alpha}$, ή $\frac{1}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2} \le \alpha$,

δηλαδή $g[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] \le a$. Επομένως, το σύνολο S είναι κυρτό και η συνάρτηση g κυρτή.

(β) Παρόμοια, θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $S = \{x \Big| \frac{1}{f(x)} \le a\}$ είναι κυρτό για κάθε α>0. Έστω $x_1 \in S$ και $x_2 \in S$, δηλαδή $\frac{1}{f(x_1)} \le a$ και $\frac{1}{f(x_2)} \le a$ ή $\lambda f(x_1) \ge \lambda\frac{1}{\alpha}$ και $(1-\lambda)f(x_2) \ge \frac{1-\lambda}{\alpha}$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \ge \frac{1}{\alpha}$. Επειδή η f είναι κοίλη είναι:

$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, οπότε και

$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \ge \frac{1}{a}$ ή $\frac{1}{f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]} \le a$, οπότε το σημείο $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ ανήκει στο S. Επομένως, το σύνολο S είναι κυρτό, οπότε και η συνάρτηση 1/f είναι κυρτή.

3. Δείξτε ότι αν η $f(x)$ είναι κυρτή και ορίζεται σ' ένα κυρτό σύνολο C τότε δείξτε ότι για $0 < p < q < r$ και u≠0 ισχύει:

$$\frac{f(x+qu) - f(x+pu)}{q-p} \ge \frac{f(x+pu) - f(x)}{p} \qquad \textbf{(I)} \qquad \textbf{και}$$

$$\frac{f(x+ru)-f(x+qu)}{r-q} \geq \frac{f(x+pu)-f(x)}{p} \quad \textbf{(II)}$$

ΛΥΣΗ:

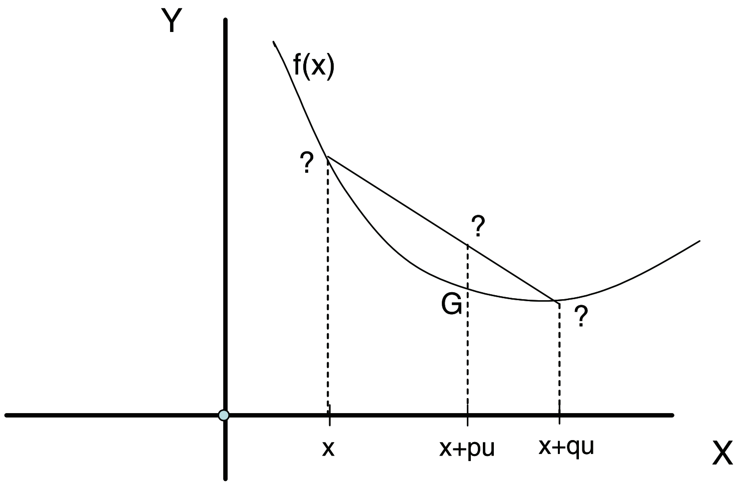
Έστω u>0. Τότε από τη σχέση (Ι) έχουμε ισοδύναμα:

$$pf(x+qu)-pf(x+pu) \geq qf(x+pu)-qf(x)-pf(x+pu)+pf(x)$$

Ή

$$pf(x+qu) \geq qf(x+pu)-qf(x)+pf(x) \qquad (1)$$

Έστω τα σημεία Α(x, f(x)), Β(x+qu, f(x+qu)) και Γ(x+pu, f(x+pu)) (βλ. σχήμα).



Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση

$$Y-f(x)=\frac{f(x+qu)}{x+qu-x}(X-x)$$

Επειδή το σημείο Μ(u+pu, Y_M) ανήκει στην ΑΒ, θα είναι

$$Y_M - f(x)=\frac{f(x+qu)-f(x)}{qu}(u+pu-x)$$

Ή

$$Y_M = f(x)+p\frac{f(x+qu)-f(x)}{q}$$

Επειδή η f είναι κυρτή, θα είναι $Y_M > Y_\Gamma$, δηλαδή

$$f(x)+p\frac{f(x+qu)-f(x)}{q} \geq f(x+pu)$$

Απ’ όπου προκύπτει η σχέση (1).

Παρόμοια εργαζόμαστε και όταν u<0.

Η σχέση (ΙΙ) προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη σχέση (Ι) για τα σημεία Κ(x+pu, f(x+pu)), Λ(x+qu, f(x+qu)) και Μ(x+ru, f(x+ru)).

4. **Θεωρήστε τη συνάρτηση** $f(x) = e^{x}$ **.Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι:**
(α) οιονεί κοίλη
(β) οιονεί κυρτή.
Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ:

(α) Η συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη γιατί το σύνολο $S_1 = \{x : e^{x} \geq a\}$ είναι κυρτό για κάθε α>0. Πράγματι, αν $x \in S_1$ και $y \in S_1$, τότε είναι $e^{x} \geq a$ και $e^{y} \geq a$ ή $\left(e^{x}\right)^{\lambda} \geq a^{\lambda}$ και $\left(e^{y}\right)^{1-\lambda} \geq a^{1-\lambda}$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $e^{\lambda\chi+(1-\lambda)y} \geq a$, δηλαδή το S_1 είναι κυρτό, οπότε η f είναι οιονεί κοίλη.

(β) Παρόμοια αποδεικνύεται ότι η f είναι και οιονεί κυρτή. Επομένως, μια συνάρτηση μπορεί να είναι και οιονεί κυρτή και οιονεί κοίλη.

5. **Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι οιονεί κυρτές ή οιονεί κοίλες:**
(α) $f(x, y) = xy$
(β) $g(x, y) = x^2 + y^2$
(γ) $h(x, y) = -x^2 - y^2$

ΛΥΣΗ:

Ο έλεγχος γίνεται με τη βοήθεια των συνόλων $S_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : f(x, y) \leq a\}$ και $S_2 = \{(x, y) \in \Re^2 : f(x, y) \geq a\}$. Στην περίπτωση (α) τα σύνολα αυτά σχετίζονται με υπερβολές της μορφής xy=α. Μπορεί να διαπιστώσουμε εύκολα ότι ούτε το S_1 ούτε το S_2 είναι κυρτά, οπότε η f δεν είναι ούτε οιονεί κυρτή ούτε οιονεί κοίλη.

Στην περίπτωση (β) τα σύνολα S_1 και S_2 σχετίζονται με κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{a}$. Το σύνολο $S_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq a\}$ είναι κυρτό, οπότε η g είναι οιονεί κυρτή. Το σύνολο S_2 δεν είναι κυρτό, οπότε η g δεν είναι οιονεί κοίλη.

Η συνάρτηση h είναι οιονεί κοίλη γιατί η αντίθετή της (η g) είναι οιονεί κυρτή.

6. **Να αποδείξετε ότι μια κοίλη συνάρτηση είναι και οιονεί κοίλη.**

ΛΥΣΗ:

Επειδή η f είναι κοίλη είναι $f[\lambda x + (1-\lambda)y] \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ και το σύνολο $S = \{x : f(x) \geq a\}$ είναι κυρτό για $α \in \Re$. Αν f(x)≥α και f(y)≥α τότε $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq a$, οπότε το S είναι κυρτό και η f είναι οιονεί κοίλη.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

1. **Αν $C=\{x=(x_1,...,x_v): x_i \geq 0 , i = 1 , ...,v\}$ είναι ο χώρος κατανάλωσης ενός καταναλωτή, $p= (p_1,...,p_v)$ οι αντίστοιχες τιμές των αγαθών και υπηρεσιών και I το εισόδημα του καταναλωτή, να αποδείξετε ότι το σύνολο** $B = \{x \,|\, x \geq 0, p \cdot x \leq I\}$ **είναι κυρτό.**

ΛΥΣΗ:

Έστω $\mathbf{x},\mathbf{y}\in B$ και $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}$ με $\lambda\in[0,1]$. Τότε είναι $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\leq I$ και $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}\leq I$, οπότε $\lambda\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\leq \lambda I$ και $(1-\lambda)\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}\leq (1-\lambda)I$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$\lambda\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} \leq I$ ή $\mathbf{p}\left[\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\right]\leq I$ ή $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\leq I$, δηλαδή $\mathbf{z}\in B$. Επομένως, το σύνολο B είναι κυρτό.

2. **Θεωρήστε μια συνάρτηση χρησιμότητας U(x) που ορίζεται σε ένα χώρο κατανάλωσης $C=\{x=(x_1,...,x_\nu): x_i \geq 0 , i = 1 , ...,\nu\}$ και $P(x_0)=\{x\in C: U(x)\geq U(x_0)\}$ το σύνολο των σημείων κατανάλωσης που είναι τουλάχιστον τόσο επιθυμητά όσο ένα συγκεκριμένο σημείο $x_0\in C$. Αν το x_0 είναι συνοριακό σημείο του κυρτού κελύφους του $P(x_0)$, να αποδείξετε ότι αν $u(x)\geq u(x_0)$, τότε υπάρχει διάνυσμα τιμών $p= (p_1,...,p_\nu)$ τέτοιο ώστε $p\cdot x \geq p\cdot x_0$.**

ΛΥΣΗ:

Από το θεώρημα Minkowski προκύπτει ότι για το κυρτό σύνολο $conv\left[P(x_0)\right]$ και το συνοριακό σημείο του x0 υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης H τέτοιο ώστε $\sum_i a_i x_{oi} = b$ και $\sum_i a_i x_i \leq b$ ή $\sum_i a_i x_i \leq \sum_i a_i x_{oi}$ για κάθε $x\in conv\left[P(x_0)\right]$. Αν θέσουμε pi=–αi, τότε είναι $\sum_i p_i x_i \geq \sum_i p_i x_{oi}$ ή $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \geq \mathbf{p}\cdot\mathbf{x_0}$.

3. **Να αποδείξετε ότι το κυρτό κέλυφος ενός φραγμένου συνόλου είναι φραγμένο σύνολο.**

ΛΥΣΗ:

Έστω S ένα φραγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει σημείο x και r>0 τέτοια ώστε $S\subset B(x,r)$, οπότε και $conv(S)\subset conv[B(x,r)]$. Επειδή, όμως, η σφαίρα B(x, r) είναι κυρτό σύνολο, είναι $conv[B(x,r)]= B(x,r)$. Επομένως, $conv[B(x,r)] \subset B(x,r)$, δηλαδή το conv(S) είναι φραγμένο.

4. **Αν f και g είναι κυρτές συναρτήσεις ορισμένες σε ένα κυρτό σύνολο C, να αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ είναι επίσης κυρτή για $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$.**

ΛΥΣΗ:

Επειδή οι f και g είναι κυρτές είναι:

$f[\lambda \mathrm{x}+(1-\lambda)\mathrm{y}]\leq \lambda f(\mathrm{x})+(1-\lambda)f(\mathrm{y})$ και

$g[\lambda \mathrm{x}+(1-\lambda)\mathrm{y}]\leq \lambda g(\mathrm{x})+(1-\lambda)g(\mathrm{y})$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της πρώτης ανίσωσης με α≥0, της δεύτερης με β≥0 και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$af[\lambda \mathrm{x}+(1-\lambda)\mathrm{y}]+\beta g[\lambda x+(1-\lambda)y)]\leq \lambda af(\mathrm{x})+(1-\lambda)af(\mathrm{y})+\lambda\beta g(x)+(1-\lambda)\beta g(y)$

ή

$(af+\beta g)[\lambda \mathrm{x}+(1-\lambda)\mathrm{y}]\leq \lambda(af+\beta g)(\mathrm{x})+(1-\lambda)(af+\beta g)(\mathrm{y})$

Οπότε η af+βg είναι κυρτή.

5. Αν μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο C, είναι κυρτή και μια συνάρτηση $\varphi: \Re \to \Re$ είναι αύξουσα και κυρτή, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(f(x))$ είναι κυρτή.

ΛΥΣΗ:

Επειδή η f είναι κυρτή είναι:

$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Επειδή η φ είναι αύξουσα, είναι :

$\phi\{f[\lambda x + (1-\lambda)y]\} \le \phi[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)]$ (1)

Επειδή η φ είναι κυρτή είναι

$\phi[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)] \le \lambda\phi[f(x)] + (1-\lambda)\phi[f(y)]$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$(\phi \circ f)[\lambda x + (1-\lambda)y] \le \lambda(\phi \circ f)(x) + (1-\lambda)(\phi \circ f)(y)$

Επομένως, η φ∘f είναι κυρτή.

6. Θεωρήστε μια συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^2$ **και μια συνάρτηση g με τύπο** $g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 4x - 4, & x \ge 1 \end{cases}$.

(α) Να δείξετε ότι οι f και g είναι οιονεί κοίλες.

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f+g είναι οιονεί κοίλη.

ΛΥΣΗ:

(α) Μπορούμε να αποδείξουμε διαγραμματικά ότι τόσο η f όσο και η g είναι οιονεί κοίλες.

(β) Το άθροισμα f+g έχει τύπο:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ -x^2 + 4x - 4, & x \ge 1 \end{cases}$$

Η f+g δεν είναι οιονεί κοίλη γιατί π.χ. (f+g)(0,5)=−0,25<(f+g)(2)=0, αλλά (f+g)(1)=−1<(f+g)(0,5).

Επομένως, ενώ το άθροισμα κοίλων συναρτήσεων είναι κοίλη συνάρτηση, το άθροισμα οιονεί κοίλων συναρτήσεων δεν είναι απαραιτήτως οιονεί κοίλη συνάρτηση.

7. Έστω μια συνάρτηση u η οποία είναι οιονεί κοίλη και μια άλλη συνάρτηση g η οποία είναι αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g∘u είναι οιονεί κοίλη.

ΛΥΣΗ:

Επειδή η u είναι οιονεί κοίλη, είναι $u[\lambda x + (1-\lambda)y] \ge \min\{u(x), u(y)\}$

Επειδή η g είναι αύξουσα, είναι:

$g\{u[\lambda x + (1-\lambda)y]\} \ge g[\min\{u(x), u(y)\}]$ ή

$(g \circ u)[\lambda x + (1-\lambda)y] \ge \min\{g[u(x)], g[u(y)]\}$ ή

$(g \circ u)[\lambda x + (1-\lambda)y] \geq \min\{(g \circ u)(x), (g \circ u)(y)\}$

Επομένως, η g∘u είναι οιονεί κοίλη.

8. Η συνάρτηση χρησιμότητας ενός καταναλωτή είναι $u_1(x, y) = (x + y)^3$ όπου x, y οι ποσότητες δύο αγαθών. Να σχεδιάσετε τις καμπύλες αδιαφορίας και να τις συγκρίνετε με τις καμπύλες αδιαφορίας ενός καταναλωτή ο οποίος έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u_2(x, y) = \min\{(x + y)^3, x + y\}$.

ΛΥΣΗ:

Οι καμπύλες αδιαφορίας της u_1 είναι ευθείες με κλίση −1. Για παράδειγμα, αν $u_1(x, y) = (x + y)^3 = C$, η καμπύλη αδιαφορίας είναι η ευθεία $y = \sqrt[3]{C} - x$.

Οι καμπύλες αδιαφορίας της συνάρτησης u_2 είναι και αυτές ευθείες με κλίση −1. Συγκεκριμένα, αν x+y=C>1, τότε η καμπύλη αδιαφορίας είναι η ευθεία y=C−x, ενώ αν x+y=C≤1, τότε η καμπύλη είναι η ευθεία $y = \sqrt[3]{C} - 1$.

Επομένως, οι δύο συναρτήσεις έχουν παρόμοιες καμπύλες αδιαφορίας.

9. Ένας καταναλωτής Κ έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u(x,y) = xy$ όπου x,y είναι οι ποσότητες δύο αγαθών. Ενδιαφέρεται να συνεργαστεί με κάποιον καταναλωτή με παρόμοιες προτιμήσεις. Υποψήφιοι για τη συνεργασία είναι οι παρακάτω:

Συνεργάτης Α με συνάρτηση χρησιμότητας $u_A(x, y) = xy(1 - xy)$

Συνεργάτης Β με συνάρτηση χρησιμότητας $u_B(x, y) = -\dfrac{1}{10 + xy}$

Συνεργάτης Γ με συνάρτηση χρησιμότητας $u_\Gamma(x, y) = 200xy + 300$

Συνεργάτης Δ με συνάρτηση χρησιμότητας $u_\Delta(x, y) = \dfrac{x}{y}$

Ποιον από τους συνεργάτες Α-Δ θα προτιμήσει;

ΛΥΣΗ:

Είναι προφανές ότι ο καταναλωτής θα επιλέξει ως συνεργάτη κάποιον με παρόμοια συνάρτηση χρησιμότητας. Δε θα επιλέξει τον Α γιατί καθώς η συνάρτηση χρησιμότητας του Κ αυξάνει, η συνάρτηση u_A μειώνεται. Επίσης, δε θα επιλέξει το Δ γιατί καθώς η ποσότητα του αγαθού y αυξάνει, η χρησιμότητα του Κ αυξάνει ενώ η u_Δ μειώνεται.

Ο καταναλωτής Κ θα επιλέξει το Β ή το Γ γιατί και οι δύο έχουν συναρτήσεις χρησιμότητας που είναι μονότονες συναρτήσεις ως προς τη χρησιμότητα u του Κ.

ΛΥΣΕΙΣ 4^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 4.1

1. Έστω η συνάρτηση f:$\Re\to\Re$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0=0.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\ldots=\dfrac{1}{x^2+1}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$. Άρα f ′(0)=1.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x^2+3, & x\le 1\\ x^3+4, & x>1\end{cases}$. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0=1.

ΛΥΣΗ:

Για x<1 είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{2x^2+3-5}{x-1}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=2(x+1)$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$

Για x>1 είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x^3+4-5}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=3$

Επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x^2-5$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο x_0=2.

ΛΥΣΗ:

Η κλίση της ευθείας είναι:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\frac{2x^2-5-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}[2(x+2)]=4$$

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Α[2, f(2)]=Α(2,3), η εξίσωσή της είναι y−3=8(x−2) ή y=8x−13.

Ασκήσεις 4.2

1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$f(x)=(x^3-x+3)(x^6-10x^2)$

$g(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

$h(x)=x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$u(x) = \sqrt[3]{x^7}$$

$$v(x) = \frac{x+3}{2}(x^2 - 4x + 9)$$

$$w(x) = \frac{3x^5}{x^2 - 2x + 1}$$

ΛΥΣΗ:

$$f'(x) = (3x^2 - 1)(x^6 - 10x^2) + (x^3 - x + 3)(6x^5 - 20x)$$

$$g'(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$$

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$u'(x) = \frac{7x}{3}\sqrt[3]{x}$$

$$v'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$$

$$w'(x) = \frac{3x^4(3x^2 - 8x + 5)}{(x-1)^4}$$

2. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$f(x) = \left(1 - x^3\right)^5$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 9}}$$

$$h(x) = \left(5e^x\right)^3$$

$$u(x) = \ln\left(x^2 - 3\right)$$

$$v(x) = \frac{\ln x}{e^{x^2}}$$

$$w(x) = \sqrt{(x-1)^5(6x-5)}$$

ΛΥΣΗ:

$$\frac{df}{dx} = -15x^2(1 - x^3)^4$$

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{x}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$\frac{dh}{dx} = 375e^{3x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{x^2 - 3}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2x^2 \ln x}{xe^x}$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{(x-1)^4 (36x - 19)}{2\sqrt{(x-1)^5 (6x-5)}} = \frac{(x-1)^2 (36x - 19)}{2\sqrt{(x-1)(6x-5)}}$$

3. Να βρεθεί η παράγωγος dy/dx

(α) $y = f(u) = u^2 + 5$ **όπου** $u = 10x + 3$

(β) $y = f(u) = u^2 - 2u$ **όπου** $u = g(x) = x^2$

(γ) $y = f(u) = u^3$ **όπου** $u = g(x) = x^2 + 3x + 1$

(δ) $y = f(u) = 10 - 5u^3$ **όπου** $u = g(x) = -x + x^3$

(ε) $y = f(u) = u^4 - u^2$ **όπου** $u = g(x) = x^2 - 4$

(στ) $y = f(u) = \sqrt{u}$ **όπου** $u = g(x) = \frac{x^2}{2}$

(ζ) $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 1}$ **όπου** $u = g(x) = x^4$

ΛΥΣΗ:

(α) $\frac{dy}{dx} = 200x + 60$

(β) $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2 - 1)$

(γ) $\frac{dy}{dx} = 3(2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^2$

(δ) $\frac{dy}{dx} = -15x^2 (x^2 - 1)(3x^2 - 1)$

(ε) $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2 - 4)(2x^4 - 16x^2 + 31)$

(στ) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{|x|\sqrt{2}}$

(ζ) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^7}{\sqrt{x^8 - 1}}$

Ασκήσεις 4.3

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x^2}{(x-1)^2}$

(β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}}{x^6}$

(ε) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}$

(στ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

ΛΥΣΗ:

Τα όρια υπολογίζονται με εφαρμογή του κανόνα L' Hospital.

(α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{2}{x}}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x(x-1)}$, το οποίο δεν υπάρχει γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(x-1)}=+\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(x-1)}=-\infty$

(β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{6}=\dfrac{1}{6}$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{6x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{30x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{120x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{360x^2}=+\infty$$

(ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

(στ) Είναι $x^x=e^{x\ln x}$ και

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$$

Επειδή η e^x είναι συνεχής, είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=e^0=1$

Ασκήσεις 4.4

1. Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να εκτιμήσετε πόσο μεταβάλλεται η τιμή της όταν το x μεταβάλλεται από την τιμή x_0 κατά dx:

(α) $f(x)=\ln(x^2+1)-x$ **για $x_0=0$ και dx=0,01**

(β) $f(x)=e^{2x-5}$ **για $x_0=5$ και dx=0,01**

(γ) $f(x)=4\frac{x^3}{3}-6x^2$ **για $x_0=1$ και dx=0,01**

(δ) $\mathrm{f(x)}=0{,}5\mathrm{x}^2+7\mathrm{x}-30\ln\mathrm{x}$ **για $x_0=1$ και dx=0,01**

(ε) $f(x)=\frac{x^5}{5}-x$ **για $x_0=0$ και dx=0,01**

(στ) $f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$ **για $x_0=1$ και dx=0,01**

ΛΥΣΗ:

Σε κάθε περίπτωση η μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης όταν το x μεταβάλλεται κατά dx υπολογίζεται προσεγγιστικά ως

$$\Delta f(x_0)\approx f(x_0+dx)-f(x_0)=f'(x_0)dx=df(x_0)$$

(α) Είναι $df(x_0)=\left(\frac{2x_0}{x_0^2+1}-1\right)dx$. Για $x_0=0$ και dx=0,01 είναι Δf(0)≈–0,01.

(β) $df(x_0)=2e^{2x_0-5}dx$. Για $x_0=5$ και dx=0,01 είναι $\Delta f(5)\approx 2e^5\cdot 0{,}01=2{,}968$

(γ) $df(x_0)=(4x_0^2-12x_0)dx$. Για $x_0=1$ και dx=0,01 είναι Δf(1)≈–8·0,01=–0,08

(δ) $df(x_0)=\left(x_0+7-\frac{30}{x_0}\right)dx$. Για $x_0=1$ και dx=0,01 είναι Δf(1)≈–22·0,01=–0,22

(ε) $df(x_0)=(x_0^4-1)dx$. Για $x_0=0$ και dx=0,01 είναι Δf(0)≈–0,01

(στ) $df(x_0)=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x_0^3}}-1\right)dx$. Για $x_0=1$ και dx=0,01 είναι Δf(1)≈0,015

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f(x)=4x\ln x}$ **και** $\mathrm{g(x)}=\frac{2}{\mathrm{x}^3}$**. Να βρείτε μία προσέγγιση των τιμών f(1,5) και g(1,2).**

ΛΥΣΗ:

Οι ζητούμενες τιμές μπορεί να υπολογιστούν προσεγγιστικά με τη βοήθεια των διαφορικών των συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, είναι:

$f(1{,}5)\approx f(1)+df(1)=0+f'(1)dx=4\cdot 0{,}5=2$ και

$g(1{,}2)\approx g(1)+dg(1)=2+g'(1)dx=2-6\cdot 0{,}2=0{,}8$

Ασκήσεις 4.5

1. **Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f(x) είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και είναι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ.**

ΛΥΣΗ:

Έστω τυχόν $x_0\in\Delta$. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ με $x\neq x_0$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[x_0, x]$ ή στο $[x, x_0]$. Άρα υπάρχει $\alpha\in[x_0,x]$ (ή $\alpha\in[x,x_0]$) τέτοιο ώστε

$$f'(a)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Αλλά $f'(\alpha)=0$, οπότε $f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

2. **Έστω μια συνάρτηση f(x) με πεδίο ορισμού το διάστημα [3, 8] για την οποία είναι $f(3)=10$. Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και αν $f'(x)\geq 2$ για κάθε $x\in(3,8)$, ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση στο σημείο $x_0=8$;**

ΛΥΣΗ:

Με βάση το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $x_0\in(3,8)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(8)-10}{5}$.

Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η $f'(x_0)$ είναι $f'(x_0)=2$. Άρα η μικρότερη τιμή του f(8) είναι $10+2\cdot 5=20$.

3. **Να αποδείξετε ότι:**

   (α) αν x>0, τότε $\ln x \leq x-1$

   (β) αν x>0, τότε $\dfrac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x$

ΛΥΣΗ:

(α) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln x$ και πεδίο ορισμού το σύνολο $(0,+\infty)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε κάθε διάστημα $[x_1, x_2]$ με $0<x_1<x_2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) Αν $x>1$, υπάρχει $x_0\in(1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ή $\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{\ln x}{x-1}$

Επειδή $x_0>1$ είναι $\dfrac{1}{x_0}<1$, οπότε $\dfrac{\ln x}{x-1}<1$ ή $\ln x<x-1$.

(ii) Αν $0<x<1$, υπάρχει $x_0\in(x,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ ή

$$\frac{1}{x_0}=\frac{-\ln x}{1-x}=\frac{\ln x}{x-1}$$

Επειδή $x_0<1$ είναι $\dfrac{1}{x_0}>1$, οπότε $\dfrac{\ln x}{x-1}>1$ ή επειδή $x-1<0$, $\ln x<x-1$.

(iii) Αν $x=1$, τότε $\ln x=x-1=0$

Επομένως, για κάθε $x>0$ είναι $\ln x\leq x-1$.

(β) Έστω η συνάρτηση g με τύπο g(x)=ln(x+1). Η g ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε κάθε διάστημα $[x_1, x_2]$ με $0 \le x_1 \le x_2$. Επομένως, για κάθε x>0 υπάρχει $x_0 \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x_0 + 1} = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Επειδή $0<x_0<x$, είναι $1<x_0+1<x+1$ και $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x_0+1} < 1$ ή $\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x} < 1$ ή

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

Ασκήσεις 4.6

1. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

(β) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$

(γ) $f(x) = -x^2 + 4x + 15$

(δ) $f(x) = (x-4)^{\frac{3}{2}}$

(ε) $f(x) = \dfrac{(4x+20)^9}{4}$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $f'(x) = 6(x+2)$. Η συνάρτηση είναι αυστηρά φθίνουσα στο (–∞, 2] και αυστηρά αύξουσα στο [2, +∞).

(β) Είναι $f'(x) = -\dfrac{6x}{(x^2-1)^2}$. Η f είναι αυστηρά φθίνουσα στο (–∞, 0] και αυστηρά αύξουσα στο [0, 1) και στο (1, +∞).

(γ) Είναι $f'(x) = -2(x-2)$. Η f είναι αυστηρά αύξουσα στο (–∞, 2] και αυστηρά φθίνουσα στο [2, +∞).

(δ) Είναι $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x-4}$. Η f είναι αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, που είναι το σύνολο [4, +∞).

(ε) Είναι $f(x) = 9(4x+20)^8 \ge 0$, οπότε η f είναι αυστηρά αύξουσα στο $\Re$.

2. Αν $a > 0, b > 0, c > 0$ **να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f είναι:**

(i) Αύξουσα
(ii) Φθίνουσα
(iii) Κοίλη
(iv) Κυρτή

(α) $f(x) = ax + b$

(β) $f(x) = ax^2 + bx + c$

(γ) $f(x) = ax^3$

(δ) $f(x) = \mathrm{b - ax}$

(ε) $f(x) = -\mathrm{ax}^2 - \mathrm{bx - c}$

(στ) $f(x) = \mathrm{ax}^4$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι f ′(x)=a>0 και f ″(x)=0. Η f είναι αυστηρά αύξουσα, κυρτή και κοίλη στο ℜ.

(β) Είναι f ′(x)=2ax+b και f ″(x)=2a>0. 0Η f είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, αυστηρά αύξουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ και αυστηρά κυρτή στο ℜ.

(γ) Είναι f ′(x)=3ax^2≥0 και f ″(x)=6ax. Η f είναι αυστηρά αύξουσα στο ℜ, κοίλη στο (−∞, 0] και κυρτή στο [0, +∞).

(δ) Είναι f ′(x)=−a<0 και f ″(x)=0. Η f είναι αυστηρά φθίνουσα, κυρτή και κοίλη στο ℜ.

(ε) Είναι f ′(x)=−2ax−b και f ″(x)=−2a<0. 0Η f είναι αυστηρά αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, αυστηρά φθίνουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ και αυστηρά κοίλη στο ℜ.

(στ) Είναι f ′(x)=4ax^3 και f ″(x)=12ax^2≥0. Η f είναι αυστηρά φθίνουσα στο (−∞, 0], αυστηρά αύξουσα στο [0, +∞) και κυρτή στο ℜ.

3. Να βρείτε τα σημεία καμπής των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - 7.5x^2$

(β) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 18$

(γ) $f(x) = (3x-12)^{\frac{5}{2}}$

(δ) $f(x) = e^{-x}$

(ε) $f(x) = -\ln x$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $f''(x) = x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$. Επειδή η f ″ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των x_1=−3 και x_2=5, η f παρουσιάζει σημεία καμπής στα σημεία αυτά.

(β) Είναι $f''(x) = 6x + 12 = 6(x+2)$. Παρόμοια με το (α), η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0=−2.

(γ) Είναι $f''(x) = \frac{135}{4}\sqrt{3x-12}$, οπότε η f ″(x)=0 όταν x=4 και f ″(x)>0 για κάθε x>4. Επειδή, όμως, η f ″ δεν ορίζεται για x<4, το x_0=4 δεν είναι σημείο καμπής της f.

(δ) Είναι $f''(x) = e^{-x} > 0$ για x∈ℜ, οπότε η f δεν έχει σημεία καμπής.

(ε) Παρόμοια, η f έχει πεδίο ορισμού το (0, +∞) και είναι $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε x>0. Η f δεν έχει σημεία καμπής.

4. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις:

(α) $f(x) = x^2 e^x$

(β) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-0,1x}$

(γ) $f(x) = \dfrac{6x}{x^4 + 2}$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $f'(x) = xe^x(x+2)$ και $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$. Η f ′ μηδενίζεται για x=0 και x=–2 και η f″ για $x_1 = -2 + \sqrt{2}$ και $x_1 = -2 - \sqrt{2}$. Επειδή f ″(0)=2>0 και f ″(–2)=–2e^{-2}<0, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x=0 και τοπικό μέγιστο στο x=–2.

Τέλος, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^x) = +\infty$. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		–2		$-2+\sqrt{2}$		0		$+\infty$
f’(x)		+	|	+	0	–	|	–	0	+	
f’’(x)		+	0	–	|	–	0	+	|	+	
f (x)	0		Σ. καμπής		Τ.μ.		Σ.κ.		Τ.ε.		$+\infty$

(β) Πεδίο ορισμού είναι το ℜ+. Είναι $f'(x) = e^{-0,1x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 0,1\sqrt{x}\right)$ και

$f''(x) = -0,1e^{-0,1x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 0,1\sqrt{x}\right) + e^{-0,1x}\left(-\dfrac{1}{4}x^{-3/2} - \dfrac{0,1}{2\sqrt{x}}\right)$. Η f ′ μηδενίζεται για x=5.

Για x=5 είναι $f''(5) = e^{-0,5}\left(-\dfrac{1}{4}\cdot 0,089 - \dfrac{0,05}{\sqrt{5}}\right) < 0$. Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο x=5.

Η f ″ μηδενίζεται για x≈12,07. Τέλος, $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x}e^{-0,1x}] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{e^{0,1x}} = 0$. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

	0		5		12,07		$+\infty$
f’ (x)		+	0	–	|	–	
f’’ (x)		–	|	–	0	+	
f (x)	0		Τ.μ.		Σ.κ.		

(γ) Πεδίο ορισμού της f είναι το ℜ. Είναι $f(x) = \dfrac{12 - 18x^4}{(x^4+2)^2}$ και

$f(x) = \dfrac{72x^7 - 240x^3}{(x^4+2)^3} = \dfrac{24x^3(3x^4 - 10)}{(x^4+2)^3}$. Η f ′ μηδενίζεται για x≈0,9 και x≈–0,9 ενώ η f ″ μηδενίζεται για x=0 και $x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{10}{3}} \approx \pm 1,3512$. Είναι ακόμα $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Η μονοτονία, τα ακρότατα, η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-1,35$		$-0,9$		0		$0,9$		$1,35$		$+\infty$
$f'(x)$		−		−	0	+		+	0	−		−	
$f''(x)$		−	0	+		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	Σ.κ.	$\searrow$	Τ.ε.	$\nearrow$	Σ.κ.	$\nearrow$	Τ.μ.	$\searrow$	Σ.κ.	$\searrow$	0

5. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f:[0,2]→ℜ με τύπο $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 1$

ΛΥΣΗ:

Είναι $f'(x) = 3x^2 - 16x + 16 = (3x-4)(x-4)$ και $f''(x) = 6x - 16$. Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στα σημεία x1=4/3 x2=4, που απορρίπτεται γιατί είναι εκτός του πεδίου ορισμού της f. Για x=4/3 είναι f ″(x)=–8<0, άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο x=4/3.

Η f είναι αύξουσα στο $[0,\frac{4}{3}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{4}{3},2]$. Επίσης είναι f(0)=–1, f(4/3)=8,48 και f(2)=7. Επομένως, το τοπικό μέγιστο είναι και ολικό μέγιστο. Τέλος, στο x=0 η f έχει ελάχιστο.

Επειδή f ″(x)<0 για κάθε x∈[0,2], η f είναι κοίλη.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

	0		4/3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f''(x)$		−	|	−	
$f(x)$	−1	$\nearrow$	Τ.μ.	$\searrow$	7

6. Το συνολικό κόστος παραγωγής *q* μονάδων από ένα προϊόν περιγράφεται από την συνάρτηση:

$C = 5000000 + 250q + 0{,}002q^2$

όπου *C* είναι το συνολικό κόστος σε χρηματικές μονάδες.
(α) Πόσες μονάδες πρέπει να παραχθούν για να ελαχιστοποιηθεί το μέσο κόστος;
(β) Ποιο είναι το ελάχιστο μέσο κόστος;
(γ) Ποιο είναι τα συνολικό κόστος σ' αυτό το επίπεδο παραγωγής;

ΛΥΣΗ:

Το μέσο κόστος είναι $AC = \frac{C}{q} = \frac{5 \cdot 10^6}{q} + 250 + 0{,}002q$

(α) Είναι $\frac{dAC}{dq} = -\frac{5 \cdot 10^6}{q^2} + 0{,}002$ που μηδενίζεται όταν $q_0=5 \cdot 10^4$. Επειδή είναι $\frac{d^2AC}{dq^2} = \frac{10^7}{q^3} > 0$, το μέσο κόστος είναι ελάχιστο όταν $q_0=5 \cdot 10^4$.

(β) Το ελάχιστο μέσο κόστος είναι

$AC(q_0)=450$ χρηματικές μονάδες.

(γ) Το αντίστοιχο συνολικό κόστος είναι $C(q_0)=AC(q_0) \cdot q_0=2{,}25 \cdot 10^7$ χρηματικές μονάδες.

Ασκήσεις 4.7

1. Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε το πολυώνυμο Taylor βαθμού n για να προσεγγίσετε τις τιμές της συνάρτησης γύρω από το σημείο x_0

(α) $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ **για n=4 και x_0=1**

(β) $f(x)=e^{-x}$ **για n=3 και x_0=0,5**

(γ) $f(x)=\sqrt{x}$ **για n=4 και x_0=4**

Σε κάθε περίπτωση να υπολογίσετε το λάθος της προσέγγισης.

ΛΥΣΗ:

(α)

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+R_\nu$$

Όπου $R_\nu=\dfrac{f^{(5)}(p)}{5!}(x-1)^5$ με p μεταξύ x και 1.

Είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{(2+x)^2}$ και $f'(1)=-\dfrac{1}{9}$

$f''(x)=\dfrac{2}{(2+x)^3}$ και $f''(1)=\dfrac{2}{27}$

$f^{(3)}(x)=-\dfrac{6}{(2+x)^4}$ και $f^{(3)}(1)=-\dfrac{6}{81}=-\dfrac{2}{27}$

$f^{(4)}(x)=\dfrac{24}{(2+x)^5}$ και $f^{(4)}(1)=\dfrac{24}{243}=\dfrac{8}{81}$

$f^{(5)}(x)=-\dfrac{120}{(2+x)^6}$

$f(x)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}(x-1)+\dfrac{1}{27}(x-1)^2-\dfrac{1}{81}(x-1)^3+\dfrac{1}{243}(x-1)^4+R_5$ όπου

$R_5=-\dfrac{1}{(2+p)^6}(x-1)^5$

(β) Είναι $f(0,5)=e^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$f'(x)=-e^{-x}$ και $f'(0,5)=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$f''(x)=e^{-x}$ και $f''(0,5)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$$f^{(3)}(x) = -e^{-x} \text{ και } f^{(3)}(0,5) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f^{(4)}(x) = e^{-x}$$

$$f(x) = f(0,5) + \frac{f'(0,5)}{1!}(x-0,5) + \frac{f''(0,5)}{2!}(x-0,5)^2 + \frac{f^{(3)}(0,5)}{3!}(x-0,5)^3 + R_4 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}}(x-0,5) + \frac{1}{2\sqrt{e}}(x-0,5)^2 - \frac{1}{6\sqrt{e}}(x-0,5)^3 + R_4$$

Όπου $R_4 = \frac{e^{-p}}{24}(x-0,5)^4$

(γ) f(4)=2 και

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(4) = -\frac{1}{32}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \qquad f^{(3)}(4) = \frac{3}{256}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \qquad f^{(4)}(4) = -\frac{15}{2048}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}}$$

$$f(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f^{(3)}(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4 + R_\nu =$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{16384}(x-4)^4 + R_5$$

Όπου $R_5 = \frac{105}{32 \cdot 120}p^{-\frac{9}{2}}(x-4)^5$

2. Να προσεγγίσετε τη συνάρτηση f(x)=lnx με ένα πολυώνυμο και να υπολογίσετε τον αριθμό ln(1,25) με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

ΛΥΣΗ:

f(1)=0

$f'(x) = \frac{1}{x}$ και f ′(1)=1

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ και f ′′(1)=−1

$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$ και $f^{(3)}(1)=2$

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$ και $\qquad$ $f^{(4)}(1)=-6$

$f^{(5)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$

Και γενικά $f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\dfrac{(\nu-1)!}{x^\nu}$

Είναι $R_\nu = \dfrac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!}(0,25)^\nu = (-1)^{\nu-1}\dfrac{(\nu-1)!}{p^\nu}\cdot\dfrac{1}{\nu!}(0,25)^\nu = (-1)^{\nu-1}\dfrac{1}{p^\nu \cdot \nu}(0,25)^\nu$

Όπου p∈(1, 1,25)

Για να είναι $\left|R_\nu\right| \le 0{,}001$ πρέπει $\dfrac{1}{\nu \cdot p^\nu}(0,25)^\nu \le 0{,}001$ ή $\dfrac{(0,25)^\nu}{\nu} \le 0{,}001$, απ' όπου προκύπτει ν=4.

Επομένως, είναι

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + R_4 \text{ ή}$$

$$f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 + R_4 \text{ και}$$

$$f(1,25) = (0,25) - \frac{1}{2}(0,25)^2 + \frac{1}{3}(0,25)^3 + R_4 = 0{,}2239 + R_4$$

Με $R_4 = -\dfrac{6}{p^4}\cdot\dfrac{1}{24}(0,25)^4 = -0{,}00097\dfrac{1}{p^4}$ και p∈(1, 1,25).

Η πραγματική τιμή του ln(1,25) είναι 0,2331.

3. Να βρείτε το πολυώνυμο Maclaurin 4ου βαθμού για την προσέγγιση της συνάρτησης $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \dfrac{1-\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}}$.

ΛΥΣΗ:

Είναι f(0)=1

$f'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$ και f ′(0)=–2

$f''(x) = \dfrac{4}{(1+x)^3}$ και f ′′(0)=4

$f^{(3)}(x) = -\dfrac{12}{(1+x)^4}$ και $f^{(3)}(0)= -12$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{48}{(1+x)^5}$ και $f^{(4)}(0)= 48$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{240}{(1+x)^6}$$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{1!}x + \frac{4}{2}x^2 - \frac{12}{6}x^3 + \frac{48}{24}x^4 + R_5 = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 + R_5$$

Με $R_5 = \frac{f^{(5)}(p)}{5!}x^5 = -\frac{2}{(1+p)^6}x^5$

4. Να υπολογίσετε προσεγγιστικά τους παρακάτω αριθμούς:

(α) $\sqrt{125}$

(β) e

ΛΥΣΗ:

(α) Έστω $f(x) = \sqrt{x}$ και x_0=121. Τότε είναι $f(x_0)$=11 και

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ f'(121) = \frac{1}{22}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \ f''(121) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{11^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, \ f^{(5)}(x) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{11^5}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

Τότε είναι

$$f(125) = f(121) + \frac{f'(121)}{1!}4 + \frac{f''(121)}{2!}16 + R_3 = 11 + 0{,}1818 - 0{,}0015 + R_3$$

όπου $R_3 = \frac{3}{8}p^{-\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{6}\cdot 64 = 4p^{-\frac{5}{2}}$ με $p \in (121, 125)$.

(β) Έστω $g(x)=e^x$ και x_0=0. Τότε είναι

$g(x_0)=0$

$g'(x)=e^x \quad g'(0)=1$

$g''(x)=e^x \quad g''(0)=1$ κ.ο.κ.

Επομένως, είναι:

$$g(x) = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + R_6 \qquad \text{και}$$

$$g(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + R_6 = 2{,}7167 + R_6$$

όπου $R_6 = \frac{g^{(6)}(p)}{720}\cdot 1^6 = \frac{e^p}{720}$ με $p \in (0,1)$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. Να βρείτε την παράγωγο dy/dx

(α) $y = f(u) = (u-3)^5$ **όπου** $u = g(x) = x^2 - 2x$

(β) $y = f(u) = \sqrt{u^3}$ **όπου** $u = g(x) = \sqrt{x}$

(γ) $y = f(u) = e^u$ **όπου** $u = g(x) = 2x^2 - 5x$

(δ) $y = f(u) = e^{u^2}$ **όπου** $u = g(x) = x^2 - 5$

(ε) $y = f(u) = \ln(5u-3)$ **όπου** $u = g(x) = 4x^3 - 3x^2$

(στ) $y = f(u) = 10\ln\left(15 - u^3\right)$ **όπου** $u = g(x) = x^2 - 2x + 5$

ΛΥΣΗ:

(α) $\dfrac{dy}{dx} = 10(x-1)(x^2-2x-3)^4$

(β) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

(γ) $\dfrac{dy}{dx} = (4x-5)e^{2x^2-5x}$

(δ) $\dfrac{dy}{dx} = 4x(x^2-5)e^{(x^2-5)^2}$

(ε) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{30x(2x-1)}{20x^3-15x^2-3}$

(στ) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{60(x-1)(x^2-2x+5)^2}{15-(x^2-2x+5)^3}$

2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων και να προσδιορίσετε το είδος τους.

(α) $f(x) = 3\dfrac{x^4}{4} - 75\dfrac{x^2}{2}$

(β) $f(x) = -5x^5 - 10$

(γ) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 6x + 3$

(δ) $f(x) = 4x\ln x$

(ε) $f(x) = \ln(5x) - 10x$

(στ) $f(x) = x^2 + x - \ln x$

(ζ) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $f'(x) = 3x^3 - 75x = 3x(x^2-25)$ και $f''(x) = 9x^2 - 75$. Τα κρίσιμα σημεία είναι $x_1=0$, $x_2=-5$, $x_3=5$. Επειδή $f''(0)=-75<0$, $f''(-5)= f''(5)=150>0$, η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1=0$ και τοπικό ελάχιστο στα σημεία $x_2=-5$ και $x_3=5$.

(β) Είναι $f'(x) = -25x^4$ που μηδενίζεται για x=0. Επειδή $f'(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$ και $f^{(5)}(0) = -600 \neq 0$, η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο x=0.

(γ) Είναι $f'(x) = -x + 6$ που μηδενίζεται για x=6. Επειδή f ''(6)=–1<0, η f έχει τοπικό μέγιστο στο x=6.

(δ) Είναι f '(x)=4(lnx+1) και $f''(x) = \frac{4}{x}$. Η f ' (x)=0 έχει λύση το $x_0 = \frac{1}{e}$ και, επειδή $f''(\frac{1}{e}) > 0$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{e}$.

(ε) $f'(x) = \frac{1}{x} - 10$ και $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Η f ' (x)=0 έχει λύση το $x_0 = \frac{1}{10}$ και $f''(\frac{1}{10}) = -100 < 0$. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{1}{10}$.

(στ) $f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$. Είναι f '(x)=0 για $x_0 = \frac{1}{2}$ και $f''(\frac{1}{2}) = 6 > 0$, οπότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$.

(ζ) $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$ και $f''(x) = \frac{2x^5 - 4x^3 - 6x}{(x^2+1)^4}$. Στάσιμα σημεία είναι τα σημεία x_1=–1 και x_2=1. Επειδή f ''(–1)>0 και f ''(1)<0, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_1=–1 και τοπικό μέγιστο στο x_2=1

3. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x \to 13} \frac{\ln(x-12)}{x-13}$

(β) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - x}$

(γ) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{3x}$

(δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-3x}$

(ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$

(στ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x \ln x}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\lim\limits_{x \to 13} \frac{\ln(x-12)}{x-13} = \lim\limits_{x \to 13} \frac{\frac{1}{x-12}}{1} = 1$

(β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x-1}=1$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5e^{5x}}{3}=\dfrac{5}{3}$

(δ) $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-3x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^{3x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^{3x}}=0$

(ε) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{\frac{2}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}(-\frac{2}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=2\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{2}{x}}=2$

(στ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+3}{\ln x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{\frac{1}{x}}=+\infty$

3. Να βρείτε με προσεγγίσεις τις τιμές :

(α) $\sqrt[3]{990}$

(β) $\sqrt[3]{1010}$

(γ) ln(0,5)

(δ) ln(1,3)

ΛΥΣΗ:

Οι τιμές υπολογίζονται προσεγγιστικά με βάση την έννοια του διαφορικού ως εξής:

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+df(x_0)=f(x_0)+f'(x_0)dx$

(α) Είναι $f(x)=\sqrt[3]{x}$, οπότε $f'(x_0)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$. Για x_0=1000 και dx=–10 είναι

$\sqrt[3]{990}=\sqrt[3]{1000}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{10^6}}\cdot 10=10-\dfrac{1}{3\cdot 10^2}\cdot 10=\dfrac{299}{30}$

(β) Είναι $f(x)=\sqrt[3]{x}$, οπότε $f'(x_0)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$. Για x_0=1000 και dx=10 είναι

$\sqrt[3]{1010}=\sqrt[3]{1000}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{301}{30}$

(γ) Είναι $h(x)=\ln x$, οπότε $h'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$. Για x_0=1 και dx=–0,5 είναι

$\ln(0,5)=\ln 1-\dfrac{1}{1}\cdot 0,5=-0,5$

(δ) Παρόμοια, για x_0=1 και dx=0,3 είναι $\ln(1,3)=\ln 1+\dfrac{1}{1}\cdot 0,3=0,3$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{10-x}{x^2+2}$. Να εκτιμήσετε τη μεταβολή της τιμής της καθώς το x αυξάνει από το 10 στο 10,5 και να συγκρίνετε την εκτίμησή σας με την πραγματική μεταβολή της f(x).

ΛΥΣΗ:

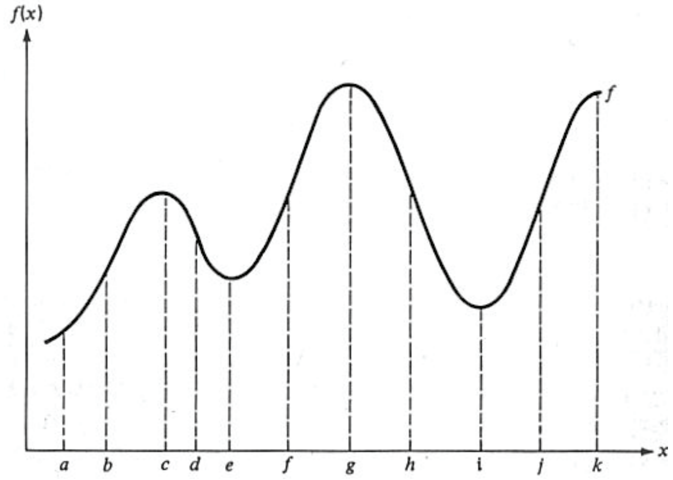
Είναι $f'(x)=\dfrac{x^2-20x-2}{(x^2+2)^2}$. Για x0=10 και dx=0,05 είναι:

$$f(10{,}5)\approx f(10)+f'(10)\cdot 0{,}5=0-\frac{102}{(102)^2}\cdot 0{,}5=-\frac{0{,}5}{102}=-0{,}0049$$

Η πραγματική τιμή της συνάρτησης είναι $f(10{,}5)=\dfrac{10-10{,}5}{(10{,}5)^2+2}=-0{,}0045$, δηλαδή διαφέρει από την εκτίμησή μας στο 4^o δεκαδικό ψηφίο.

6. Για την συνάρτηση f που παρουσιάζεται στο παρακάτω γράφημα, εντοπίστε για ποιες τιμές του x:

- **i. Είναι αύξουσα.**
- **ii. Είναι φθίνουσα.**
- **iii. Δεν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.**
- **iv. Παρουσιάζει σημείο καμπής**
- **v. Είναι Κοίλη.**
- **vi. Είναι Κυρτή**



ΛΥΣΗ:

Τα χαρακτηριστικά της f συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

	a		b		c		d		e		f		g		h		i		j		k
Μονοτονία	|	+	|	+	|	−	|	−	|	+	|	+	|	−	|	−	|	+	|	+	
Κυρτή	√	√	|				|	√	√	√	|				|	√	√	√	|		
Κοίλη			|	√	√	√	|				|	√	√	√	|				|	√	√
Σημεία καμπής			√				√				√				√				√		

7. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(β) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

(γ) $f(x) = xe^{-x}$

ΛΥΣΗ:

(α) Πεδίο ορισμού της f είναι το $\Re_+^*$. Είναι f(1)=0, f(x)>0 για x>1 και f(x)<0 για x∈(0,1). Επίσης, είναι $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ και $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$. Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται για x=e και $f''(e) = -\dfrac{1}{e^3} < 0$. Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο για x=e. Επίσης, η f έχει σημείο καμπής στο $x = e^{3/2} \approx 4{,}48$. Τέλος, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

	0		e		$e^{3/2}$		+∞
f' (x)		+	0	−	|	−	
f'' (x)		−	|	−	0	+	
f (x)	−∞		Τ.μ.		Σ.κ.		0

(β) Πεδίο ορισμού της f είναι το $\Re$. Είναι f(x)>0 για κάθε x∈$\Re$, f(0)=1 και $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$ για κάθε x∈$\Re$, οπότε η f είναι αυστηρά φθίνουσα. Επίσης, είναι $f(x) = (x^2+1)^{-3/2} > 0$, οπότε η f είναι κυρτή. Τέλος, είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+1} - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty .$$

(γ) Πεδίο ορισμού είναι το $\Re$. Είναι $f'(x) = e^x(1-x)$ και $f''(x) = e^{-x}(x-2)$. Η f′(x) μηδενίζεται για x=1, ενώ η f ′′(x) μηδενίζεται για x=2. Επειδή είναι f ′(1)<0, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=1. Επίσης, είναι f ′′(x)≥0 για x≥2 και f ′′(x)≤0 για x≤2, οπότε η f είναι κοίλη στο (−∞, 2], κυρτή στο [2, +∞) και παρουσιάζει σημείο καμπής στο x=2. Τέλος, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

	−∞		1		2		+∞
f' (x)		+	0	−	|	−	
f'' (x)		−	|	−	0	+	
f (x)	−∞		Τ.μ.		Σ.κ.		0

8. Μια επιχείρηση αντιμετωπίζει την παρακάτω συνάρτηση κόστους για την παραγωγή *q* μονάδων ενός συγκεκριμένου προϊόντος:

$$C = 350000 + 7500q + 0{,}25q^2$$

όπου *C* είναι το συνολικό κόστος σε δραχμές.

(α) Πόσες μονάδες πρέπει να παραχθούν για να ελαχιστοποιηθεί το μέσο κόστος;

(β) Ποιο είναι το ελάχιστο μέσο κόστος;

(γ) Ποιο είναι τα συνολικό κόστος σ' αυτό το επίπεδο παραγωγής;

ΛΥΣΗ:

(α) Το μέσο κόστος είναι $AC = \dfrac{350000}{q} + 7500 + 0{,}25q$. Η πρώτη παράγωγος είναι:

$\dfrac{dAC}{dq} = -\dfrac{350000}{q^2} + 0{,}25$ που μηδενίζεται για $q = \sqrt{140000} = 1183{,}216$

Είναι $\dfrac{d^2AC}{dq^2} = 700000q^{-3} > 0$, οπότε το μέσο κόστος ελαχιστοποιείται για $q = 1183{,}216$.

(β) Το ελάχιστο μέσο κόστος είναι AC=8091,608 χρηματικές μονάδες.

(γ) Το αντίστοιχο συνολικό κόστος είναι C=AC·q=9574120 χρηματικές μονάδες.

9. Να προσεγγίσετε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις με ένα πολυώνυμο το πολύ 3ου βαθμού:

(α) $f(x) = \ln(1+e^x)$

(β) $f(x) = \ln(1-x)$

(γ) $f(x) = \sqrt{1+x}$

ΛΥΣΗ:

(α) Αν x_0=0 τότε f(0)=ln2 και

$f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ $\qquad$ $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ $\qquad$ $f''(0) = \dfrac{1}{4}$

$f^{(3)}(x) = \dfrac{e^x - e^{3x}}{(1+e^x)^4}$ $\qquad$ $f^{(3)}(0) = 0$

Το προσεγγιστικό πολυώνυμο είναι:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

(β) Αν x_0=0 τότε f(0)=ln1=0 και

$f'(x) = -\dfrac{1}{1-x}$ $\qquad$ $f'(0) = -1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\qquad$ $f''(0) = -1$

$f^{(3)}(x) = -\dfrac{2}{(1-x)^3}$ $\qquad$ $f^{(3)}(0) = -2$

Το προσεγγιστικό πολυώνυμο είναι:

$$P_3(x) = 0 - 1x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{6}x^3$$

(γ) Αν x_0=0 τότε f(0)=1 και

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \qquad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$$

Το προσεγγιστικό πολυώνυμο είναι:

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

ΛΥΣΕΙΣ 5^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 5.1

1. Το σταθερό κόστος μιας επιχείρησης είναι 100 χρηματικές μονάδες, ενώ το μεταβλητό κόστος της δίνεται από τη συνάρτηση $VC(Q) = 2 + \frac{100}{Q}$ όπου Q είναι η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση συνολικού κόστους και τη συνάρτηση οριακού κόστους.

(β) Να υπολογίσετε το οριακό κόστος που αντιστοιχεί σε ποσότητα Q=30 μονάδων και να εκτιμήσετε τη μεταβολή του συνολικού κόστους όταν η παραγόμενη ποσότητα αυξάνεται κατά 2 μονάδες από το επίπεδο των 30 μονάδων.

ΛΥΣΗ:

(α) Το συνολικό κόστος είναι $TC = 100 + Q \cdot VC(Q) = 200 + 2Q$. Το οριακό κόστος είναι MC=2 (σταθερό).

(β) Όταν η παραγόμενη ποσότητα μεταβάλλεται κατά 2 μονάδες από το επίπεδο των 30 μονάδων, το συνολικό κόστος μεταβάλλεται κατά ΔC=MC(30)·2=4 χ.μ.

2. Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν χρησιμοποιώντας ένα μόνο παραγωγικό συντελεστή. Η ποσότητα Q του παραγόμενου προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $Q = ax^b$ όπου x είναι η ποσότητα του χρησιμοποιούμενου παραγωγικού συντελεστή, α>0 και b>0. Αν w η τιμή του παραγωγικού συντελεστή και C_0 το σταθερό κόστος:

(α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση συνολικού κόστους και τη συνάρτηση οριακού κόστους της επιχείρησης.

(β) Να αποδείξετε ότι όταν η συνάρτηση παραγωγής είναι κυρτή (κοίλη), τότε η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι κοίλη (κυρτή).

ΛΥΣΗ:

(α) Η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι $TC=C_0+wx$. Από τη συνάρτηση παραγωγής $Q = ax^b$ προκύπτει ότι $x = \left(\frac{Q}{a}\right)^{1/b}$, οπότε $TC = C_0 + w\left(\frac{Q}{a}\right)^{1/b}$.

Το οριακό κόστος είναι $MC = \frac{w}{b} \cdot \frac{1}{a^{1/b}} Q^{\frac{1}{b}-1}$.

Επίσης είναι $\frac{dQ}{dx} = abx^{b-1}$ και $\frac{d^2Q}{dx^2} = ab(b-1)x^{b-2}$, ενώ

$$\frac{d^2TC}{dQ^2} = \frac{dMC}{dQ} = \frac{w}{b} \cdot \frac{1}{a^{1/b}} (\frac{1}{b} - 1) Q^{\frac{1}{b}-2}$$

(β) Η συνάρτηση παραγωγής είναι κυρτή (κοίλη) όταν b>1 (b<1), οπότε η συνάρτηση κόστους είναι κοίλη (κυρτή).

3. "Όταν το οριακό κόστος αυξάνεται, το μέσο κόστος επίσης αυξάνεται". Συμφωνείτε με την πρόταση αυτή; Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ:

Αν TC(Q) είναι η συνάρτηση κόστους, τότε η συνάρτηση οριακού κόστους είναι $MC(Q) = \dfrac{dTC}{dQ}$ και η συνάρτηση μέσου κόστους είναι $AC(Q) = \dfrac{TC(Q)}{Q}$. Επίσης, είναι:

$$\frac{dAC}{dQ} = \frac{1}{Q}(MC - AC)$$

Επομένως, το μέσο κόστος αυξάνεται όταν το οριακό κόστος υπερβαίνει το μέσο κόστος (MC>AC). Όταν το οριακό κόστος απλώς αυξάνεται, δεν αυξάνεται απαραίτητα και το μέσο κόστος. Για παράδειγμα, αν $TC(Q)=Q^2+αQ+β$, με α>0 και β>0 τότε MC(Q)=2Q+α>0 και $AC(Q) = Q + a + \dfrac{\beta}{Q}$, οπότε $\dfrac{dAC}{dQ} = 1 - \dfrac{\beta}{Q^2}$. Αν και το οριακό κόστος αυξάνεται για κάθε Q, το μέσο κόστος μειώνεται για $Q < \sqrt{\beta}$. Επομένως, η πρόταση είναι λανθασμένη.

4. Έστω η συνάρτηση $Q(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$, όπου Q είναι η παραγόμενη ποσότητα ενός προϊόντος και x η χρησιμοποιούμενη ποσότητα ενός παραγωγικού συντελεστή. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές α, β, γ και δ προκειμένου η συνάρτηση να είναι συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης;

ΛΥΣΗ:

Κατ' αρχήν πρέπει δ=0, γιατί δεν μπορεί να υπάρξει παραγωγή, χωρίς χρήση του παραγωγικού συντελεστή. Η συνάρτηση οριακού προϊόντος είναι $MP(x)=Q'(x)=3αx^2+2βx+γ$. Από την οικονομική θεωρία είναι γνωστό ότι το οριακό προϊόν μεγιστοποιείται όταν το συνολικό προϊόν παρουσιάζει σημείο καμπής. Στο σημείο αυτό είναι $\dfrac{dMP}{dx} = 0$ ή 6αx+2β=0, απ΄ όπου προκύπτει $x = -\dfrac{\beta}{2a}$. Για να έχουμε μέγιστο στο σημείο αυτό πρέπει $\dfrac{d^2MP}{dx^2} = -6a < 0$ ή α<0, οπότε για να είναι $x = -\dfrac{\beta}{2a}$>0 πρέπει β>0. Τέλος, το οριακό προϊόν για x=0 πρέπει να είναι μη αρνητικό, δηλαδή MP(0)=γ≥0.

Επομένως, οι συνθήκες είναι α<0, β>0 και γ≥0.

Ασκήσεις 5.2

1. Έστω Q=f(P) η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού και R=PQ η συνάρτηση εσόδων. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση εσόδων είναι:
(α) αύξουσα όταν η ζήτηση είναι ελαστική
(β) φθίνουσα όταν η ζήτηση είναι ανελαστική

ΛΥΣΗ:

Η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\eta = \dfrac{dQ}{dP} \cdot \dfrac{P}{Q}$. Η παράγωγος των εσόδων ως προς την ποσότητα είναι:

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{d}{dQ}(PQ) = \frac{dP}{dQ}Q + P$$

Από την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης $P=f^{-1}(Q)$ είναι $\dfrac{dP}{dQ} = \dfrac{1}{dQ/dP}$, οπότε

$$\frac{dR}{dQ}=\frac{1}{dQ/dP}Q+P=P\left(\frac{1}{\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}}+1\right)=P\left(\frac{1}{\eta}+1\right)$$

(α) Αν η ζήτηση είναι ελαστική, τότε $|\eta|>1$, δηλαδή η<–1 ή $\frac{1}{\eta}+1>0$, οπότε $\frac{dR}{dQ}>0$.

(β) Αν η ζήτηση είναι ανελαστική, τότε $|\eta|<1$, δηλαδή –1<η<0 ή $\frac{1}{\eta}+1<0$, οπότε $\frac{dR}{dQ}<0$.

2. Έστω η συνάρτηση ζήτησης Q=64–P^2.

(α) Να βρείτε τις τιμές για τις οποίες η συνάρτηση ζήτησης είναι ελαστική, ανελαστική ή έχει μοναδιαία ελαστικότητα.

(β) Να βρείτε την τιμή στην οποία μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα.

ΛΥΣΗ:

(α)Η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\eta=\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}=-\frac{2P^2}{64-P^2}$.

Η ζήτηση είναι ελαστική όταν $|\eta|>1$ ή $2P^2>64-P^2$ ή $P>\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Παρόμοια, η ζήτηση είναι ανελαστική όταν $P<\frac{8\sqrt{3}}{3}$ και έχει μοναδιαία ελαστικότητα όταν $P=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

(β) Τα συνολικά έσοδα μεγιστοποιούνται στο σημείο μοναδιαίας ελαστικότητας, δηλαδή όταν $P=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

3. Έστω η συνάρτηση ζήτησης $Q=\frac{1000}{\sqrt{P}}$. Να βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης όταν η τιμή είναι P=3 και όταν είναι P=5 και να εκτιμήσετε τη μεταβολή στα συνολικά έσοδα καθώς η τιμή μεταβάλλεται μεταξύ αυτών των δύο ορίων.

ΛΥΣΗ:

Η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\eta=\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}=-\frac{1}{2}$ (σταθερή για κάθε P). Η παράγωγος των εσόδων ως προς την τιμή είναι:

$$\frac{dR}{dP}=\frac{d}{dP}(PQ)=\frac{d}{dP}(1000\sqrt{P})=\frac{500}{\sqrt{P}}$$

Καθώς η τιμή μεταβάλλεται από το 3 στο 5, τα έσοδα μεταβάλλονται κατά

$\Delta R\approx\frac{dR}{dP}dP=\frac{500}{\sqrt{3}}\cdot 2=577{,}35$ χρηματικές μονάδες (χ.μ.).

Η πραγματική μεταβολή των εσόδων είναι R(5)−R(3)=504,02 χ.μ.

4. Έστω η συνάρτηση κατανάλωσης C=α+βY.

(α) Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι α και β;

(β) Να βρείτε την ελαστικότητα κατανάλωσης ως προς το εισόδημα και να αποδείξετε ότι η κατανάλωση είναι ανελαστική για κάθε επίπεδο εισοδήματος.

ΛΥΣΗ:

(α) Από την οικονομική θεωρία προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει α>0 και 0<β<1.

(β) Η ελαστικότητα κατανάλωσης ως προς το εισόδημα είναι

$\varepsilon_C = \frac{dC}{dY}\cdot\frac{Y}{C} = \beta\cdot\frac{\mathrm{Y}}{\alpha+\beta\mathrm{Y}} < 1$, άρα η κατανάλωση είναι ανελαστική.

Ασκήσεις 5.3

1. Έστω το υπόδειγμα προσδιορισμού του εισοδήματος μιας κλειστής οικονομίας, στην οποία δεν υπάρχουν διεθνείς συναλλαγές Y=C+I+G. Η συνάρτηση κατανάλωσης είναι C=100+0,75$\mathbf{Y_d}$, οι επενδύσεις I=450, η κρατική δαπάνη G=250 και οι φόροι T=150.

(α) Να βρείτε το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος.

(β) Πώς θα μεταβληθεί το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος αν η οριακή ροπή για κατανάλωση γίνει 0,9;

(γ) Να βρείτε τον πολλαπλασιαστή των επενδύσεων και τον πολλαπλασιαστή των φόρων. Τι παρατηρείτε;

(δ) Αν τα φορολογικά έσοδα είναι το 15% του εισοδήματος, να βρείτε το νέο επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος και το νέο πολλαπλασιαστή των επενδύσεων.

ΛΥΣΗ:

Αν c′ είναι η οριακή ροπή για κατανάλωση, τότε είναι $Y = 100 + c'(Y-T) + I + G$ ή

$$Y = \frac{100 - c'T + I + G}{1-c'}$$

(α) Για c′=0,75, I=450, G=250 και T=150 είναι Y=2750.

(β) Για c′=0,90 είναι Y=6650.

(γ) Ο πολλαπλασιαστής επενδύσεων είναι:

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1-c'}$$

Ο πολλαπλασιαστής φόρων είναι $\frac{dY}{dT} = -\frac{c'}{1-c'}$

Για c′=0,75 είναι $\frac{dY}{dI} = 4$ και $\frac{dY}{dT} = -3$.

Ο πολλαπλασιαστής επενδύσεων είναι θετικός ενώ ο πολλαπλασιαστής φόρων αρνητικός.

(δ) Αν T=tY, τότε $Y_d = (1-t)Y$ και $Y = 100 + c'(1-t)Y + I + G$ ή $Y = \frac{100 + I + G}{1 - c'(1-t)}$

Για c′=0,75 και t=0,15 είναι $\frac{dY}{dI}=2{,}76$.

Για I=450 και G=250 είναι Y=2206,90.

2. Θεωρήστε το υπόδειγμα προσδιορισμού του εισοδήματος της προηγούμενης άσκησης. «Αν η κρατική δαπάνη G και η φορολογία T αυξηθούν κατά το ίδιο ποσό, το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος παραμένει αμετάβλητο, γιατί τα κρατικά έσοδα αυξάνονται όσο και οι κρατικές δαπάνες». Συμφωνείτε με την πρόταση αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ:

Είναι $Y=100+c'(Y-T)+I+G$ ή $Y=\frac{100-c'T+I+G}{1-c'}$. Αν η φορολογία και η κρατική δαπάνη αυξηθούν κατά το ίδιο ποσό dG=dT, η μεταβολή στο εισόδημα θα είναι $\frac{1}{1-c'}(-c'dG+dG)=dG$. Άρα το εισόδημα θα αυξηθεί κατά dG.

Ασκήσεις 5.4

1. Ένας επενδυτής διαθέτει ένα ποσό A και θέλει να το τοποθετήσει σε τραπεζικό λογαριασμό για 15 μήνες. Μπορεί να το τοποθετήσει σε κάποια από τέσσερις τράπεζες με τους όρους που αναφέρονται στον παρακάτω πίνακα:

Τράπεζα	Ανατοκισμός	Ονομαστικό επιτόκιο
T_1	ανά τρίμηνο	12%
T_2	ανά έτος	16%
T_3	ανά εξάμηνο	14%
T_4	απλός τόκος	17%

Ποια τράπεζα θα προτιμήσει ώστε να έχει το μέγιστο υπόλοιπο;

ΛΥΣΗ:

Στο τέλος του 15ου μήνα το ποσό σε κάθε τράπεζα θα είναι:

T_1: $S_1=A\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^5=A\cdot 1{,}1593$

T_2: $S_2=A(1+0{,}16)\left(1+3\frac{0{,}16}{12}\right)=A\cdot 1{,}2064$

T_3: $S_3=A\left(1+\frac{0{,}14}{2}\right)^2\left(1+\frac{0{,}14}{4}\right)=A\cdot 1{,}185$

T_4: $S_4=A\left(1+15\cdot\frac{0{,}17}{12}\right)=A\cdot 1{,}2125$

Ο επενδυτής θα προτιμήσει την τράπεζα T_4.

2. Ένας ελεύθερος επαγγελματίας οφείλει στην Εφορία ποσό 20.000 Ευρώ. Αν εξοφλήσει το ποσό αμέσως θα έχει έκπτωση 10%. Εναλλακτικά μπορεί να το εξοφλήσει σε τέσσερις ίσες εξαμηνιαίες δόσεις η πρώτη από τις οποίες πρέπει να καταβληθεί σε έξι μήνες. Τι συμφέρει να κάνει ο ελεύθερος επαγγελματίας αν μπορεί επίσης να καταθέσει τα χρήματά του σε λογαριασμό με επιτόκιο 10% και τριμηνιαία κεφαλαιοποίηση; (Υποθέστε ότι οι δόσεις καταβάλλονται σε στιγμές κεφαλαιοποίησης).

ΛΥΣΗ:

Αν ο οφειλέτης πληρώσει αμέσως, θα καταβάλει ποσό 18000 Ευρώ. Το ισοδύναμο επιτόκιο της εξαμηνιαίας κεφαλαιοποίησης είναι τέτοιο ώστε

$$\left(1+\frac{0{,}10}{4}\right)^4=\left(1+\frac{i}{2}\right)^2, \text{ οπότε i=10,125\%}$$

Η παρούσα αξία των τεσσάρων εξαμηνιαίων δόσεων είναι:

$$PV=5000\left(\frac{1}{1{,}05625}+\frac{1}{(1{,}05625)^2}+\frac{1}{(1{,}05625)^3}+\frac{1}{(1{,}05625)^4}\right)=17475{,}34 \text{ Ευρώ}$$

Επομένως, συμφέρει η πληρωμή σε δόσεις.

3. Κάποιος αγόρασε ένα διαμέρισμα πριν από 3 χρόνια αντί ποσού 150 χιλιάδων Ευρώ. Στη συνέχεια νοίκιασε το διαμέρισμα με ενοίκιο 450 Ευρώ το μήνα. Μετά τα 3 χρόνια πούλησε το διαμέρισμα αντί ποσού 180 χιλιάδων Ευρώ. Αν κατά τη διάρκεια της τριετίας το επιτόκιο καταθέσεων ήταν 10% με εξαμηνιαία κεφαλαιοποίηση, ήταν συμφέρουσα η αγοραπωλησία του διαμερίσματος;

ΛΥΣΗ:

Αν η κεφαλαιοποίηση γίνεται στο τέλος κάθε εξαμήνου, τότε σε κάθε στιγμή κεφαλαιοποίησης θα κεφαλαιοποιούνται τα ενοίκια των 6 προηγούμενων μηνών, δηλαδή ποσό

$$A=450\left(1+6\cdot\frac{0{,}10}{12}\right)+450\left(1+5\cdot\frac{0{,}10}{12}\right)+\ldots+450\left(1+\frac{0{,}10}{12}\right) \text{ ή}$$

$$A=450\left(6+\frac{0{,}10}{12}\cdot 21\right)=2778{,}75 \text{ Ευρώ}$$

Έτσι, ουσιαστικά θα έχουμε 6 εξαμηνιαίες καταβολές ποσού A συν τα έσοδα από την πώληση του διαμερίσματος που θα εισπραχθούν στο τέλος της τριετίας. Αν θεωρήσουμε το έτος αγοράς του διαμερίσματος ως έτος βάσης, τότε η παρούσα αξία των εισροών αυτών είναι:

$$PV=A\left(\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{(1{,}05)^2}+\ldots+\frac{1}{(1{,}05)^6}\right)+\frac{180000}{(1{,}05)^6}=148422{,}90 \text{ Ευρώ.}$$

Εφόσον η αξία των εισροών είναι μικρότερη από το κόστος αγοράς, δεν είναι συμφέρουσα η αγορά του διαμερίσματος.

4. Έστω ότι κατέχετε μια αντίκα της οποίας η σημερινή αξία είναι 800 Ευρώ. Κάποιος ειδικός εκτιμά ότι η αξία της αντίκας αυξάνεται με ρυθμό 100 Ευρώ ανά έτος.

Αν το τραπεζικό επιτόκιο είναι 4% ανά έτος με συνεχή ανατοκισμό, να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία συμφέρει να πουλήσετε την αντίκα.

ΛΥΣΗ:

Η αξία της αντίκας τη χρονική στιγμή t θα είναι $V(t) = 800 + 100t$.

Η παρούσα αξία της, αν πουληθεί τη χρονική στιγμή t, θα είναι:

$$PV(t) = V(t)e^{-0,04t} = (800 + 100t)e^{-0,04t}$$

Η παράγωγος της PV(t) είναι:

$\dfrac{dPV}{dt} = e^{-0,04t}(68 - 4t)$ και μηδενίζεται για t=17.

Η δεύτερη παράγωγος για t=17 είναι:

$$\frac{d^2PV}{dt^2} = e^{-0,0417}(0,16 \cdot 17 - 6,72) < 0$$

Επομένως, η παρούσα αξία μεγιστοποιείται αν η αντίκα πουληθεί σε t=17 έτη.

Ασκήσεις 5.5

1. Μια επιχείρηση έχει εκτιμήσει ότι η ζήτηση για ένα προϊόν μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή με την οποία χρεώνει το προϊόν της, σύμφωνα με την σχέση:

$$Q = 280000 - 400P$$

όπου Q είναι η ποσότητα που ζητείται από την επιχείρηση και P η τιμή του προϊόντος. Το συνολικό ετήσιο κόστος από την παραγωγή Q μονάδων ισούται με:

$$C = 350000 + 300Q + 0,0015Q^2$$

(α) Βρείτε πόσες μονάδες Q πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη της επιχείρησης.
(β) Σε ποια τιμή θα πρέπει να διατίθεται το προϊόν;
(γ) Ποια θα είναι τα κέρδη της επιχείρησης;
(δ) Αν μέγιστη δυνατή παραγόμενη ποσότητα είναι 40000 μονάδες, ποια θα είναι η νέα άριστη ποσότητα που θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη της επιχείρησης; Συγκρίνετε την νέα ποσότητα με αυτή του ερωτήματος (α).

ΛΥΣΗ:

Από τη συνάρτηση ζήτησης προκύπτει ότι $P = 700 - \dfrac{Q}{400}$

(α) Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi = PQ - C = 700Q - \frac{Q^2}{400} - 350000 - 300Q - 0,0015Q^2 = -0,004Q^2 + 400Q - 350000$$

Η πρώτη παράγωγος είναι:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = -0,008Q + 400$$

Μηδενίζεται για Q=50000. Είναι $\dfrac{d^2\Pi}{dQ^2} = -0,008 < 0$, οπότε το κέρδος είναι μέγιστο για Q=50000.

(β) Το προϊόν θα διατίθεται στην τιμή $P = 700 - \frac{50000}{400} = 575$ χρηματικές μονάδες (χ.μ.).

(γ) Τα μέγιστα κέρδη είναι Π(50000)=9650000 χ.μ.

(δ) Επειδή η συνάρτηση κέρδους είναι αύξουσα στο διάστημα [0, 40000], έχει μέγιστο στο άνω άκρο του διαστήματος αυτού, δηλαδή για Q=40000, που είναι Π(40000)=9250000 χ.μ.

2. Το συνολικό κόστος (*C*) και έσοδα (*R*) για ένα προϊόν είναι:

$$C(Q) = 500 + 100Q + 0{,}5Q^2$$
$$R(Q) = 500Q$$

(α) Να βρεθεί το επίπεδο του προϊόντος που μεγιστοποιεί το κέρδος.
(β) Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος;

ΛΥΣΗ:

(α) Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi = -0{,}5Q^2 + 400Q - 500$$

Η πρώτη παράγωγος $\frac{d\Pi}{dQ} = -Q + 400$ μηδενίζεται για Q=400. Επειδή $\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = -1 < 0$, το κέρδος μεγιστοποιείται στο σημείο αυτό.

(β) Το μέγιστο κέρδος είναι Π(400)=79500 χ.μ.

3. Μια εταιρία πουλάει ένα προϊόν στην τιμή 50 Ευρώ ανά μονάδα. Το συνολικό κόστος για την παραγωγή Q (χιλιάδων) μονάδων περιγράφεται, σε εκατομμύρια Ευρώ, από την σχέση:

$$C(Q) = 10 - 2{,}5Q^2 + Q^3$$

(α) Να βρεθεί το επίπεδο του προϊόντος που μεγιστοποιεί το κέρδος.
(β) Ποια είναι το συνολικά έσοδα, κόστος και κέρδη σ' αυτό το επίπεδο παραγωγής;

ΛΥΣΗ:

(α) Η συνάρτηση κέρδους είναι $\Pi = -Q^3 + 2{,}5Q^2 + 50Q - 10$. Παρουσιάζει μέγιστο για Q=10/3.

(β) Τα έσοδα είναι $\frac{500}{3} \approx 166{,}67$ χ.μ., το κόστος $\frac{2950}{27} \approx 109{,}26$ χ.μ. και το κέρδος 57,41 χ.μ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

1. Μία επιχείρηση έχει τις παρακάτω συναρτήσεις μέσου κόστους και ζήτησης:

$$\mathrm{AC} = \square\ \frac{15}{q} \square\ 5 \square\ 1q \square\ 1q^2 \qquad \textbf{και} \qquad p = 45 - 2q$$

όπου q είναι η ποσότητα, AC το μέσο κόστος και p η τιμή πώλησης.
(α) Να εξηγήσετε γιατί τα πρόσημα στη συνάρτηση μέσου κόστους πρέπει να είναι με τη σειρά +, + , – και +.

(β) Να βρείτε την ποσότητα προϊόντος η οποία μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης. Ποια είναι η ελαστικότητα ζήτησης που αντιστοιχεί σ' αυτή την ποσότητα;

ΛΥΣΗ:

(α) Η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι $TC = AC \cdot q = 15 + 5q - q^2 + q^3$

Τα πρόσημα είναι με τη συγκεκριμένη σειρά γιατί:

(i) Το κόστος για μηδενική παραγωγή πρέπει να είναι θετικό.

(ii) Το οριακό κόστος πρέπει να παρουσιάζει ελάχιστο.

(iii) Το οριακό κόστος για μηδενική παραγωγή πρέπει να είναι θετικό.

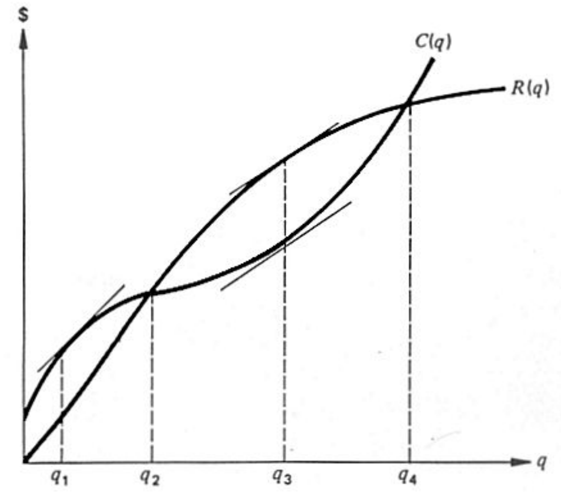
(β) Η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης είναι:

$$\Pi(q) = pq - TC = -q^3 - q^2 + 40q - 15$$

Η πρώτη παράγωγος είναι $\Pi'(q) = -3q^2 - 2q + 40$ και μηδενίζεται για q=10/3. Η δεύτερη παράγωγος είναι $\Pi''(q) = -6q - 2q < 0$, οπότε η συνάρτηση κέρδους παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο q=10/3. Η αντίστοιχη ελαστικότητα ζήτησης είναι:

$$\eta = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{115}{3}}{\frac{10}{3}} = -5{,}75$$

2. Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων κόστους *C*(*q*) και εσόδων *R*(*q*). Τι οικονομική σημασία έχει η επιλογή για παραγωγή στα 4 διαφορετικά επίπεδα *q*;



ΛΥΣΗ:

Στα επίπεδα παραγωγής q_1 και q_3 το οριακό έσοδο ισούται με το οριακό κόστος γιατί οι εφαπτόμενες στις καμπύλες R(q) και C(q) έχουν την ίδια κλίση. Στο σημείο q_1 είναι $\frac{d^2\pi}{dq^2} = \frac{d^2}{dq^2}[R(q) - C(q)] = R''(q) - C''(q) > 0$ γιατί η συνάρτηση R(q) είναι κυρτή και η C(q) κοίλη. Επομένως, το κέρδος ελαχιστοποιείται.

Στο σημείο q_3 είναι $\dfrac{d^2\pi}{dq^2} = \dfrac{d^2}{dq^2}[R(q) - C(q)] = R''(q) - C''(q) < 0$ γιατί η συνάρτηση R(q) είναι κοίλη και η C(q) κυρτή. Επομένως, το κέρδος μεγιστοποιείται.

Τέλος, στα επίπεδα q_2 και q_4 το κέρδος είναι μηδέν.

3. Η συνάρτηση ζήτησης μιας επιχείρησης είναι $p = 125 - q^{\frac{3}{2}}$, όπου p η τιμή και q η ζητούμενη ποσότητα. Να βρείτε τις συναρτήσεις συνολικού εσόδου, μέσου εσόδου και οριακού εσόδου.

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση συνολικού εσόδου είναι $R(q) = pq = 125q - q^{\frac{5}{2}}$. Η συνάρτηση μέσου εσόδου είναι $AR(q) = \dfrac{R(q)}{q} = 125 - q^{\frac{3}{2}} = p$ και η συνάρτηση οριακού εσόδου είναι $MR(q) = \dfrac{dR}{dq} = 125 - \dfrac{5}{2}q^{\frac{3}{2}}$.

4. Να βρείτε τις τιμές για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης έχουν μοναδιαία ελαστικότητα.

(α) q=180–9p

(β) q=8–p²

(γ) $q = \dfrac{10}{p^2}$

Για κάθε συνάρτηση να βρείτε την τιμή στην οποία μεγιστοποιούνται τα συνολικά έσοδα.

ΛΥΣΗ:

(α) $\eta = \dfrac{dq}{dp} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{-9p}{180 - 9p}$

Είναι $|\eta| = 1$ για p=10.

(β) $\eta = \dfrac{dq}{dp} \cdot \dfrac{p}{q} = -\dfrac{2p^2}{8 - p^2}$

Είναι $|\eta| = 1$ για $p = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

(γ) $\eta = \dfrac{dq}{dp} \cdot \dfrac{p}{q} = -2\dfrac{p^3}{p^3} = -2$

Είναι $|\eta| > 1$ για κάθε p.

Τα συνολικά έσοδα στις περιπτώσεις (α) και (β) μεγιστοποιούνται στο σημείο μοναδιαίας ελαστικότητας. Η συνάρτηση εσόδων της περίπτωσης (γ) είναι $R = \dfrac{10}{p}$ και είναι αυστηρά φθίνουσα ως προς την τιμή. Αν ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής [α, β], μεγιστοποιείται για p=α.

5. Έστω η συνάρτηση $\mathrm{q} = \mathrm{ap}^{\mathrm{b}}$ **.**

(α) Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι a και b προκειμένου η παραπάνω συνάρτηση να είναι συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος;

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση οριακού εσόδου.

(γ) Να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η παράμετρος a προκειμένου το οριακό έσοδο να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν.

ΛΥΣΗ:

(α) Επειδή q>0, πρέπει a>0. Επίσης είναι $\frac{dq}{dp} = \mathrm{ab}p^{b-1}$ **.** Για να είναι η $q = f(p) = \mathrm{a}p^{b}$ συνάρτηση ζήτησης πρέπει $\frac{dq}{dp} < 0$, δηλαδή b<0.

(β) Η συνάρτηση οριακού εσόδου είναι $MR = \frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq}(pq) = p\left(\frac{dp}{dq}\cdot\frac{q}{p}+1\right) = p\left(\frac{1}{\eta}+1\right)$

Η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\eta = \frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q} = \mathrm{ab}p^{b-1}\frac{p}{q} = b\frac{\mathrm{a}p^{b}}{q} = b$ (σταθερή)

Επομένως, $MR = p\left(\frac{1}{b}+1\right)$

(γ) Το οριακό έσοδο είναι θετικό όταν $\frac{1}{b} > -1$ ή b<–1, αρνητικό όταν –1<b<0 και μηδέν όταν b=–1.

6. Θεωρήστε το υπόδειγμα Y=C+I+G προσδιορισμού του εισοδήματος μιας κλειστής οικονομίας, στην οποία δεν υπάρχουν διεθνείς συναλλαγές. Η συνάρτηση κατανάλωσης είναι C=100+0,9Y_d, οι επενδύσεις I=250, η κρατική δαπάνη G=300 και οι φόροι T=30.

(α) Να βρείτε το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος και τον πολλαπλασιαστή της κρατικής δαπάνης.

(β) Αν τα φορολογικά έσοδα προκύπτουν από τη συνάρτηση T=30+0,10Y, να βρείτε το νέο επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος και το νέο πολλαπλασιαστή κρατικής δαπάνης.

(γ) Αν τα φορολογικά έσοδα προκύπτουν από τη συνάρτηση T=0,30Y+0,125C, δηλαδή περιλαμβάνουν έναν αναλογικό φόρο εισοδήματος και έναν έμμεσο φόρο κατανάλωσης, να βρείτε το νέο επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος και το νέο πολλαπλασιαστή κρατικής δαπάνης. Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ:

(α) Παρόμοια με την άσκηση 1 της παραγράφου 5.3, είναι

$$Y = \frac{100-0{,}9\cdot 30+250+300}{0{,}1} = 6230 \text{ και } \frac{dY}{dG} = \frac{1}{1-0{,}9} = 10$$

(β) Αν T=b+uY τότε είναι $Y = \frac{a-c'b+I+G}{1-c'(1-u)} = 3278{,}95$ και

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{1 - c'(1-u)} = 5{,}26$$

(γ) Αν είναι T=uY+wC, τότε από τη σχέση $C = a + c'(Y - T)$ προκύπτει $C = \frac{a + c'(1-u)Y}{1 + wc'}$. Αντικαθιστώντας στη σχέση Y=C+I+G έχουμε:

$$Y = \frac{a + (1 + wc')(I + G)}{1 + wc' - c'(1-u)} = 1475{,}39 \text{ και } \frac{dY}{dG} = \frac{1 + wc'}{1 + wc' - c'(1-u)} = 2{,}31$$

Τόσο το εισόδημα ισορροπίας όσο και ο πολλαπλασιαστής κρατικής δαπάνης μειώθηκαν, ως αποτέλεσμα της έμμεσης φορολογίας.

7. Μια τράπεζα Α δέχεται καταθέσεις με επιτόκιο 12% και μηνιαία κεφαλαιοποίηση ενώ μια άλλη τράπεζα Β δέχεται καταθέσεις με επιτόκιο 16% και ετήσια κεφαλαιοποίηση. Ποια από τις δύο τράπεζες θα προτιμούσατε αν θέλατε να καταθέσετε τα χρήματά σας για 1 μήνα, 6 μήνες, 1 έτος ή 5 έτη; Γενικά να βρείτε τις χρονικές διάρκειες για τις οποίες θα προτιμούσατε την τράπεζα Α.

ΛΥΣΗ:

Μπορείτε να διαπιστώσετε ότι για όλες τις αναφερόμενες χρονικές διάρκειες προτιμότερη είναι η τράπεζα Β. Για παράδειγμα, αν καταθέσουμε κεφάλαιο P για 5 έτη, το ποσό στην τράπεζα Α θα είναι $S_A = P\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{60} = P \cdot 1{,}8167$ ενώ στην τράπεζα Β θα είναι $S_B = P(1 + 0{,}16)^5 = P \cdot 2{,}1003$.

Γενικά, για κατάθεση t ετών τα ποσά θα είναι $S_A = P(1{,}01)^{12t}$ και $S_B = P(1{,}16)^t$. Για να είναι SA>SB πρέπει $(1{,}01)^{12t} > (1{,}16)^t$. Παίρνοντας λογάριθμους έχουμε:

$12t\ln(1{,}01) > t\ln(1{,}16)$ ή 0,1194t>0,14842t, που δεν ισχύει για κανένα t.

Επομένως, προτιμότερη είναι πάντα η τράπεζα Β.

8. Έστω ότι κατέχετε ένα οικόπεδο του οποίου η αξία μετά από t έτη είναι $V(t) = e^{\sqrt{t}}$. Αν το τραπεζικό επιτόκιο είναι 8% με συνεχή ανατοκισμό, να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει την παρούσα αξία των εσόδων από την πώληση του οικοπέδου μετά από t έτη και να βρείτε τη βέλτιστη χρονική στιγμή πώλησης.

ΛΥΣΗ:

Η παρούσα αξία του οικοπέδου είναι $PV(t) = V(t)e^{-0{,}08t} = e^{\sqrt{t} - 0{,}08t}$.

Είναι $\frac{dPV}{dt} = 0$ ή $e^{\sqrt{t}-0{,}08t}\frac{d}{dt}(\sqrt{t} - 0{,}08t) = 0$ ή $e^{\sqrt{t}-0{,}08t}(\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0{,}08) = 0$ ή t≈39,0625 έτη.

Για t≈39,0625 είναι $\frac{dPV}{dt} = -\frac{1}{4}e^{3{,}125}(39{,}0625)^{-3/2} < 0$. Η βέλτιστη στιγμή πώλησης είναι μετά από t≈39,0625 έτη.

9. Μία εταιρεία παραγωγής ποδηλάτων έχει τις ακόλουθες συναρτήσεις κόστους και εσόδων,

$$R(q) = 225q - q^2 \qquad \textbf{και} \qquad C(q) = 0{,}2q^3 - 6q^2 + 100q + 50$$

όπου q είναι ο αριθμός ποδηλάτων που παράγει η επιχείρηση ανά ημέρα, R(q) τα έσοδα και C(q) το κόστος.

(α) Αν η παραγωγή αυξάνεται με ρυθμό 5 ποδήλατα ανά ημέρα όταν παράγονται 10 ποδήλατα, να βρείτε τον ημερήσιο ρυθμό μεταβολής των εσόδων και των κερδών της επιχείρησης.

(β) Να βρείτε το επίπεδο παραγωγής στο οποίο μεγιστοποιούνται τα κέρδη της εταιρείας. Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος;

ΛΥΣΗ:

(α) Αν $\frac{dq}{dt} = 5$ για q=10, τότε $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = (225 - 2q) \cdot 5 = 1025$ χ.μ. και

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = (0{,}6q^2 - 12q + 100) \cdot 5 = 200$$

Αν η συνάρτηση κέρδους είναι Π(q)=R(q)–C(q), τότε $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{dC}{dt} = 825$ χ.μ.

(β) $\frac{d\Pi}{dq} = 0$ ή $-0{,}6q^2 + 10q + 125 = 0$ ή q1=25 και q2=–8,33 (απορρίπτεται). Επίσης, είναι $\frac{d^2\Pi}{dq^2} = -1{,}q + 10$. Για q=10 είναι $\frac{d^2\Pi}{dq^2} = -20 < 0$, άρα τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν q=25. Το μέγιστο κέρδος είναι Π(25)=3075 χ.μ.

10. Η συνάρτηση ζήτησης μιας μονοπωλιακής επιχείρησης είναι $p + 4q - 40 = 0$ **και η συνάρτηση κόστους** $TC = q^2 + 10q$**, όπου q είναι η ποσότητα παραγωγής και p η τιμή.**

(α) Να υπολογίσετε το επίπεδο παραγωγής και την τιμή που μεγιστοποιούν τα κέρδη της επιχείρησης.

(β) Να υπολογίσετε την ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη.

(γ) Αν η κυβέρνηση επιβάλει φορολογία ίση με Τ χρηματικές μονάδες ανά μονάδα προϊόντος, να υπολογίσετε την τιμή του Τ που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα της κυβέρνησης. (Υποθέστε ότι η επιχείρηση θεωρεί τη φορολογία ως μια πρόσθετη επιβάρυνση στο κόστος).

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $p = 40 - 4q$, οπότε η συνάρτηση κέρδους είναι $\Pi = pq - TC = 30q - 5q^2$. Η πρώτη παράγωγος είναι $\frac{d\pi}{dq} = 30 - 10q$ και μηδενίζεται για q=3. Επειδή $\frac{d^2\pi}{dq^2} = -10 < 0$, το κέρδος μεγιστοποιείται όταν q=3..

(β) Για q=3 είναι p=28, οπότε η ελαστικότητα ζήτησης είναι:

$$\eta = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{28}{3} = -2{,}33$$

(γ) Εφόσον η επιχείρηση θεωρεί τη φορολογία ως πρόσθετη επιβάρυνση στο κόστος, η νέα συνάρτηση κόστους είναι $TC = q^2 + 10q + Tq$ και η νέα συνάρτηση κέρδους $\Pi = 30q - 5q^2 - Tq$. Παρόμοια με το ερώτημα (α), τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν $q = 3 - \frac{T}{10}$.

Τα έσοδα της κυβέρνησης είναι $ST = Tq = 3T - \frac{T^2}{10}$. Η πρώτη παράγωγος είναι $\frac{dST}{dT} = 3 - 5T$ και μηδενίζεται όταν $T = \frac{3}{5}$. Επειδή $\frac{d^2ST}{dT^2} = -5 < 0$, τα έσοδα μεγιστοποιούνται όταν $T = \frac{3}{5}$.

ΛΥΣΕΙΣ $6^{ου}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 6.1

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

(α) (1,1,1) και (0,1,–2) **(β) (π,0) και (0,1)**

(γ) (1,1,0) (1,1,1) και (0,1,–1) **(δ) (0,1,1), (0,2,1) και (1,5,3)**

ΛΥΣΗ:

(α) Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί α_1 και α_2. Είναι $a_1(1,1,1)+a_2(0,1,-2)=\mathbf{0}$ ή $(a_1, a_1+a_2, a_1-2a_2)=\mathbf{0}$ που ισχύει αν και μόνο αν $\alpha_1=\alpha_2=0$. Επομένως, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β), (γ) και (δ) Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

2. Έστω (α,β) και (γ,δ) δύο διανύσματα του χώρου $\Re^2$. Να αποδείξετε ότι αν αδ–βγ=0, τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ενώ αν αδ–βγ≠0, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί λ_1 και λ_2. Είναι: $\lambda_1(a,\beta)+\lambda_2(\gamma,\delta)=\mathbf{0}$ ή

$$\begin{cases}\lambda_1\alpha+\lambda_2\gamma=0\\ \lambda_1\beta+\lambda_2\delta=0\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\lambda_1\alpha\delta+\lambda_2\gamma\delta=0\\ \lambda_1\beta\gamma+\lambda_2\gamma\delta=0\end{cases}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε: $\lambda_1(\alpha\delta-\beta\gamma)=0$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει εύκολα ότι αν αδ–βγ=0 τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ενώ αν αδ–βγ≠0 πρέπει $\lambda_1=\lambda_2=0$, οπότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

3. Αν x,y, και z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, να εξετάσετε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

(α) x, x+y, x+y+z

(β) x+y, y+z, z+x

(γ) x–y, y–z, z–x

ΛΥΣΗ:

(α) Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Re$. Είναι: $a_1x+a_2(x+y)+a_3(x+y+z)=\mathbf{0}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $(a_1+a_2+a_3)x+(a_2+a_3)y+a_3z=\mathbf{0}$. Επειδή τα διανύσματα x, y και z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, πρέπει να ισχύει $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$, $\alpha_2+\alpha_3=0$, $\alpha_3=0$ ή $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Επομένως, τα διανύσματα **x**, **x+y**, **x+y+z** είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β) Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα διανύσματα **x+y**, **y+z**, **z+x** είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(γ) Για τα διανύσματα **x–y**, **y–z** και **z–x** είναι:

$$a_1(x-y)+a_2(y-z)+a_3(z-x)=\mathbf{0} \qquad (1) \qquad \text{ή}$$

$$(a_1-a_3)\mathbf{x}+(a_2-a_1)\mathbf{y}+(a_3-a_2)\mathbf{z}=\mathbf{0}$$

απ' όπου προκύπτει ότι πρέπει να είναι $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$. Έτσι, αν π.χ. $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1\neq0$, η σχέση (1) ισχύει, οπότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

4. Να δείξετε ότι τα διανύσματα (1,1) και (−1,2) είναι μία βάση του χώρου $\Re^2$.

ΛΥΣΗ:

Εύκολα διαπιστώνεται ότι τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω (x,y) ένα οποιοδήποτε σημείο του $\Re$2. Το σημείο αυτό μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των (1,1) και (−1,2). Πράγματι, είναι:

$a_1(1,1) + a_2(-1,2) = (x, y)$ ή

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = x \\ a_1 + 2a_2 = y \end{cases}$$

απ' όπου προκύπτει $a_1 = \dfrac{2x + y}{3}$ και $a_2 = \dfrac{y - x}{3}$. Επομένως, τα διανύσματα (1,1) και (−1,2) είναι βάση του $\Re^2$.

5. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων είναι βάσεις του $\Re$4.

(α) x_1=(1,2,−1,−2), x_2=(2,3,0,−1), x_3=(1,2,1,3), x_4=(1,3,−1,0)

(β) x_1=(1,2,−1,−2), x_2=(2,3,0,−1), x_3=(1,2,1,4), x_4=(1,3,−1,0)

ΛΥΣΗ:

(α) Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ και $\mathbf{x}_4$ δεν είναι βάση του $\Re^4$ γιατί είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(β) Εύκολα διαπιστώνεται ότι τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έστω (x,y,z,w) ένα οποιοδήποτε σημείο του $\Re^4$. Το σημείο αυτό μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ και $\mathbf{x}_4$. Πράγματι, είναι:

$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + a_3\mathbf{x}_3 + a_4\mathbf{x}_4 = (x, y, z, w)$ όπου

$a_1 = \dfrac{17x - 10y - 13z + 4w}{2}$, $a_2 = -3x + 2y + 3z - w$, $a_3 = \dfrac{7x - 3y - 5z + 2w}{2}$ και $a_4 = -11x + 7y + z - w$.

Επομένως, τα διανύσματα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ και $\mathbf{x}_4$ αποτελούν βάση του $\Re^4$.

6. Έστω y ένα διάνυσμα του $\Re^\nu$ για το οποίο ισχύει xy=0 για κάθε x$\in\Re^\nu$. Να αποδείξετε ότι y=0.

ΛΥΣΗ:

Εφόσον ισχύει **xy**=0 για κάθε **x**$\in\Re^\nu$, ισχύει και για $\mathbf{x} = (1,1,...,1)$, οπότε είναι:

$(1,1,...,1)(y_1, y_2, ..., y_\nu) = 0$ ή $y_1=y_2=\ldots=y_\nu=0$.

7. Έστω x και y δύο μη μηδενικά διανύσματα, τα οποία είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι για κάθε λ∈ℜ είναι $\|\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|$.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_i x_i^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ και

$$\|\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y})(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \lambda\mathbf{xy} + \lambda\mathbf{yx} + \lambda^2\|\mathbf{y}\|^2$$

Επειδή τα διανύσματα x, y είναι ορθογώνια, είναι **xy**=**yx**=0, οπότε

$\|\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \lambda^2\|\mathbf{y}\|^2 \geq \|\mathbf{x}\|^2$ ή $\|\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|$.

8. Να αποδείξετε τις σχέσεις:

(α) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$

(β) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{xy}$

(γ) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 4\mathbf{xy}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} =$

$$= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}-\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$

(β) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{xy}$

(γ) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - (\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y}) =$

$$= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = 4\mathbf{xy}$$

Ασκήσεις 6.2

1. Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ **και** $\Gamma = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$**, να υπολογίσετε τις μήτρες:**

(α) Α+Β+Γ **(β) Γ−Α** **(γ) 4Α+2Β−3Γ** **(δ) (ΑΒ)Γ** **(ε)Α(ΒΓ)**

ΛΥΣΗ:

(α) $A+B+\Gamma = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$ (β) $\Gamma - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$ (γ) $4\mathrm{A}+2\mathrm{B}-3\Gamma = \begin{pmatrix} -12 & -21 \\ 18 & 23 \end{pmatrix}$

(δ) $(\mathrm{AB})\Gamma = \begin{pmatrix} -10 & 18 \\ 40 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -52 \\ 304 & 276 \end{pmatrix}$

(ε) $\mathrm{A}(\mathrm{B}\Gamma) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 28 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -52 \\ 304 & 276 \end{pmatrix} = (\mathrm{AB})\Gamma$

2. Έστω οι μήτρες $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(α) Να βρείτε τις μήτρες A^2 και B^2.

(β) Να υπολογίσετε τα γινόμενα ΑΒ και ΒΑ.

ΛΥΣΗ:

(α) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ και $B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

(β) $AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=B$

$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

3. Αν $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ να βρείτε τα γινόμενα ΑΒ και ΒΑ. Επίσης, αν $\Gamma=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$ να βρείτε τα γινόμενα ΓΑ, ΑΓ, ΓΒ και ΒΓ. Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ:

$AB=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ και $BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Επίσης είναι ΑΓ=ΓΑ=$7^A$ και ΓΒ=ΒΓ=7Β.

4. Να υπολογίσετε τι μήτρες $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$ και $\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}^5$.

ΛΥΣΗ:

Αν $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ τότε

$A^2=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix}$, $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix}11 & -2\\ 10 & -1\end{pmatrix}$, $B^4=B^2B^2=\begin{pmatrix}101 & -20\\ 100 & -19\end{pmatrix}$ και $B^5=B^4B=\begin{pmatrix}304 & -61\\ 305 & -62\end{pmatrix}$

5. Έστω η τετραγωνική μήτρα $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \gamma\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Αν αγ≠0, να αποδείξετε ότι $A^2\neq 0$ και $A^3=0$.

ΛΥΣΗ:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \text{ εφόσον αγ≠0.}$$

$$\mathrm{A}^{3=} A^2 \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Αν A είναι μια οποιαδήποτε μήτρα kxν, να δείξετε ότι τα γινόμενα A′A και AA′ είναι συμμετρικές μήτρες.

ΛΥΣΗ:

Το γινόμενο A′A είναι μήτρα (νxν). Το στοιχείο γ_{ij} είναι: $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{k} \alpha'_{im} a_{mj} = \sum_{m=1}^{k} a_{mi} a_{mj}$.

Το στοιχείο γ_{ji} είναι: $\gamma_{ji} = \sum_{m=1}^{k} \alpha'_{jm} a_{mi} = \sum_{m=1}^{k} a_{mj} a_{mi} = \gamma_{ij}$.

Επομένως, η μήτρα A′A είναι συμμετρική. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η μήτρα AA′ είναι συμμετρική.

7. Να αποδείξετε ότι αν A και B είναι μήτρες ίδιας τάξης, τότε (A+B)′=A′+B′.

ΛΥΣΗ:

Έστω A=(α_{ij}), B=(β_{ij}) και Γ=A+B=(γ_{ij}). Είναι $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ και $\gamma'_{ij} = \gamma_{ji} = \alpha_{ji} + \beta_{ji}$. Επίσης, το στοιχείο i,j της μήτρας A′+B′ είναι $\alpha'_{ij} + \beta'_{ij} = \alpha_{ji} + \beta_{ji} = \gamma'_{ij}$. Επομένως, (A+B)′=A′+B′.

8. Αν A είναι μια συμμετρική μήτρα, να αποδείξετε ότι η μήτρα A+A′ είναι επίσης συμμετρική.

ΛΥΣΗ:

Έστω Γ= A+A′=(γij). Το στοιχείο γ_{ij} είναι:

$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha'_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji}$.

Επειδή η A είναι συμμετρική, είναι $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ οπότε $\gamma_{ij}=2\alpha_{ij}$. Είναι ακόμη:

$\gamma_{ji} = \alpha_{ji} + \alpha'_{ji} = \alpha_{ij} + \alpha_{ij} = 2a_{ij} = \gamma_{ij}$.

Επομένως, η μήτρα A+A′ είναι συμμετρική.

Ασκήσεις 6.3

1. Έστω οι μήτρες $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τα γινόμενα Kronecker A⊗B και B⊗A.

ΛΥΣΗ:

$$A\otimes B=\left(\begin{array}{c|c}2B & 1B\\ \hline 0 & 1B\end{array}\right)=\begin{pmatrix}2 & 6 & 0 & 1 & 3 & 0\\ -4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B\otimes A=\left(\begin{array}{c|c|c}1A & 3A & 0\\ \hline -2A & 1A & 1A\end{array}\right)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0\\ -4 & -2 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Αν A είναι μήτρα (mxn), B είναι μήτρα (pxq) και $\lambda\in\Re$, να αποδείξετε ότι (λA)⊗B=A⊗(λB)=λ(A⊗B).

ΛΥΣΗ:

Αν $A=\begin{pmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{m1} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}$, τότε είναι:

$$(\lambda A)\otimes B=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}B & ... & \lambda a_{1n}B\\ ... & ... & ...\\ \lambda a_{m1}B & ... & \lambda a_{mn}B\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_{11}B & ... & a_{1n}B\\ ... & ... & ...\\ a_{m1}B & ... & a_{mn}B\end{pmatrix}=\lambda(A\otimes B)$$

$$A\otimes(\lambda B)=\begin{pmatrix}a_{11}(\lambda B) & ... & a_{1n}(\lambda B)\\ ... & ... & ...\\ a_{m1}(\lambda B) & ... & a_{mn}(\lambda B)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}B & ... & \lambda a_{1n}B\\ ... & ... & ...\\ \lambda a_{m1}B & ... & \lambda a_{mn}B\end{pmatrix}=\lambda(A\otimes B)$$

Επομένως, (λA)⊗B=A⊗(λB)=λ(A⊗B).

3. Να αποδείξετε ότι αν A, B και Γ είναι μήτρες τέτοιες ώστε να ορίζονται τα σχετικά αθροίσματα και γινόμενα, τότε το γινόμενο Kronecker ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) (A+B)⊗Γ=A⊗Γ+B⊗Γ

(β) A⊗(B+Γ)=A⊗B+A⊗Γ

(γ) A⊗(B⊗Γ)=(A⊗B)⊗Γ

ΛΥΣΗ:

(α) Έστω ότι οι A και B είναι μήτρες (mxn) και η Γ μήτρα (pxq). Τότε:

$$(A+B)\otimes\Gamma=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\beta_{11} & \dots & \alpha_{1n}+\beta_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \dots & \alpha_{mn}+\beta_{mn}\end{pmatrix}\otimes\Gamma=\begin{pmatrix}(\alpha_{11}+\beta_{11})\Gamma & \dots & (\alpha_{1n}+\beta_{1n})\Gamma\\ \dots & \dots & \dots\\ (\alpha_{m1}+\beta_{m1})\Gamma & \dots & (\alpha_{mn}+\beta_{mn})\Gamma\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\Gamma & \dots & \alpha_{1n}\Gamma\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1}\Gamma & \dots & \alpha_{mn}\Gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_{11}\Gamma & \dots & \beta_{1n}\Gamma\\ \dots & \dots & \dots\\ \beta_{m1}\Gamma & \dots & \beta_{mn}\Gamma\end{pmatrix}=\mathrm{A}\otimes\Gamma+\mathrm{B}\otimes\Gamma$$

(β) Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $\mathrm{A}\otimes(\mathrm{B}+\Gamma)=\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}+\mathrm{A}\otimes\Gamma$.

(γ) Έστω ότι η Α είναι μήτρα (mxn) και η Β μήτρα (pxq). Τότε είναι:

$$A\otimes(B\otimes\Gamma)=\mathrm{A}\otimes\begin{pmatrix}\beta_{11}\Gamma & \dots & \beta_{1q}\Gamma\\ \dots & \dots & \dots\\ \beta_{p1}\Gamma & \dots & \beta_{pq}\Gamma\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c|ccc}\alpha_{11}\beta_{11}\Gamma & \dots & \alpha_{11}\beta_{1q}\Gamma & \dots & \alpha_{1n}\beta_{11}\Gamma & \dots & \alpha_{1n}\beta_{1q}\Gamma\\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots\\ \alpha_{11}\beta_{p1}\Gamma & \dots & \alpha_{11}\beta_{pq}\Gamma & \dots & \alpha_{1n}\beta_{p1}\Gamma & \dots & \alpha_{1n}\beta_{pq}\Gamma\\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \hline \alpha_{m1}\beta_{11}\Gamma & & \alpha_{m1}\beta_{1q}\Gamma & \dots & \alpha_{mn}\beta_{11}\Gamma & \dots & \alpha_{mn}\beta_{1q}\Gamma\\ & & & & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1}\beta_{p1}\Gamma & & \alpha_{m1}\beta_{pq}\Gamma & & \alpha_{mn}\beta_{p1}\Gamma & \dots & \alpha_{mn}\beta_{pq}\Gamma\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c|ccc}\alpha_{11}\beta_{11} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1q} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{11} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{1q}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots\\ \alpha_{11}\beta_{p1} & \dots & \alpha_{11}\beta_{pq} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{p1} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{pq}\\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \hline \alpha_{m1}\beta_{11} & & \alpha_{m1}\beta_{1q} & \dots & \alpha_{mn}\beta_{11} & \dots & \alpha_{mn}\beta_{1q}\\ & & & & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1}\beta_{p1} & & \alpha_{m1}\beta_{pq} & & \alpha_{mn}\beta_{p1} & \dots & \alpha_{mn}\beta_{pq}\end{array}\right)\otimes\Gamma=(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\otimes\Gamma$$

Ασκήσεις 6.4

1. Να βρείτε τις ορίζουσες

(α) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix}4 & -9 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 6 & 2 & 4\end{vmatrix}$ **(γ)** $\begin{vmatrix}3 & 1 & 7\\ 2 & 5 & 5\\ 8 & 7 & 1\end{vmatrix}$

(δ) $\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ **(ε)** $\begin{vmatrix}3 & -1 & 5\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$ (β) $\begin{vmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 124$ (γ) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -234$

(δ) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 52$ (ε) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 64$

2. Να βρείτε τις ορίζουσες

(α) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 82 & 57 & 1 \end{vmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) Με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης έχουμε: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$.

(β) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε: $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -32$

(γ) Με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 82 & 57 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 57 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

3. Να βρείτε τις ορίζουσες των παρακάτω μητρών:

(α) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ **(β)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **(γ)** $\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) $|A| = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 24\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 24\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 24(-1) - 24\cdot 1 + 24(-1) = -72$$

(β) $|B| = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= 12 + 4 + 3 = 19$$

(γ) $|\Gamma| = \lambda\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} =$

$$= \lambda^2(\lambda^2 - 1) - \lambda^2 - (\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2 - \lambda^2$$

4. Να αποδείξετε ότι $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$**, όπου α,β,γ $\in \Re$.**

ΛΥΣΗ:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \beta^2 \\ \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \beta & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta\gamma^2 - \beta^2\gamma - \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta =$$

$$= \beta\gamma^2 - \alpha\beta\gamma - \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma - \beta^2\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma - \alpha^2\beta =$$

$$= \gamma(\beta\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha^2) - \beta(\beta\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha^2) = ...(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$$

5. Να αποδείξετε ότι αν σε μια ορίζουσα τάξης ν είναι μηδενικά περισσότερα από $\nu^2 - \nu$ στοιχεία, τότε η ορίζουσα ισούται με μηδέν.

ΛΥΣΗ:

Το πολύ ν−1 στοιχεία μπορεί να είναι μη μηδενικά. Η ορίζουσα είναι μηδέν γιατί τουλάχιστον μία γραμμή (ή μία στήλη) έχει μόνο μηδενικά στοιχεία. Αν υπήρχε τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή (ή στήλη), τότε θα υπήρχαν συνολικά τουλάχιστον κ≥ν μη μηδενικά στοιχεία , που είναι άτοπο.

6. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & ... & 1 + x_1y_\nu \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & ... & 1 + x_2y_\nu \\ . & . & ... & . \\ 1 + x_\nu y_1 & 1 + x_\nu y_2 & ... & 1 + x_\nu y_\nu \end{vmatrix}$

ΛΥΣΗ:

$$D=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_\nu\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_\nu\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1+x_\nu y_1 & 1+x_\nu y_2 & \dots & 1+x_\nu y_\nu\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_\nu\\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \dots & (x_2-x_1)y_\nu\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (x_\nu-x_1)y_1 & (x_\nu-x_1)y_2 & \dots & (x_\nu-x_1)y_\nu\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \dots & (x_2-x_1)y_\nu\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (x_\nu-x_1)y_1 & (x_\nu-x_1)y_2 & \dots & (x_\nu-x_1)y_\nu\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_\nu\\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \dots & (x_2-x_1)y_\nu\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (x_\nu-x_1)y_1 & (x_\nu-x_1)y_2 & \dots & (x_\nu-x_1)y_\nu\end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_\nu-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots. & 1\\ y_1 & y_2 & \dots. & y_\nu\\ \dots & & \dots. & \dots\\ y_1 & y_2 & \dots.. & y_\nu\end{vmatrix}+x_1(x_2-x_1)\dots(x_\nu-x_1)\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \dots. & y_\nu\\ y_1 & y_2 & \dots. & y_\nu\\ \dots & & \dots. & \dots\\ y_1 & y_2 & \dots.. & y_\nu\end{vmatrix}=0$$

7. Να αποδείξετε ότι $\begin{vmatrix}0 & x & y & z\\ x & 0 & z & y\\ y & z & 0 & x\\ z & y & x & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & z^2 & y^2\\ 1 & z^2 & 0 & x^2\\ 0 & y^2 & x^2 & 0\end{vmatrix}$

ΛΥΣΗ:

Αν πολλαπλασιάσουμε τη $2^η$ στήλη της πρώτης ορίζουσας επί yz, την $3^η$ στήλη επί xz και την $4^η$ επί xy, τότε έχουμε:

$$\begin{vmatrix}0 & x & y & z\\ x & 0 & z & y\\ y & z & 0 & x\\ z & y & x & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{yz\cdot xz\cdot xy}\begin{bmatrix}0 & xyz & xyz & xyz\\ x & 0 & xz^2 & xy^2\\ y & yz^2 & 0 & x^2y\\ z & y^2z & x^2z & 0\end{bmatrix}=\frac{xyz\cdot x\cdot y\cdot z}{yz\cdot xz\cdot xy}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & z^2 & y^2\\ 1 & z^2 & 0 & x^2\\ 1 & y^2 & x^2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & z^2 & y^2\\ 1 & z^2 & 0 & x^2\\ 1 & y^2 & x^2 & 0\end{bmatrix}$$

8. Να βρείτε το βαθμό των παρακάτω μητρών:

(α) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **(β)** $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 8 & 9 & 3 & 9\end{pmatrix}$ **(γ)** $\Gamma=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6 & 6\\ 3 & 1 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 7 & 5\\ 8 & 3 & 8 & 4\end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι r(A)=2, γιατί $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0$.

(β) Όλες οι ορίζουσες 3ης τάξης της B είναι μηδέν. Επειδή $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$, είναι r(B)=2.

(γ) Είναι $|\Gamma| = 0$. Όλες οι ορίζουσες 3ης τάξης της Γ είναι μηδέν. Επειδή $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, είναι r(Γ)=2.

Ασκήσεις 6.5

1. Για καθεμία από τις παρακάτω μήτρες, να βρείτε την αντίστροφη (αν υπάρχει):

(α) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **(β)** $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **(γ)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

(δ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **(ε)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & 11 & -9 \\ -4 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

(β) $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{124}\begin{pmatrix} 4 & 40 & -2 \\ -12 & 4 & 6 \\ 0 & -62 & 31 \end{pmatrix}$

(γ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{234}\begin{pmatrix} -30 & 48 & -30 \\ 38 & -53 & -1 \\ -26 & -13 & 13 \end{pmatrix}$

(δ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 13 & 1 & -9 \\ -13 & 11 & 5 \\ 13 & -7 & 11 \end{pmatrix}$

(ε) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 1 & 13 & 9 \\ 6 & -26 & 2 \\ 11 & -13 & -5 \end{pmatrix}$

2. Για καθεμία από τις παρακάτω μήτρες, να βρείτε την αντίστροφη (αν υπάρχει):

(α) $A=\begin{pmatrix}1&3&7\\0&1&5\\0&0&6\end{pmatrix}$ **(β)** $B=\begin{pmatrix}-1&5&10\\0&4&7\\0&0&8\end{pmatrix}$ (γ) $\Gamma=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&2&0&2\\3&0&3&3\\0&4&4&4\end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-18&8\\0&6&-5\\0&0&1\end{pmatrix}$ (β) $B^{-1}=-\frac{1}{32}\begin{pmatrix}32&-40&-5\\0&-8&7\\0&0&-4\end{pmatrix}$

(γ) $\Gamma^{-1}=-\frac{1}{72}\begin{pmatrix}-24&12&-8&12\\24&-12&16&-6\\-24&24&-8&-6\\48&-12&-8&-6\end{pmatrix}$

3. Πώς μεταβάλλεται η αντίστροφη μιας μήτρας Α αν:

(α) Εναλλάξουμε την i-στη με τη j-στη γραμμή της Α

(β) Τα στοιχεία της i-στης γραμμής πολλαπλασιαστούν επί λ∈ℜ*.

(γ) Τα στοιχεία της j-στης γραμμής πολλαπλασιαστούν επί λ∈ℜ και προστεθούν στα αντίστοιχα στοιχεία της i-στης γραμμής.

ΛΥΣΗ:

Στην A^{-1}:

(α) Θα εναλλαγούν η i-στη με τη j-στη στήλη.

(β) Τα στοιχεία της i-στης στήλης θα πολλαπλασιαστούν με $\frac{1}{\lambda}$.

(γ) Τα στοιχεία της i-στης στήλης θα πολλαπλασιαστούν με το λ και θα αφαιρεθούν από τα στοιχεία της j-στης στήλης.

4. Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη μιας μήτρας μετάθεσης είναι επίσης μήτρα μετάθεσης.

ΛΥΣΗ:

Αν Α είναι μία μήτρα μετάθεσης, τότε είναι $A\cdot A'=A'\cdot A=I$, οπότε $A^{-1}=A'$, που είναι μήτρα μετάθεσης.

5. Να βρείτε τις μήτρες Α (2x2), οι οποίες ταυτίζονται με τις αντίστροφές τους και είναι διαφορετικές από τις μήτρες Ι και –Ι.

ΛΥΣΗ:

Έστω $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ με $A^{-1}=A$. Τότε $A\cdot A^{-1}=I$ ή $A^2=I$, από την οποία προκύπτει ότι

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta\gamma=1 \\ \beta(\alpha+\delta)=0 \\ \gamma(\alpha+\delta)=0 \\ \beta\gamma+\delta^2=1 \end{cases}$$

- Αν β=γ=0 και δ≠−α, προκύπτει η I ή η −I.
- Αν β≠0 και γ=0, τότε είναι δ=−α με α=±1, οπότε $A=\begin{pmatrix}1 & \beta \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ή $A=\begin{pmatrix}-1 & \beta \\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
- Παρόμοια, αν β=0 και γ≠0, τότε είναι δ=−α με α=±1, οπότε $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ \gamma & -1\end{pmatrix}$ ή $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ \gamma & 1\end{pmatrix}$.
- Αν β≠0 και γ≠0, τότε δ=−α. Οι μήτρες που ζητάμε έχουν β≠0, γ≠0, δ=−α και $\alpha^2+\beta\gamma=1$. Για παράδειγμα, είναι $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 \\ -4 & -3\end{pmatrix}$, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-4 & -15 \\ 1 & 4\end{pmatrix}$, κτλ.

6. Να βρείτε την αντίστροφη της μήτρας $A=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{I_k} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{I_p}\end{array}\right)$, όπου B είναι μια μήτρα (kxp) και $\mathbf{I_k}$ και $\mathbf{I_p}$ είναι οι μοναδιαίες μήτρες (kxk) και (pxp) αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ:

Είναι $A^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} I_k & \text{-}B \\ \hline 0 & I_p\end{array}\right)$.

7. Να βρείτε την αντίστροφη κάθε μιας από τις παρακάτω μήτρες:

(α) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 21 \\ -3 & -12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **(β)** $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 83 & -47 & 1 & 0 & 0 \\ -55 & 94 & 0 & 1 & 0 \\ 62 & -71 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & -21 \\ 3 & 12 & -92 & -279 \\ -1 & -4 & 31 & 94\end{pmatrix}$ (β) $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -83 & 47 & 1 & 0 & 0 \\ 55 & -94 & 0 & 1 & 0 \\ -62 & 71 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

1. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα x, y και z και οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, και γ τα διανύσματα αx−βy, γy−αz και βz−γx είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

ΛΥΣΗ:

Έστω πραγματικοί αριθμοί λ_1, λ_2 και λ_3. Είναι:

$\lambda_1(\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y})+\lambda_2(\gamma\mathbf{y}-\alpha\mathbf{z})+\lambda_3(\beta\mathbf{z}-\gamma\mathbf{x})=\mathbf{0}$ (1) ή

$(\alpha\lambda_1-\gamma\lambda_3)\mathbf{x}+(\gamma\lambda_2-\beta\lambda_1)\mathbf{y}+(\beta\lambda_3-\alpha\lambda_2)\mathbf{z}=\mathbf{0}$

Είναι: $\begin{cases} \alpha\lambda_1 = \gamma\lambda_3 \\ \gamma\lambda_2 = \beta\lambda_1 \\ \beta\lambda_3 = \alpha\lambda_2 \end{cases}$ (2)

Οι σχέσεις (2) ισχύουν αν και μόνο αν $\lambda_1 = \frac{\gamma}{\alpha}\lambda_3$ και $\lambda_2 = \frac{\beta}{\alpha}\lambda_3$ με $\lambda_3\in\Re$. Επειδή υπάρχουν μη μηδενικά λ_1, λ_2 και λ_3 τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση (1), τα διανύσματα $\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y}$, $\gamma\mathbf{y}-\alpha\mathbf{z}$ και $\beta\mathbf{z}-\gamma\mathbf{x}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

2. Να αποδείξετε ότι αν ένα διάνυσμα x είναι ορθογώνιο με καθένα από τα διανύσματα $y_1, y_2, \dots, y_k$, τότε είναι ορθογώνιο και με οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων αυτών.

ΛΥΣΗ:

Έστω $\mathbf{v} = a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2 + \dots + a_k\mathbf{y}_k$ με $\alpha_i\in\Re$ (i=1,…,k) ένας γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_k$. Είναι :

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{x}(a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2 + \dots + a_k\mathbf{y}_k) = a_1\mathbf{x}\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{x}\mathbf{y}_2 + \dots + a_k\mathbf{x}\mathbf{y}_k$$

Επειδή $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_i=0$ για κάθε i=1,…,k, είναι $\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=0$.

3. Έστω x και y δύο μη μηδενικά διανύσματα. Αν για κάθε $\lambda\in\Re$ ισχύει $\|\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\|$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\|\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\lambda\boldsymbol{xy} + \lambda^2\|\boldsymbol{y}\|^2$. Επειδή $\|\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\|$ ή ισοδύναμα $\|\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\|^2 \geq \|\boldsymbol{x}\|^2$, είναι και

$$2\lambda\boldsymbol{xy} + \lambda^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0 \qquad (1)$$

Έστω $\mathbf{xy}\neq0$, π.χ. $\mathbf{xy}<0$. Από τη σχέση (1) για $\lambda>0$ προκύπτει ότι $2\boldsymbol{xy} + \lambda\|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$ ή $\lambda \geq -\frac{2\boldsymbol{xy}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$ για κάθε $\lambda>0$, που είναι άτοπο, αφού $0 < -\frac{2\boldsymbol{xy}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$, οπότε υπάρχει λ τέτοιο ώστε $0 < \lambda < -\frac{2\boldsymbol{xy}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$.

Ομοίως εργαζόμαστε αν υποθέσουμε $\mathbf{xy}>0$.

4. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων x και y, να αποδείξετε ότι $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2-2\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|\sigma\upsilon\nu\theta$

ΛΥΣΗ:

Αν $\theta=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\dfrac{|\boldsymbol{xy}|}{\|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\|}$, τότε είναι $\boldsymbol{xy}=\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$ και

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2-2\boldsymbol{xy}=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2-2\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|\sigma\upsilon\nu\theta$$

5. Να βρείτε μία (2x2) μήτρα Α τέτοια ώστε $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$**.**

ΛΥΣΗ:

Έστω $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ με α, β, γ, δ$\in\Re$. Τότε:

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ισοδυναμεί με $\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & \alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\gamma\delta & \beta\gamma+\delta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ή

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta\gamma=-1\\ \beta(\alpha+\delta)=0\\ \gamma(\alpha+\delta)=0\\ \delta^2+\beta\gamma=-1\end{cases}$$

Αν β=0 ή γ=0 τότε είναι $\alpha^2=\delta^2=-1$, που είναι άτοπο. Επομένως, πρέπει να είναι β≠0, γ≠0 και δ=–α με $\alpha^2+\beta\gamma=-1$. Έτσι, είναι π.χ. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, ή $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & -3\end{pmatrix}$, ή $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-4 & -17\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

6. Να βρείτε τις (2x2) μήτρες Α για τις οποίες ισχύει A^2=0.

ΛΥΣΗ:

Έστω $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ μια μήτρα για την οποία A^2=0. Είναι:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{cases}\alpha^2+\beta\gamma=0\\ \beta(\alpha+\delta)=0\\ \gamma(\alpha+\delta)=0\\ \delta^2+\beta\gamma=0\end{cases}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν β≠0, τότε είναι δ=–α και $\gamma = -\frac{\alpha^2}{\beta}$, οπότε $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$ με $\alpha \in \Re$ και $\beta \in \Re^*$.

(β) Αν β=0, τότε α=δ=0 και $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ με $\gamma \in \Re$.

7. Να υπολογίσετε τις μήτρες $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\nu}$ και $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{\nu}$ όπου $\lambda \in \Re$.

ΛΥΣΗ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Παρόμοια είναι:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{\nu} = \begin{pmatrix} \lambda^{\nu} & \nu\lambda^{\nu-1} \\ 0 & \lambda^{\nu} \end{pmatrix}$

8. Να εξετάσετε πώς επηρεάζεται το γινόμενο ΑΒ δύο μήτρών Α και Β αν:

(α) εναλλάξουμε την i-στη με τη j-στη γραμμή της Α.

(β) στην i-στη γραμμή της Α προσθέσουμε τη j-στη γραμμή πολλαπλασιασμένη με ένα βαθμωτό λ.

(γ) εναλλάξουμε την i-στη με τη j-στη στήλη της Β.

(δ) στην i-στη στήλη της Β προσθέσουμε τη j-στη στήλη πολλαπλασιασμένη με ένα βαθμωτό λ.

ΛΥΣΗ:

(α) Έστω ότι η Α είναι (νxμ), η Β (μxρ), $\overline{A}$ η μήτρα που προκύπτει αν εναλλάξουμε την i-στη με τη j-στη γραμμή της Α και $\overline{\Gamma} = \overline{A}B$. Ας εξετάσουμε τα στοιχεία $\overline{\gamma}_{ik}$ και $\overline{\gamma}_{jk}$. Είναι:

$$\overline{\gamma}_{ik} = \sum_{m=1}^{\mu} \overline{\alpha}_{im}\beta_{mk} = \sum_{m=1}^{\mu} \alpha_{jm}\beta_{mk} = \gamma_{jk} \text{ και}$$

$$\overline{\gamma}_{jk} = \sum_{m=1}^{\mu} \overline{\alpha}_{jm}\beta_{mk} = \sum_{m=1}^{\mu} \alpha_{im}\beta_{mk} = \gamma_{ik}$$

Επομένως, εναλλάσσονται οι γραμμές i και j του γινομένου ΑΒ.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

(β) Στην i-στη γραμμή του γινομένου προστίθεται η j-στη γραμμή πολλαπλασιασμένη με λ.

(γ) Εναλλάσσονται οι i και j στήλες του γινομένου.

(δ) Στην i-στη στήλη του γινομένου προστίθεται η j-στη στήλη πολλαπλασιασμένη με λ.

9. Αν Α και Β είναι τετραγωνικές μήτρες, να αποδείξετε ότι tr(A⊗B)=tr(A)·tr(B).

ΛΥΣΗ:

Έστω ότι η Α είναι μήτρα (mxm) και η Β μήτρα (pxp). Τότε:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \dots & \alpha_{1m}B \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m}B & \dots & \alpha_{mm}B \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:c:ccc} \alpha_{11}\beta_{11} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{1m}\beta_{11} & \dots & \alpha_{1m}\beta_{pq} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ \alpha_{11}\beta_{p1} & \dots & \alpha_{11}\beta_{pp} & \dots & \alpha_{1m}\beta_{p1} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{pp} \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline \alpha_{m1}\beta_{11} & & \alpha_{m1}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{mm}\beta_{11} & \dots & \alpha_{mm}\beta_{1p} \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1}\beta_{p1} & & \alpha_{m1}\beta_{pp} & & \alpha_{mm}\beta_{p1} & \dots & \alpha_{mm}\beta_{pp} \end{array}\right)$$

οπότε είναι:

$$\begin{aligned} tr(A \otimes B) &= (\alpha_{11}\beta_{11} + \dots + \alpha_{11}\beta_{pp}) + (\alpha_{22}\beta_{11} + \dots + \alpha_{22}\beta_{pp}) + \dots + (\alpha_{mm}\beta_{11} + \dots + \alpha_{mm}\beta_{pp}) = \\ &= \alpha_{11}(\beta_{11} + \dots + \beta_{pp}) + \alpha_{22}(\beta_{11} + \dots + \beta_{pp}) + \dots + \alpha_{mm}(\beta_{11} + \dots \beta_{pp}) = \\ &= (\alpha_{11} + \dots + \alpha_{mm})(\beta_{11} + \dots + \beta_{pp}) = tr(A) \cdot tr(B) \end{aligned}$$

10. Να βρείτε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(δ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **(ε)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 24$ (β) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -76$ (γ) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 38$

(δ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -21$ (ε) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

11. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των μητρών:

(α) $A = \begin{pmatrix} -7 & 105 & 67 \\ 0 & 2 & 53 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(β)** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & 67 & 13 & 1 \end{pmatrix}$ **(γ)** $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

Επειδή οι μήτρες Α, Β και Γ είναι τριγωνικές, η ορίζουσα καθεμιάς ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Είναι $|A| = -14$, $|B| = -6$ και $|\Gamma| = 60$.

12. Πώς μεταβάλλεται μια ορίζουσα τάξης ν αν η πρώτη στήλη μετατεθεί το τέλος και οι υπόλοιπες στήλες μετατεθούν μια θέση αριστερά;

ΛΥΣΗ:

Η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Βήμα 1: Η $1^η$ στήλη εναλλάσσεται με τη n-στη

Βήμα 2: Η $1^η$ στήλη εναλλάσσεται με τη $2^η$

Βήμα 3: Η $2^η$ στήλη εναλλάσσεται με την $3^η$

……….

Βήμα n−1: Η n−2 στήλη εναλλάσσεται με τη (n−1) στήλη

Σε κάθε ένα από τα παραπάνω βήματα η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο, δηλαδή πολλαπλασιάζεται με −1, οπότε τελικά πολλαπλασιάζεται με $(-1)^{n-1}$.

13. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 1 \\ \beta & \gamma & \alpha & 1 \\ \gamma & \alpha & \beta & 1 \\ \frac{\beta+\gamma}{2} & \frac{\alpha+\gamma}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

ΛΥΣΗ:

Προσθέτοντας στα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης τα αντίστοιχα στοιχεία της $2^{ης}$ και $3^{ης}$ στήλης, θα βρείτε ότι η ορίζουσα είναι ίση με το μηδέν.

14. Να βρείτε το βαθμό των παρακάτω μητρών:

(α) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **(β)** $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **(γ)** $\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) Όλες οι ορίζουσες τρίτης τάξης της Α είναι μηδέν. Επειδή $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$, είναι r(A)=2.

(β) Επειδή $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$, είναι r(B)=3.

(γ) Επειδή $|\Gamma| = -10 \neq 0$, είναι r(Γ)=4.

15. Αν λi≠0, i=1,…,ν, να βρείτε τις αντίστροφες των παρακάτω μητρών:

α) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_\nu \end{pmatrix}$ **(β)** $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ . & \dots & . & . \\ \lambda_\nu & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) Με βάση την ιδιότητα 7 από τη θεωρία είναι: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_\nu} \end{pmatrix}$.

$$(\beta)\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dfrac{1}{\lambda_\nu} \\ 0 & \dots & \dfrac{1}{\lambda_{\nu-1}} & 0 \\ . & \dots & . & . \\ \dfrac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Να βρείτε τις αντίστροφες των παρακάτω (νxν) μητρών:

$$\textbf{(α)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(β)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{(γ)} \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\alpha \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha \in \Re}.$$

ΛΥΣΗ:

$$(\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2-\nu & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\nu-1} \begin{pmatrix} 2-\nu & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-\nu & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-\nu & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-\nu \end{pmatrix}$$

(γ)

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\alpha \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{\alpha(\alpha+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu-\alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\nu-\alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-\nu-\alpha & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\nu-\alpha \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΕΙΣ 7^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 7.1

1. Να λύσετε τα συστήματα:

(α) $3x+2y+4z=1$

$2x-y+z=0$

$x+2y+3z=1$

(β) $2x-y+z=1$

$x+3y-2z=0$

$4x-3y+z=2$

(γ) $2x-y+3z=9$

$3x-5y+z=-4$

$4x-7y+z=5$

(δ) $3x+y-z=0$

$x+y+z=0$

$y-z=1$

ΛΥΣΗ:

(α) $(x,y,z)=\left(-\frac{1}{5},0,\frac{2}{5}\right)$

(β) $(x,y,z)=\left(\frac{5}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right)$

(γ) Αδύνατο

(δ) $(x,y,z)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

(α) $2x+3y+11z+5v=2$

$x+y+5z+2v=1$

$2x+y+3z+2v=-3$

$x+y+3z+4v=-3$

(β) $7x+9y+4z+2v=2$

$2x-2y+z+v=6$

$5x+6y+3z+2v=3$

$2x+3y+z+v=0$

(γ) $2x+y+4z+8v=-1$

$x+3y-6z+2v=3$

$3x-2y+2z-2v=8$

$2x-y+2z=4$

ΛΥΣΗ:

(α) $(x,y,z,v)=(-2,0,1,-1)$

(β) $(x,y,z,v)=\left(-\frac{2}{5},-\frac{6}{5},\frac{17}{5},1\right)$

(γ) $(x,y,z,v)=\left(2,-3,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

(α) $4x-7y+3z=0$

$x+y=0$

$y-6z=0$

(β) $3x+4y-2z=0$

$x+y+z=0$

$-x-3y+5z=0$

(γ) $7x-2y+5z+v=0$

$x-y+z=0$

$y-2z+v=0$

$x+z+v=0$

(δ) $-3x+y+z=0$

$x-y+z-2v=0$

$x-z+v=0$

$-x+y-3v=0$

ΛΥΣΗ:

(α) $(x,y,z)=(0,0,0)$

(β) $(x,y,z)=(0,0,0)$

(γ) $(x,y,z,v)=(0,0,0,0)$

(δ) $(x,y,z,v)=(4\lambda,7\lambda,5\lambda,\lambda)$ με $\lambda\in\Re$.

4. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ έχουν λύση τα συστήματα:

(α) $x+2y-z=1$

$-2x-4y+2z=\lambda$

$x+3y+2z=-1$

(β) $\lambda x+y+z=1$

$x+\lambda y+z=1$

$x+y+\lambda z=1$

(γ) $2x-1y+3z+4v=5$

$4x-2y+5z+6v=7$

$6x-3y+7z+8v=9$

$\lambda x-4y+9z+10v=11$

ΛΥΣΗ:

(α) Για $\lambda\neq -2$ το σύστημα είναι αδύνατο.

Για $\lambda=-2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=(7\kappa+5,-3\kappa-2,\kappa)$ με $\kappa\in\Re$.

(β) Για $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -2$ το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y,z)=\left(\frac{1}{\lambda+2},\frac{1}{\lambda+2},\frac{1}{\lambda+2}\right)$.

Για $\lambda=1$, έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=(\kappa,\mu,1-\kappa-\mu)$ με $\kappa,\mu\in\Re$.

Τέλος, για λ=−2 το σύστημα είναι αδύνατο.

(γ) Για λ≠8 το σύστημα έχει άπειρες λύσεις $(x, y, z, v) = (0,-2\kappa + 4, 3 - 2\kappa, \kappa)$ με κ∈ℜ.

Για λ=8 έχει άπειρες λύσεις $(x, y, z, v) = (\kappa, 2\kappa - 2\mu + 4, 3 - 2\mu, \mu)$ με κ,μ∈ℜ.

5. Έστω το γραμμικό σύστημα Αx=β, όπου η μήτρα Α είναι τάξης (κxν), το διάνυσμα στήλης x είναι (νx1) και το διάνυσμα των σταθερών όρων β είναι (κx1). Αν τα διανύσματα $x=(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)'$ και $y=(y_1,y_2,\ldots,y_\nu)'$ είναι λύσεις του συστήματος και αν λ∈ℜ:

(α) Να βρείτε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο να έχει μήτρα συντελεστών Α και λύση το διάνυσμα x+y.

(β) Να βρείτε ένα γραμμικό σύστημα το οποίο να έχει μήτρα συντελεστών Α και λύση το διάνυσμα λx.

ΛΥΣΗ:

Το σύστημα που ζητάμε είναι:

(α) Α**x**=2**β**

(β) Α**x**=λ**β**

Ασκήσεις 7.2

1. Να βρείτε τις χαρακτηριστικές τιμές και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα των παρακάτω μητρών:

(α) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(β)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (γ) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(δ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **(ε)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=2$. Για $\lambda_1=1$ έχουμε το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και για $\lambda_2=2$ το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(β) Υπάρχει μία χαρακτηριστική τιμή, η λ=2, για την οποία προκύπτει το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(γ) Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ και $\lambda_3=3$. Για $\lambda_1=1$ έχουμε το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, για $\lambda_2=2$ το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}$ και για $\lambda_3=3$ το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{3}{\sqrt{26}} \\ \frac{4}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$.

(δ) Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα είναι:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{34+6\sqrt{5}}} \\ -\frac{2}{\sqrt{34+6\sqrt{5}}} \\ -\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{34+6\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \ \text{και} \ \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{34-6\sqrt{5}}} \\ -\frac{2}{\sqrt{34-6\sqrt{5}}} \\ -\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{34-6\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

(ε) Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$ και $\lambda_4=-2$. Τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα είναι $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ και

$$\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Έστω Α και Β δύο τετραγωνικές μήτρες (νxν).

(α) Να αποδείξετε ότι αν η μήτρα $I - AB$ είναι αντιστρέψιμη, τότε και η μήτρα $I - BA$ είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι μήτρες ΑΒ και ΒΑ έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση.

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι:

$$(I-BA)\left[B(I-AB)^{-1}A+I\right]=B(I-AB)^{-1}A-BAB(I-AB)^{-1}A+I-BA=$$

$$=B\left[(I-AB)^{-1}-AB(I-AB)^{-1}\right]A+I-BA=$$

$$=B(I-AB)(I-AB)^{-1}A+I-BA=BA+I-BA=I$$

Επομένως, η μήτρα $I-BA$ είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι $(I-BA)^{-1}=I+B(I-AB)^{-1}A$.

(β) Έστω λ μία οποιαδήποτε χαρακτηριστική τιμή της μήτρας AB. Τότε υπάρχει διάνυσμα **v** τέτοιο ώστε $AB\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$. Αν $B\mathbf{v}=\mathbf{v}'$, τότε είναι:

$$BA\mathbf{v}'=BA(B\mathbf{v})=B(AB\mathbf{v})=B\lambda\mathbf{v}=\lambda B\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}'$$

δηλαδή ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας BA. Επομένως οι μήτρες AB και BA έχουν τις ίδιες χαρακτηριστικές τιμές, οπότε έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση.

3. Να βρείτε τις χαρακτηριστικές τιμές και τα χαρακτηριστικά διανύσματα της (νxν) μήτρας

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ . & . & \dots & .\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1\\ . & . & \dots & .\\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$.

Αφαιρώντας από κάθε στήλη τη στήλη που βρίσκεται δεξιά της, η εξίσωση γράφεται:

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & \dots & 1\\ \lambda & -\lambda & \dots & 1\\ . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & \dots & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Προσθέτοντας κάθε γραμμή στην αμέσως επόμενη, η εξίσωση τελικά γράφεται

$$\left|A-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & \dots & 1\\ 0 & -\lambda & \dots & 1\\ . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & \dots & \nu-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Είναι φανερό ότι οι χαρακτηριστικές τιμές είναι $\lambda_1=0$ και $\lambda_2=\nu$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_\nu \end{pmatrix}$ με $c_i \in \Re$ i=1,…,ν−1 και $c_\nu = -(c_1 + \dots + c_{\nu-1})$

4. **Έστω ότι η μήτρα Α έχει χαρακτηριστικές τιμές 1,2,3, η μήτρα Β έχει χαρακτηριστικές τιμές 4,5,6 και η μήτρα Γ έχει χαρακτηριστικές τιμές 7,8,9. Να βρείτε τις χαρακτηριστικές τιμές και τα χαρακτηριστικά διανύσματα της μήτρας $\begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}$.**

ΛΥΣΗ:

Έστω ότι $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}$ και λ είναι μια χαρακτηριστική τιμή της μήτρας Μ. Τότε θα είναι $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ και αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$, τότε:

$$M\mathbf{x} = \begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 + B\mathbf{x}_2 \\ \Gamma\mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{x}_1 \\ \lambda\mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι αν $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, τότε το λ είναι χαρακτηριστική τιμή της μήτρας Γ. Αν $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, τότε για $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ πρέπει να είναι $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, οπότε η λ είναι χαρακτηριστική τιμή της μήτρας Α. Επομένως, κάθε χαρακτηριστική τιμή της Μ είναι χαρακτηριστική τιμή της Α ή της Γ. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι κάθε χαρακτηριστική τιμή της Α (ή της Γ) είναι και χαρακτηριστική τιμή της Μ. Άρα οι χαρακτηριστικές τιμές της Μ είναι 1,2,3,7,8,9.

Κάθε χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ της Α προσδιορίζει ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{y}'=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ της Μ. Παρόμοια, κάθε χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}$ της Γ προσδιορίζει ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{z}'=\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}$ της Μ

5. Έστω ότι λ είναι χαρακτηριστική τιμή και x το αντίστοιχο χαρακτηριστικό διάνυσμα μιας μήτρας Α. Να δείξετε ότι το x είναι χαρακτηριστικό διάνυσμα της μήτρας Β=Α−7Ι και να βρείτε την αντίστοιχη χαρακτηριστική τιμή.

ΛΥΣΗ:

Έστω $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. Τότε: $B\mathbf{x}=(A-7I)\mathbf{x}=A\mathbf{x}\text{-}7\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\text{-}7\mathbf{x}=(\lambda\text{-}7)\mathbf{x}$

Άρα το **x** είναι χαρακτηριστικό διάνυσμα της μήτρας Β με αντίστοιχη χαρακτηριστική τιμή την λ−7.

6. Να δείξετε ότι κάθε ταυτοδύναμη μήτρα Α, δηλαδή κάθε μήτρα Α για την οποία ισχύει A^2=Α, είναι διαγωνιοποιήσιμη.

ΛΥΣΗ:

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι ιδιοτιμές της Α είναι 0 και 1. Στην τιμή 0 αντιστοιχούν n−r γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και στην τιμή 1 r γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, όπου n είναι ο αριθμός των στηλών της Α και r ο βαθμός της. Επομένως, υπάρχουν συνολικά n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για τη μήτρα Α, οπότε είναι διαγωνιοποιήσιμη.

7. Να διαγωνιοποιήσετε τη μήτρα $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 13 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ και να υπολογίσετε τη μήτρα A^{11}.

ΛΥΣΗ:

Οι χαρακτηριστικές τιμές της A είναι $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=-2$ και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα είναι $\mathbf{x}^1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ και $\mathbf{x}^3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$. Η μήτρα των χαρακτηριστικών διανυσμάτων είναι $S=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ και η αντίστροφή της $S^{-1}=\begin{pmatrix}-5\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & \sqrt{3}\\-\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 0\\-3\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & \sqrt{6}\end{pmatrix}$. Επομένως είναι:

$$A=S\Lambda S^{-1}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & \sqrt{3}\\-\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 0\\-3\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & \sqrt{6}\end{pmatrix} \text{ και}$$

$$A^{11}=S\Lambda S^{-1}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -2048\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & \sqrt{3}\\-\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 0\\-3\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & \sqrt{6}\end{pmatrix}$$

8. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω μήτρες είναι διαγωνιοποιήσιμες:

$$A=\begin{pmatrix}7/4 & \sqrt{3}/4 & 0\\\sqrt{3}/4 & 5/4 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & 7 & -8\\-3 & -6 & 4\\2 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Οι μήτρες A και B δεν είναι διαγωνιοποιήσιμες γιατί:

Στην A είναι $\lambda_1=\lambda_2=1$ και $|S|=0$.

Στη B είναι $\lambda_1=\lambda_2=-3$ και $|S|=0$.

Ασκήσεις 7.3

1. Να γράψετε τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές σε μορφή μητρών:

(α) $x_1^2+4x_2^2$

(β) $x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 x_2$

(γ) $-6x_1 x_2$

(δ) $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 x_2 + 6x_2 x_3$

ΛΥΣΗ:

(α) $x_1^2 + 4x_2^2 = (x_1, \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(β) $x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 x_2 = (x_1, \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(γ) $-6x_1 x_2 = (x_1, \quad x_2)\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(δ) $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 x_2 + 6x_2 x_3 = (x_1, \quad x_2, \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3 \\ -3/2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

2. Να εξετάσετε αν κάθε μία από τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές είναι θετικά/ αρνητικά ορισμένη ή θετικά/αρνητικά ημιορισμένη:

(α) $-x_1^2 + 4x_1 x_2 - 4x_2^2$

(β) $4x_1^2 + 8x_1 x_2 + 5x_2^2$

(γ) $-x_1^2 + x_1 x_2 - 3x_2^2$

(δ) $-x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1 x_2$

(ε) $-4x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1 x_3 + 2x_2 x_3$

ΛΥΣΗ:

(α) Αρνητικά ημιορισμένη

(β) Θετικά ορισμένη

(γ) Αρνητικά ορισμένη

(δ) Αρνητικά ημιορισμένη

(ε) Αρνητικά ορισμένη

3. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες οι παρακάτω τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες:

(α) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1 x_2 - 2x_1 x_3 - 2x_2 x_3$

(β) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$

(γ) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$

(δ) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10 x_1 x_3 + 6 x_2 x_3$

(ε) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 6 x_1 x_3 + 2 x_2 x_3$

ΛΥΣΗ:

(α) λ>2

(β) $-\sqrt{\frac{5}{3}} < \lambda < \sqrt{\frac{5}{3}}$

(γ) $-\frac{4}{5} < \lambda < 0$

(δ) Δεν υπάρχουν λ για τα οποία η τετραγωνική μορφή να είναι θετικά ορισμένη.

(ε) Ομοίως

4. Έστω η τετραγωνική μορφή $2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2\lambda x_2 x_3$. Να εξετάσετε το πρόσημο της τετραγωνικής μορφής για κάθε δυνατή τιμή της παραμέτρου λ.

ΛΥΣΗ:

Η τετραγωνική μορφή γράφεται $2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2\lambda x_2 x_3 = \mathbf{x}' A \mathbf{x}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$. Οι κύριες ελάσσονες τάξης 1 είναι 2, 0 και 2. Οι κύριες ελάσσονες τάξης 2 είναι $-\lambda^2$, 3 και 0 και η κύρια ελάσσων τάξης 3 είναι $2\lambda^2$. Επομένως, για λ=0 η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ημιορισμένη ενώ για λ≠0 δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη ή ημιορισμένη.

5. Έστω η μήτρα $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι a και b προκειμένου η A να είναι θετικά ορισμένη, θετικά ημιορισμένη, αρνητικά ορισμένη ή αρνητικά ημιορισμένη.

ΛΥΣΗ:

Οι κύριες ελάσσονες πρώτης τάξης είναι α, −1 και −2. Οι κύριες ελάσσονες δεύτερης τάξης είναι 2, $-2a - b^2$ και −(α+1). Η μήτρα δεν είναι θετικά ορισμένη ή ημιορισμένη για καμία τιμή του α γιατί δύο από τις κύριες ελάσσονες πρώτης τάξης είναι αρνητικές.

Οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες της A είναι α, −(α+1) και $b^2 + 2a + 2$. Επομένως, η μήτρα είναι αρνητικά ορισμένη αν α<−1 και $b^2 + 2a + 2 < 0$.

Η A είναι αρνητικά ημιορισμένη όταν α≤−1 και $b^2 + 2a + 2 \le 0$.

6. Να δείξετε ότι η μήτρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **δεν είναι θετικά ορισμένη.**

ΛΥΣΗ:

Η μήτρα δεν είναι θετικά ορισμένη γιατί η διαδοχική κύρια ελάσσων τρίτης τάξης είναι μηδέν.

Ασκήσεις 7.4

1. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ **και** $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ **για τα οποία ισχύει**

$y_1 = x_1^2 - x_2$ **και**

$y_2 = x_3^2 + 3x_2$

Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$**.**

ΛΥΣΗ:

Είναι $\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2x_3 \end{pmatrix}$.

2. Αν y=tr(A), να αποδείξετε ότι $\dfrac{\partial y}{\partial A} = I$

ΛΥΣΗ:

Έστω ότι η A=[aij] είναι μήτρα (νxν). Τότε είναι $y = tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{\nu\nu}$ και

$$\frac{\partial y}{\partial A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = I$$

3. Έστω $\mathbf{\alpha}' = (3 \quad 4)$**,** $\mathbf{x}' = (x_1 \quad x_2)$ **και** $y = \mathbf{\alpha}'\mathbf{x}$**. Να βρείτε τις παραγώγους** $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}'}$ **και** $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$**.**

ΛΥΣΗ:

Είναι $y = 3x_1 + 4x_2$. Άρα $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{\alpha}' = (3, \quad 4)$ και $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. Έστω η τετραγωνική μορφή $y = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ και $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τις παραγώγους $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}'}$ και $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$.

ΛΥΣΗ:

Είναι $y = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 7x_2^2$ και $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}'A = \left(6x_1 + 10x_2, \quad 10x_1 + 14x_2\right)$.

Επίσης, $\dfrac{\partial y}{\partial \mathbf{x}'} = 2A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 10x_2 \\ 10x_1 + 14x_2 \end{pmatrix}$.

5. Για την τετραγωνική μορφή της άσκησης 4 να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{\partial^2 y}{\partial \mathbf{x}^2}$.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\dfrac{\partial^2 y}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

6. Έστω η μήτρα $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x+1 & x+1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις παραγώγους $\dfrac{\partial |A|}{\partial A}$ και $\dfrac{\partial \ln|A|}{\partial A}$.

ΛΥΣΗ:

Είναι $|A| = x^2 - 1$

Είναι $\dfrac{\partial |A|}{\partial A} = \begin{pmatrix} x+1 & -1 \\ -(x+1) & x \end{pmatrix} = |A|A^{-1}$ γιατί $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} x+1 & -1 \\ -(x+1) & x \end{pmatrix}$.

Επίσης είναι $\dfrac{\partial \ln|A|}{\partial A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x-1} & -\dfrac{1}{x^2-1} \\ -\dfrac{1}{x-1} & \dfrac{x}{x^2-1} \end{pmatrix} = A^{-1}$

Ασκήσεις 7.5

1. Έστω η μήτρα $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Να δείξετε ότι η μήτρα A^2 έχει ρίζα Frobenius $\widehat{\lambda} > 0$.

(β) Να βρείτε διάνυσμα w τέτοιο ώστε Aw>12w.

(γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε χαρακτηριστική τιμή μ της A ισχύει μ<13.

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 1 \\ 72 & 133 & 12 \\ 43 & 86 & 8 \end{pmatrix}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 4 (Frobenius). Επομένως, η μήτρα A^2 έχει ρίζα Frobenius $\widehat{\lambda} > 0$.

(β) Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $\mathbf{w}' = (1, 10, 6)$, που σημαίνει ότι η μήτρα A έχει ρίζα Frobenius μεγαλύτερη του 12.

(γ) Με παρόμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{w}$ τέτοιο ώστε Aw>13w, άρα όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες της A είναι μικρότερες του 13.

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω μήτρες είναι ακυκλικές.

(α) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(β) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(γ) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) Με απ' ευθείας εφαρμογή του ορισμού προκύπτει ότι η μήτρα είναι κυκλική.

(β) Η μήτρα ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Frobenius και έχει μοναδική ρίζα Frobenius λ=1, επομένως είναι ακυκλική.

(γ) Παρόμοια, αποδεικνύεται ότι και αυτή η μήτρα είναι ακυκλική

3. Έστω η μήτρα $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε με ακρίβεια τη μήτρα $(I - A)^{-1}$.

(β) Να επιβεβαιώσετε ότι η A ικανοποιεί τη συνθήκη Hawkins-Simon και να υπολογίσετε προσεγγιστικά τη μήτρα $(I - A)^{-1}$ **με βάση τους πέντε πρώτους όρους της σειράς** $I + A + A^2 + \ldots$. **Τι παρατηρείτε;**

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}26 & 1{,}62 \\ 1{,}62 & 2{,}58 \end{pmatrix}$

(β) Είναι $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}34 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}183 & 0{,}220 \\ 0{,}220 & 0{,}227 \end{pmatrix}$ και $A^4 = \begin{pmatrix} 0{,}1466 & 0{,}1575 \\ 0{,}1575 & 0{,}1781 \end{pmatrix}$.

Η προσέγγιση της μήτρας $(I - A)^{-1}$ είναι:

$$I + A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 1{,}8196 & 1{,}1275 \\ 1{,}1275 & 2{,}0451 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει σημαντική απόκλιση της προσέγγισης από τη μήτρα που υπολογίστηκε στο (α). Η απόκλιση αυτή μειώνεται αν πάρουμε περισσότερους όρους στη σειρά $I + A + A^2 + \ldots$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. **Να λύσετε τα συστήματα:**

(α)
$$\begin{aligned} 3x-2y-5z+v&=3\\ 2x-3y+z+5v&=-3\\ x+2y-4v&=-3\\ x-y-4z+9v&=22 \end{aligned}$$

(β)
$$\begin{aligned} 4x-3y+z+5v&=7\\ 2x-3y+z+5v&=-3\\ x+2y-4v&=-3\\ x-y-4z+9v&=22 \end{aligned}$$

(γ)
$$\begin{aligned} 2x-y+z-v&=3\\ 4x-2y-2z+3v&=2\\ 2x-y+5z-6v&=1\\ 2x-y-3z+4v&=5 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ:

(α) (x,y,z,v)=(–1,3,–2,2)

(β) (x,y,z,v)=(5,–62,–54,–29)

(γ) Αδύνατο

2. **Να λύσετε τα συστήματα:**

(α)
$$\begin{aligned} 2x-5y+4z+3v&=0\\ 3x-4y+7z+5v&=0\\ 4x-9y+8z+5v&=0\\ -3x+2y-5z+3v&=0 \end{aligned}$$

(β)
$$\begin{aligned} 2x+y+4z+v&=0\\ 3x+2y-z-6v&=0\\ 7x+4y+6z-5v&=0\\ x+8z+7v&=0 \end{aligned}$$

(γ)
$$\begin{aligned} 2x-y-z-v-w&=0\\ -x+2y-z-v-w&=0\\ 4x+y-5z-5v-5w&=0\\ x+y+2z+v+w&=0\\ x+y+z+2v+w&=0 \end{aligned}$$

(δ)
$$\begin{aligned} 3x+6y+10z+4v-2w&=0\\ 6x+10y+17z+7v-3w&=0\\ 9x+3z+2v+3w&=0\\ 12x-2y+z+8v+5w&=0 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ:

(α) (x,y,z,v)=(0,0,0,0)

(β) (x,y,z,v)=(λ,λ,−λ,λ) με λ∈ℜ

(γ) $(x,y,z,v,w)=\left(\frac{\lambda}{7},\frac{\lambda}{7},-\frac{3\lambda}{7},-\frac{3\lambda}{7},\lambda\right)$

(δ) $(x,y,z,v,w)=\left(-\frac{\lambda}{3}-\frac{\kappa}{3},-\frac{3\lambda}{2}+\frac{\kappa}{2},\lambda,0,\kappa\right)$ με λ, κ∈ℜ.

3. **Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ έχουν λύση τα συστήματα:**

(α) $(1+\lambda)x+y+z=1$

$x+(1+\lambda)y+z=\lambda$

$x+y+(1+\lambda)z=\lambda^2$

(β) $(\lambda+1)x+y+z=\lambda^2+3\lambda$

$x+(\lambda+1)y+z=\lambda^3+3\lambda^2$

$x+y+(\lambda+1)z=\lambda^4+3\lambda^3$

(γ) $(3+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+\lambda z+(\lambda-1)v=3$

$3\lambda x+(3+2\lambda)y+\lambda z+(\lambda-1)v=1$

$3\lambda x+3\lambda y+3z+(\lambda-1)v=1$

$3\lambda x+3\lambda y+\lambda z+(\lambda-1)v=1$

ΛΥΣΗ:

(α) Η ορίζουσα της μήτρας των συντελεστών είναι $\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$.

Το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν λ≠0 και λ≠−3. Στην περίπτωση αυτή η λύση του συστήματος είναι:

$$(x,y,z)=\left(\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)},\quad \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)},\quad \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}\right)$$

Αν λ=0 ή λ=−3, το σύστημα είναι αδύνατο.

(β) Παρόμοια, το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν λ≠0 και λ≠−3. Η λύση είναι:

$(x,y,z)=\left(2-\lambda^2,\quad 2\lambda-1,\quad \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1\right)$.

Αν λ=0, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=\left(-\kappa-\mu,\quad \kappa,\quad \mu\right)$ με κ, μ∈ℜ.

Αν λ=−3, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=\left(\kappa,\quad \kappa,\quad \kappa\right)$ με κ∈ℜ.

(γ) Το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν λ≠1 και λ≠3. Η λύση είναι:

$$(x,y,z,v)=\left(\frac{2}{3-\lambda},\quad 0,\quad 0,\quad \frac{3-7\lambda}{(\lambda-1)(3-\lambda)}\right).$$

Για λ=1 το σύστημα είναι αδύνατο ενώ για λ=3 έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y, z, v) = \left(-\frac{17}{9} - \frac{\kappa}{3} - \frac{2\mu}{9}, \quad 2, \quad \kappa, \quad \mu \right)$ με κ, μ∈ℜ.

4. **Να βρείτε τις χαρακτηριστικές τιμές και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα των παρακάτω μητρών:**

(α) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(β)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (γ) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

ΛΥΣΗ:

(α) Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι $\lambda_1=0$ και $\lambda_2=2$. Για $\lambda_1=0$ έχουμε το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και για $\lambda_2=2$ το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$.

(β) Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=3$ (διπλή). Για $\lambda_1=2$ έχουμε το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και για $\lambda_2=2$ το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(γ) Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-2$ (διπλή). Για $\lambda_1=1$ έχουμε το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ και για $\lambda_2=-2$ το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. **Να βρείτε τις χαρακτηριστικές τιμές και τα χαρακτηριστικά διανύσματα της (νxν) μήτρας**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ . & . & \dots & . \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Μπορείτε να αποδείξετε επαγωγικά ότι οι χαρακτηριστικές τιμές είναι λ_1=α−b (ν−1 τάξης) και λ_2=α+(ν−1)b. Για λ_1=α−b το χαρακτηριστικό διάνυσμα είναι της μορφής $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ -c_1 - c_2 - \dots - c_{\nu-1} \end{pmatrix}$ με $c_i \in \Re$ i=1,…,ν−1 ενώ για λ_2=α+(ν−1)b είναι της μορφής

$\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ \dots \\ c \end{pmatrix}$ με $c \in \Re$.

6. **Έστω Α και Β δύο τετραγωνικές μήτρες τάξης (νxν). Αν r(AB−BA)=1, να δείξετε ότι $(AB - BA)^2 = 0$.**

ΛΥΣΗ:

Έστω Ε=ΑΒ−ΒΑ. Εφόσον η Ε έχει τάξη 1, μπορεί να γραφεί ως γινόμενο μιας στήλης, έστω $\mathbf{v}_c$ και μιας γραμμής, έστω $\mathbf{v}_r$.

Αν $\mathbf{v}_c = \begin{pmatrix} \gamma_{1c} \\ \gamma_{2c} \\ \dots \\ \gamma_{\nu c} \end{pmatrix}$ και $\mathbf{u}_r = (\gamma_{r1}, \quad \gamma_{r2}, \quad \dots, \quad \gamma_{r\nu})$, τότε είναι $\mathrm{E} = \mathbf{v}_c \mathbf{u}_r$ και το στοιχείο (i,j) της μήτρας αυτής είναι $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ic} \cdot \gamma_{rj}$. Έτσι, το στοιχείο (i,j) της μήτρας $Z=E^2$ είναι:

$$\zeta_{ij} = \sum_{m=1}^{\nu} \varepsilon_{im} \cdot \varepsilon_{mj} = \sum_{m=1}^{\nu} \gamma_{ic} \cdot \gamma_{rm} \cdot \gamma_{mc} \cdot \gamma_{rj} = \gamma_{ic} \cdot \gamma_{rj} \cdot \sum_{m=1}^{\nu} \gamma_{rm} \cdot \gamma_{mc} \quad (1).$$

Αλλά $\gamma_{rm} = \sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_{rk}\beta_{km} - \beta_{rk}\alpha_{km})$ και $\gamma_{mc} = \sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_{mk}\beta_{kc} - \beta_{mk}\alpha_{kc})$ και με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει $\zeta_{ij} = 0$.

7. **Έστω η μήτρα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$. Τι συνθήκες πρέπει να ισχύουν για τα α,β,γ ώστε η Α να είναι διαγωνιοποιήσιμη;**

ΛΥΣΗ:

Για να είναι η Α διαγωνιοποιήσιμη, πρέπει να υπάρχει διαγώνια μήτρα Λ και αντιστρέψιμη μήτρα S τέτοια ώστε $A = S\Lambda S^{-1}$.

Είναι φανερό ότι η μόνη χαρακτηριστική τιμή της Α είναι λ=0. Επειδή οι μήτρες Α και Λ είναι όμοιες, έχουν τις ίδιες χαρακτηριστικές τιμές. Επομένως, όλα τα διαγώνια στοιχεία της

Λ είναι μηδενικά, οπότε η Λ είναι η μηδενική μήτρα και $A = S0S^{-1} = 0$. Επομένως, για να είναι η A διαγωνιοποιήσιμη, πρέπει α=β=γ=0.

8. **Να διαγωνιοποιήσετε τη μήτρα** $A = \begin{pmatrix} -7 & -9 & 9 \\ 3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ **και να υπολογίσετε τη μήτρα** $\mathbf{A}^{\nu}$ **για κάθε φυσικό αριθμό ν>1.**

ΛΥΣΗ:

Η Α έχει χαρακτηριστικές τιμές λ1=−1 και λ2=2 (διπλή). Για $\lambda_1=-1$ έχουμε το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Για λ2=2 προκύπτουν 2 χαρακτηριστικά διανύσματα ανεξάρτητα μεταξύ τους, τα $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Επομένως, υπάρχει αντιστρέψιμη μήτρα $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ τέτοια ώστε $A = S\Lambda S^{-1}$. Συγκεκριμένα είναι:

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \text{ ή}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Επομένως, $A^{\nu} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ για κάθε ν>1.

9. **Να εξετάσετε αν κάθε μία από τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές είναι θετικά/ αρνητικά ορισμένη ή θετικά/αρνητικά ημιορισμένη**:

(α) $-x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2$

(β) $\frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2$

(γ) $-3x_1^2 - x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$

(δ) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2$

(ε) $-x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

ΛΥΣΗ:

(α) Αρνητικά ημιορισμένη

(β) Ούτε θετικά ούτε αρνητικά ημιορισμένη

(γ) Αρνητικά ορισμένη

(δ) Θετικά ορισμένη

(ε) Αρνητικά ημιορισμένη

10. **Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες οι παρακάτω τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες:**

(α) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10x_1 x_3 + 6x_2 x_3$

(β) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 6x_1 x_3 + 2x_2 x_3$

ΛΥΣΗ:

(α) Η μήτρα που αντιστοιχεί στην τετραγωνική μορφή είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Προκύπτει εύκολα ότι η τετραγωνική μορφή δεν είναι θετικά ορισμένη για καμία τιμή του λ.

(β) Η μήτρα που αντιστοιχεί στην τετραγωνική μορφή είναι $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Η τετραγωνική μορφή δεν είναι θετικά ορισμένη για καμία τιμή του λ.

11. **Για κάθε μία από τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές να βρείτε τις παραγώγους $\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \mathbf{x}^2}$ και $\frac{\partial y}{\partial \mathrm{A}}$:**

(α) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1 x_2$

(β) $-x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$

ΛΥΣΗ:

(α) Η μήτρα Α είναι $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \left(4x_1 + 2x_2, \quad 2x_1 + 4x_2, \quad 8x_3\right) \qquad , \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial \mathbf{x^2}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{και}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mathrm{A}} = 2\mathbf{xx}' - diag(\mathbf{xx}') = \begin{pmatrix} x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & x_2^2 & 2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

(β) Η μήτρα Α είναι $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. Είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \left(-2x_1 + 2x_2 + 2x_3, \quad 2x_1 - 2x_2 + 2x_3, \quad 2x_1 + 2x_2 - 10x_3\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \mathbf{x^2}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix} \text{ και } \frac{\partial y}{\partial \mathrm{A}} = 2\mathbf{xx}' - diag(\mathbf{xx}') = \begin{pmatrix} x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & x_2^2 & 2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

12.**Έστω η μήτρα** $A = \begin{pmatrix} x-2 & 6 \\ x+1 & x \end{pmatrix}$**. Να βρείτε τις παραγώγους** $\frac{\partial |A|}{\partial A}$ **και** $\frac{\partial^2 |A|}{\partial A^2}$.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\frac{\partial |A|}{\partial A} = |A| A^{-1} = \begin{pmatrix} x & -6 \\ -x-1 & x-2 \end{pmatrix} = B$ **.**

Η παράγωγος $\frac{\partial^2 |A|}{\partial A^2}$ προκύπτει αν υπολογίσετε την παράγωγο κάθε στοιχείου της μήτρας Β (πρώτης παραγώγου) ως προς κάθε στοιχείο της μήτρας Α.

13. **Έστω η μήτρα** $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ **. Να εξετάσετε αν η ακολουθία Ι,Α,Α^2,…,Α^κ,… συγκλίνει καθώς κ→+∞.**

ΛΥΣΗ:

Έστω η μήτρα $B = I - A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}5 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι η μήτρα Β έχει κυρίαρχη διαγώνιο και ότι ικανοποιεί τη συνθήκη Hawkins-Simon. Επομένως, η σειρά $\sum_{\kappa=0}^{+\infty} A^{\kappa} = I + A + A + ... + A^{\kappa} + ...$ συγκλίνει καθώς κ→+∞.

ΛΥΣΕΙΣ 8ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 8.1

1. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x,y)=10x^2+2xy-6y^2$ (β) $f(x,y)=6x^2-xy+30y^2$

(γ) $f(x,y)=e^{5x^3-2y^2}$ (δ) $f(x,y)=-3x^3+8xy^2+y^3$

(ε) $f(x,y)=\left(x^2+5y\right)\left(2x+4y^5\right)$ (στ) $f(x,y)=\dfrac{2}{3}\dfrac{x^2}{y^3}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=20x+2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x-12y$

(β) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=12x-y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x+60y$

(γ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=15x^2e^{5x^3-2y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-4ye^{5x^3-2y^2}$

(δ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-9x^2+8y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=16xy+3y^2$

(ε) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=6x^2+8xy^5+10y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=20x^2y^4+10x+120y^5$

(στ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{x}{y^3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2\dfrac{x^2}{y^4}$

2. Να βρείτε τις παραγώγους δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x,y)=5x^3-3xy+3y^2$ **(β)** $f(x,y)=e^{x+y}$ **(γ)** $f(x,y)=\ln\left(x^3y^2\right)$

(δ) $f(x,y)=e^{xy}$ **(ε)** $f(x,y)=(6x-8y)^{\frac{3}{2}}$ **(στ)** $f(x,y)=x^2-3x+4y^3+2y$

ΛΥΣΗ:

(α) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=30x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6$

(β) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{x+y}$

(γ) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\dfrac{3}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\dfrac{2}{y^2}$

(δ) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{xy}(1+xy)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$

(ε) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{27}{\sqrt{6x-8y}}$, $\quad\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{36}{\sqrt{6x-8y}}$, $\quad\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{48}{\sqrt{6x-8y}}$

(στ) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\quad\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\quad\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24y$

3. Να προσδιορίσετε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και την Εσσιανή μήτρα της συνάρτησης: $y = x_2 + \ln(x_1 x_3)$**.**

ΛΥΣΗ:

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{1}{x_1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 1$ και $\dfrac{\partial f}{\partial x_3} = \dfrac{1}{x_3}$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{x_3^2} \end{pmatrix}$$

4. Η συνάρτηση παραγωγής μίας επιχείρησης είναι $Q = AK^a L^{1-a}$ όπου K και L το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο και η εργασία αντίστοιχα και A, α σταθερές με A>0 και 0<α<1. Να δείξετε ότι το οριακό προϊόν της εργασίας είναι θετικό και ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

ΛΥΣΗ:

Το οριακό προϊόν της εργασίας είναι $\dfrac{\partial Q}{\partial L} = (1-a)A\dfrac{K^a}{L^a} > 0$ γιατί α<1.

Η παράγωγός του ως προς την εργασία είναι $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -a(1-a)A\dfrac{K^a}{L^{a+1}} < 0$, γιατί 0<α<1.

Επομένως, το οριακό προϊόν της εργασίας είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

Ασκήσεις 8.2

1. Να βρείτε τα διαφορικά πρώτης και δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(y,x) = x^3 + x^2 y - 2y^2 - 10y$ **(β)** $f(y,x) = \mathrm{e}^{xy^2} - 2x - 4y$

(γ) $f(x_1, x_2) = \log(x_1 x_2)$ **(δ)** $f(x,y,z) = x^3 y - y^3 z + z^3 x - yz^2 + xyz$

ΛΥΣΗ:

(α) $df = (3x^2 + 2xy)dx + (x^2 - 4y - 10)dy$

$d^2 f = (6x + 2y)dx^2 - 4dy^2 + 2xdxdy$

(β) $df = (y^2 e^{xy^2} - 2)dx + (2xy e^{xy^2} - 4)dy$

$$d^2 f = y^4 e^{xy^2} dx^2 + (2xy e^{xy^2} + 4x^2 y^2 e^{xy^2})dy^2 + (2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2})dxdy$$

(γ) $df = \dfrac{1}{x_1 \ln 10} dx_1 + \dfrac{1}{x_2 \ln 10} dx_2$

$$d^2 f = -\frac{1}{x_1^2 \ln 10} dx_1^2 - \frac{1}{x_2^2 \ln 10} dx_2^2$$

(δ)

$$df = (3x^2 y + z^3 + yz)dx + (x^3 - 3y^2 z - z^2 + xz)dy + (-y^3 + 3xz^2 - 2yz + xy)dz$$

$$d^2 f = 6xydx^2 - 6yzdy^2 + (6xz - 2y)dz^2 + (3x^2 + z)dxdy + (3z^2 + y)dxdz +$$

$$+ (-3y^2 - 2z + x)dydz$$

2. Να προσδιορίσετε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και την Εσσιανή μήτρα της συνάρτησης: $y = \ln\left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3\right), \left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3\right) > 0.$

ΛΥΣΗ:

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{a_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{a_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = \frac{a_3}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}.$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1^2}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} & -\dfrac{a_1 a_2}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} & -\dfrac{a_1 a_3}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} \\ -\dfrac{a_1 a_2}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} & -\dfrac{a_2^2}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} & -\dfrac{a_2 a_3}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} \\ -\dfrac{a_1 a_3}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} & -\dfrac{a_2 a_3}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} & -\dfrac{a_3^2}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2} \end{pmatrix}$$

3. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές και ποιες κοίλες.
(α) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ **(β)** $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 7x_1^2 + 4x_2$

(γ) $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_2^2 + x_1 + 3x_2 + 5$ **(δ)** $f(x_1, x_2) = \log(x_1 x_2)$

ΛΥΣΗ

(α) Αυστηρά κυρτή γιατί $H_1>0$, $H_2>0$ και $H_3>0$.

(β) Αυστηρά κοίλη γιατί $H_1<0$, $H_2>0$ και $H_3<0$.

(γ) Αυστηρά κυρτή γιατί $H_1>0$, $H_2>0$.

(δ) Αυστηρά κοίλη γιατί $H_1<0$, $H_2>0$.

4. Να αποδείξετε ότι η $f : \left\{(x, \quad y) \in \Re^2 \,\middle|\, x \geq 0, y \geq 0\right\} \to \Re$ **με τύπο** $f(x, y) = \sqrt{xy}$ **είναι κοίλη.**

ΛΥΣΗ:

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2} & \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2} \\ \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2} & -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2} \end{pmatrix}$$

Επειδή $H_1<0$ και $H_2=0$ η συνάρτηση είναι κοίλη.

5. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $y = \ln\left(x_1^a x_2^b\right), (x_1, x_2, a, b) > 0$, είναι αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη.

ΛΥΣΗ:

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = ax_1^{-1} \text{ και } \frac{\partial y}{\partial x_2} = bx_2^{-1}$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -ax_1^2 & 0 \\ 0 & -bx_2^2 \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι $H_1<0$ και $H_2>0$. Επομένως, η συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη.

Ασκήσεις 8.3

1. Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής $Y = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$ με $K = 0{,}2t + 5$, $L = 5\mathrm{e}^{0{,}1t}$ και K,L > 0. Να βρείτε την παράγωγο dY/dt και να υπολογισετε την τιμή της για t = 0.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\frac{\partial Y}{\partial K} = 10L - \frac{1}{2\sqrt{K}}$ και $\frac{\partial Y}{\partial L} = 10K - \frac{1}{2\sqrt{L}}$

Επίσης, $\frac{dK}{dt} = 0{,}2$ και $\frac{dL}{dt} = 0{,}5e^{0{,}1t}$, οπότε:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial K}\cdot\frac{dK}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial L}\cdot\frac{dL}{dt} = (10L - \frac{1}{2\sqrt{K}})\cdot 0{,}2 + (10K - \frac{1}{2\sqrt{L}})\cdot 0{,}5e^{0{,}1t} \text{ ή}$$

$$\frac{dY}{dt} = (35+t)e^{0{,}1t} - \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}2t+5}} - \frac{0{,}25e^{0{,}1t}}{\sqrt{5e^{0{,}1t}}} \text{ και}$$

$$\left.\frac{dY}{dt}\right|_{t=0} = 35 - \frac{0{,}35}{\sqrt{5}}$$

2. Έστω η συνάρτηση $z = f(x,y) = x^2 y^3$ με $x = 2t$ και $y = 3t^2$. Να βρείτε την ολική παράγωγο δεύτερης τάξης της z.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 4xy^3 + 18x^2 y^2 t$ και

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = 4y^3 \frac{dx}{dt} + 12xy^2 \frac{dy}{dt} + 36xy^2 \frac{dx}{dt} \cdot t + 36x^2 y \cdot t \cdot \frac{dy}{dt} + 18x^2 y^2$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 6048t^6$$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $y = f\left(z_1, z_2\right) = z_1^2 + 2z_2^2$, $z_1 = x_1 - x_2^2$, $z_2 = x_1 x_2$. Να υπολογίσετε τις παραγώγους $\partial y/\partial x_1$, $\partial y/\partial x_2$.

ΛΥΣΗ:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2^2) + 4x_1 x_2^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = -4(x_1 - x_2^2) \cdot x_2 + 4x_1^2 x_2$$

4. Οι μεταβλητές s και t είναι ανεξάρτητες και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} r = m(s,t) = st \\ y = h(s,t) = t + s(t-1) \\ x = g(r,s) = rs + s^2 \\ z = f(x,y) = x^2 + y(x+2) \end{cases}$$

Να βρείτε την επίπτωση που θα έχει στη z μια μεταβολή της t στο σημείο $s = t = 0$.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$ ή

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2x + y) \cdot s \cdot s + (x+2) \cdot \left(1 + s\right)$$

Για $s = t = 0$ είναι r=0, y=0, x=0 και ο ρυθμός μεταβολής είναι $\frac{\partial z}{\partial t} = 2$.

5. Οι μεταβλητές s και q είναι ανεξάρτητες και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} z = f(x,y) = xy \\ x = g(s,t) = s^2 - t \\ y = h(r,s) = sr^3 \\ t = m(r) = \dfrac{r^2}{2} \\ r = n(s,q) = \dfrac{s}{q} \end{cases}$$

Να βρείτε την επίπτωση που θα έχει στη z μια μεταβολή της s στο σημείο $s = q = 1$

ΛΥΣΗ:

Είναι $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(g_s + \dfrac{\partial x}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial t}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial s}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(h_s + \dfrac{\partial y}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial s}\right)$ ή

$$\frac{\partial z}{\partial s} = y\left(2s - 1\cdot r\cdot\frac{1}{q}\right) + x\left(r^3 + 3sr^2\cdot\frac{1}{q}\right)$$

Για $s = q = 1$ είναι r=1, y=1, x=0 και ο ρυθμός μεταβολής είναι $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 1$.

Ασκήσεις 8.4

1. Δίνεται η σχέση $F(x,y) = x^3 + x^2 y - 2y^2 - 10y + 25 = 0$. Να βρείτε την παράγωγο dy/dx και την τιμή της σημείο (x,y) = (1,2).

ΛΥΣΗ:

Είναι $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 4y - 10}$. Στο σημείο (x,y) = (1,2) είναι $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7}{17}$.

2. Δίνεται η σχέση $xyz - yz^4 + x^2 y = -2$. Να εξετάσετε αν η μεταβλητή z μπορεί να οριστεί ως συνάρτηση των x και y στην περιοχή του σημείου (0,2,1). Στην περίπτωση αυτή να βρείτε τις παραγώγους ∂z/∂x και ∂z/∂y στο σημείο αυτό.

ΛΥΣΗ:

Αν $F(x,y,z) = xyz - yz^4 + x^2 y + 2$, είναι F(0,2,1)=0 και $\dfrac{\partial F}{\partial z} = xy - 4yz^3 \neq 0$ στην περιοχή του (0,2,1). Επομένως, μπορεί η z να οριστεί ως συνάρτηση των x και y στην περιοχή του σημείου αυτού και είναι:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + 2xy}{xy - 4yz^3} = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz - z^4 + x^2}{xy - 4yz^3} = \frac{1}{8}$$

3. Δίνεται το σύστημα:

$$f_1\left(y_1, y_2, x_1, x_2\right) = 3x_1 + x_2^2 - y_1 - 3y_2^3 = 0$$

$$f_2\left(y_1, y_2, x_1, x_2\right) = x_1^3 - 2x_2 + 2y_1^3 - y_2 = 0$$

Να υπολογίσετε τις παραγώγους ∂y$_1$/∂x$_1$ και ∂y$_2$/∂x$_1$.

ΛΥΣΗ:

Είναι $|J| = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial y_1 & \partial f_1 / \partial y_2 \\ \partial f_2 / \partial y_1 & \partial f_2 / \partial y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -9y_2^2 \\ 6y_1^2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 54y_1^2 y_2^2 \neq 0$.

Προκύπτει το σύστημα

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + 9y_2^2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 3$$

$$6y_1^2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -3x_1^2$$

από το οποίο βρίσκουμε:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9y_2^2 \\ -3x_1^2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 9y_2^2 \\ 6y_1^2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3 - 27x_1^2 y_2^2}{1 + 54y_1^2 y_2^2} \text{ και } \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6y_1^2 & -3x_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 9y_2^2 \\ 6y_1^2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3x_1^2 + 18y_1^2}{1 + 54y_1^2 y_2^2}$$

4. Αν η σχέση $F(x, y, z) = 0$ εκφράζει καθεμία από τις τρεις μεταβλητές x,y,z ως συνάρτηση των δύο άλλων μεταβλητών και υπάρχουν οι σχετικές μερικές παράγωγοι, να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$.

ΛΥΣΗ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \left(-\frac{F_x}{F_z}\right)\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right) = -1$$

Ασκήσεις 8.5

1. Να βρείτε ην κλίση των παρακάτω ισοϋψών καμπυλών:

(α) $f(x, y) = x^{-2} y = 2$ **στο σημείο (1,2)**

(β) $g(x, y) = x^2 + xy = 15$ **στο σημείο (3,2)**

(γ) $h(x, y) = x^2 + 2y^2 = 9$ **στο σημείο (1,2)**

(δ) $k(x, y) = (x + 2y)^2 = 25$ **στο σημείο (1,2)**

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{(-2yx^{-3})}{x^{-2}} = \frac{2y}{x}$ οπότε στο σημείο (1,2) είναι $\frac{dy}{dx} = 4$. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται και οι υπόλοιπες παράγωγοι.

(β) $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{3}$

(γ) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$

(δ) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

2. Να προσδιορίσετε το βαθμό ομογένειας της συνάρτησης

$$y = \gamma\,[\delta x_1^{-\beta} + (1-\delta)\,x_2^{-\beta}]^{\frac{-1}{\beta}}$$

ΛΥΣΗ:

Αν $f(x_1, x_2) = \gamma\,[\delta x_1^{-\beta} + (1-\delta)\,x_2^{-\beta}]^{\frac{-1}{\beta}}$, τότε είναι $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2)$, οπότε η συνάρτηση είναι ομογενής πρώτου βαθμού.

3. Έστω η συνάρτηση παραγωγής $\mathrm{Q} = 3 \cdot \sqrt{\mathrm{K}} \cdot \sqrt{\mathrm{L}}$ όπου K είναι το κεφάλαιο και L η εργασία. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $\mathrm{K}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{K}^2} + 2\mathrm{K}\,\mathrm{L}\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{K}\partial \mathrm{L}} + \mathrm{L}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{L}^2} = 0$.

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση είναι ομογενής πρώτου βαθμού, οπότε οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι ομογενείς μηδενικού βαθμού. Με βάση το θεώρημα Euler έχουμε:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} \cdot K + \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} \cdot L = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} \cdot K + \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} \cdot L = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την 1η σχέση επί K και τη 2η επί L και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} \cdot K^2 + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} \cdot KL + \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} \cdot L^2 = 0$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $y=Ax_1^a x_2^b$, $A,a,b,x_1,x_2>0$. Να βρείτε το βαθμό ομογένειας της συνάρτησης. Για μια ισοϋψή καμπύλη (καμπύλη ίσου προϊόντος) $Ax_1^a x_2^b=y_0$ να προσδιορίσετε τον Οριακό Λόγο Τεχνικής Υποκατάστασης dx_2/dx_1 και να δείξετε ότι εξαρτάται από τον λόγο x_2/x_1 και όχι από τα απόλυτα μεγέθη των x_2/x_1.

ΛΥΣΗ:

Ο βαθμός ομογένειας της συνάρτησης είναι a+b. Ο Οριακός Λόγος Τεχνικής Υποκατάστασης είναι $\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{x_2}{x_1}$, και είναι συνάρτηση του λόγου x_2/x_1.

5. Έστω η συνάρτηση παραγωγής Q=f(K, L), όπου Q είναι το παραγόμενο προϊόν, K το κεφάλαιο και L η εργασία. Αν η συνάρτηση είναι ομογενής 1ου βαθμού, να δείξετε ότι το οριακό προϊόν του κεφαλαίου και το οριακό προϊόν της εργασίας μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις του λόγου $\frac{K}{L}$. Πώς θα μεταβληθούν τα δύο αυτά οριακά μεγέθη αν τόσο το κεφάλαιο όσο και η εργασία αυξηθούν κατά 50%;

ΛΥΣΗ:

Οι οριακές συναρτήσεις είναι ομογενείς μηδενικού βαθμού, οπότε μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις του λόγου K/L. Αν τόσο κεφάλαιο όσο και η εργασία αυξηθούν κατά 50%, ο λόγος K/L και κατά συνέπεια τα οριακά μεγέθη θα παραμείνουν αμετάβλητα.

Ασκήσεις 8.6

1. Βρείτε τα σημεία στασιμότητας των παρακάτω συναρτήσεων και προσδιορίστε τον τύπο τους:

(α) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1-4x_1x_2-x_2^2+5x_3^2-x_2x_3$

(β) $f(x_1,x_2,x_3)=10x_1^2+15x_2^2+5x_3^2-60x_1+90x_2-40x_3+15{,}000$

(γ) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_1x_2+4x_2^2+x_1x_3+x_3^2+2$

(δ) $f(x,y)=2x^2+y^2+80x+40y+10$

(ε) $f(x,y)=2x^2+xy-9x-2y^2$

ΛΥΣΗ:

(α) Το σημείο $\left(-\frac{21}{160},\frac{1}{4},\frac{1}{40}\right)$ είναι σαγματικό σημείο.

(β) Το σημείο $(3,-3,4)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

(γ) Το σημείο $(0,0,0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

(δ) Το σημείο $(-20,-20)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

(ε) Το σημείο $\left(\frac{36}{17},\frac{9}{17}\right)$ είναι σαγματικό σημείο.

2. Να προσδιορίσετε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα σημεία των ακόλουθων συναρτήσεων. Επίσης, να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης στα σημεία αυτά.

(α) $y = 60x_1 + 34x_2 + 4x_1x_2 - 6x_1^2 - 3x_2^2 + 5$

(β) $y = 5x_1^2 + 30x_1 = 4x_1x_2 - 3x_2^2 - 7x_2$

(γ) $y = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 4x_1 - 7x_2 + 12$

ΛΥΣΗ:

(α) Το σημείο $\left(\frac{62}{7},\frac{81}{7}\right)$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

(β) Το σημείο $\left(-\frac{52}{19},\frac{25}{38}\right)$ είναι σαγματικό σημείο.

(γ) Το σημείο (1,2) είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

3. Να προσδιορίσετε τα σημεία στασιμότητας (μεγίστου , ελαχίστου ή σαγματικού σημείου) της συνάρτησης $f\left(x,y\right) = -x^3 + xy + y^2 + x$.

ΛΥΣΗ:

Σημεία στασιμότητας είναι τα σημεία $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ και $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$. Το σημείο $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου ενώ το $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ είναι σαγματικό σημείο.

4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $y = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_2 + 1$, έχει ελάχιστο στο σημείο (0,1).

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση έχει έχει ελάχιστο στο σημείο (0,1) γιατί στο σημείο αυτό είναι $\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{x_2} = 0$ και η Εσσιανή μήτρα είναι $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, για την οποία είναι $H_1>0$ και $H_2>0$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $y = f\left(x,y\right)$, $z = \mathrm{e}^{f(x,y)}$. Αν $\left(x_1,y_1\right)$, $\left(x_2,y_2\right)$ είναι τα σημεία μεγίστου για την *f* και *g* αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\left(x_1,y_1\right) = \left(x_2,y_2\right)$.

ΛΥΣΗ:

Έστω $\mathbf{u}_1 = \left(x_1,y_1\right)$ σημείο μεγίστου της f. Τότε υπάρχει σφαίρα Β($\mathbf{u}_1$,ε) τέτοια ώστε για κάθε $(x,y) \in T = B(\mathbf{u}_1,\varepsilon) \cap \Re^2$ να είναι $f(x,y) \le f(x_1,y_1)$. Τότε είναι και $e^{f(x,y)} \le e^{f(x_1,y_1)}$ για κάθε x∈T, οπότε το $\left(x_1,y_1\right)$ είναι σημείο μεγίστου και της g.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι αν το $\left(x_2, y_2\right)$ είναι σημείο μεγίστου της g, τότε είναι μέγιστο και της f.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8

1. Να βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = \dfrac{3x - y^2}{x^2 + 1}$ **(β)** $f(x, y) = \dfrac{3y^2}{x^2 - 5y}$ **(γ)** $f(x, y) = (8x - 3y)^4$

(δ) $f(x, y) = \sqrt[4]{4x^3 + 2y^2}$ **(ε)** $f(x, y) = \ln\left(x^2 - 4xy + y^2\right)$ **(στ)** $f(x, y) = e^{xy^2}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-3x^2 + 2xy^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x^2 + 1}$

(β) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{6xy^2}{(x^2 - 5y)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{6x^2 y - 15y^2}{(x^2 - 5y)^2}$

(γ) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 32(8x - 3y)^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -12(8x - 3y)^3$

(δ) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3x^2}{\sqrt[4]{\left(4x^3 + 2y^2\right)^3}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt[4]{\left(4x^3 + 2y^2\right)^3}}$

(ε) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x - 4y}{x^2 - 4xy + y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-4x + 2y}{x^2 - 4xy + y^2}$

(στ) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy \cdot e^{xy^2}$

2. Να βρείτε τις παραγώγους δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = e^y \ln x$ **(β)** $f(x, y) = (y - x)^4$ **(γ)** $f(x, y) = x^2 y^5$

(δ) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ **(ε)** $f(x, y) = \ln\left(3xy^3\right)$ **(στ)** $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{e^y}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \ln x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{e^y}{x}$

(β) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12(y - x)^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12(y - x)^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12(y - x)^2$

(γ) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^5$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20x^2y^3$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 10xy^4$

(δ) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{4}(x+y)^{-3/2}$

(ε) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\dfrac{3}{y^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

(στ) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{6y}{x^4}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{2}{x^3}$

3. Να προσδιορίσετε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και την Εσσιανή μήτρα της συνάρτησης: $y = Ax_1^a x_2^\beta$, όπου Α,α,β σταθερές. Επισης, να εξετάσετε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η παραπάνω συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη.

ΛΥΣΗ:

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = aAx_1^{a-1}x_2^\beta \text{ και } \frac{\partial y}{\partial x_2} = \beta Ax_1^a x_2^{\beta-1}$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a(a-1)Ax_1^{a-2}x_2^\beta & a\beta Ax_1^{a-1}x_2^{\beta-1} \\ a\beta Ax_1^{a-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)Ax_1^a x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση είναι αυστηρά κοίλη όταν:

$$a(\alpha-1)Ax_1^{a-2}x_2^\beta < 0 \text{ και } a\beta(1-\alpha-\beta)x_1^{2(a-1)}x_2^{2(\beta-1)} > 0$$

4. Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα ή κοιλότητα τη συνάρτηση $y = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, $(a,b,c) > 0$.

ΛΥΣΗ:

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2ax_1, \; \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2bx_2 \text{ και } \frac{\partial y}{\partial x_3} = 2cx_3$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}$$

Επειδή H_1=2α>0, H_2=4αb>0 και H_3=8αbc>0, η συνάρτηση είναι αυστηρά κυρτή.

5. Οι μεταβλητές q και s είναι ανεξάρτητες και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} z = f(x,y) = xy \\ x = g(s,t) = s^2 - t \\ y = h(r,s) = sr^3 \\ t = m(r) = \dfrac{r^2}{2} \\ r = n(s,q) = \dfrac{s}{q} \end{cases}$$

Να βρείτε την επίπτωση που θα έχει στη z μια μεταβολή της q στο σημείο s=2 και q=1.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\dfrac{\partial z}{\partial q} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial t}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial q} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial q}$ ή

$$\frac{\partial z}{\partial q} = y \cdot (-1) \cdot r \cdot \left(-\frac{s}{q^2}\right) + x \cdot 3sr^2 \cdot \left(-\frac{s}{q^2}\right)$$

Για s=2 και q=1 είναι r=2, y=16, t=2, x=2 και ο ρυθμός μεταβολής είναι $\dfrac{\partial z}{\partial q} = -32$.

6. Έστω η συνάρτηση $y = z_1^2 z_2^2 + x$ με $z_1 = \gamma x$ και $z_2 = \delta x^a$, όπου α, γ και δ είναι σταθερές. Να υπολογίσετε την παράγωγο dy/dx.

ΛΥΣΗ:

Είναι

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{\partial y}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial z_2} \cdot \frac{dz_2}{dx} = 2z_1 z_2^2 \cdot \gamma + 2z_1^2 z_2 \cdot a\delta x^{a-1} = 1 + 2\gamma^2\delta^2(1+a)x^{2a+1}$$

7. Δίνεται η σχέση $F(x,y) = \mathrm{e}^{x\,y^2} - 2x - 4y = 0$. Να υπολογίσετε την παράγωγο dy/dx και την τιμή της στο σημείο (x,y) = (0,1/4).

ΛΥΣΗ:

Το σημείο (0, 1/4) ικανοποιεί τη σχέση. Είναι:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^{xy^2} \cdot y^2 - 2}{e^{xy^2} \cdot 2xy - 4}.$$

Για x=0 και y=1/4 είναι $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{31}{64}$

8. Δίνεται η σχέση $xy^3z - yz^4 + x^2y^2 = 0$. Να εξετάσετε αν η μεταβλητή x μπορεί να οριστεί ως συνάρτηση των y και z στην περιοχή του σημείου x=0, y=1 και z=1. Στην περίπτωση αυτή να βρείτε τις παραγώγους ∂x/∂y και ∂x/∂z στο σημείο αυτό.

ΛΥΣΗ:

Έστω $F(x,y,z) = xy^3z - yz^4 + x^2y^2$.Τότε: $F_x = y^3z + 2xy^2$,

$F_y = 3xy^2z - z^4 + 2x^2y$ και $F_z = xy^3 - 4yz^3$.

Για x=0, y=1 και z=1 είναι $F_x = 1$, οπότε μπορεί η x να εκφραστεί ως συνάρτηση των y και z στην περιοχή του σημείου αυτού. Οι παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{(-1)}{1} = 1 \text{ και } \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_x} = -\frac{(-4)}{1} = 4$$

9. Δίνεται το σύστημα:

$F_1(y_1, y_2, x_1, x_2) = y_1y_2 + 2x_1x_2 = 0$

$F_2(y_1, y_2, x_1, x_2) = y_1^2 + y_2^2 - x_1x_2 = 0$

Να υπολογίσετε τις παραγώγους $\partial y_1/\partial x_1$ $\partial y_2/\partial x_1$ $\partial y_1/\partial x_2$ $\partial y_2/\partial x_2$.

ΛΥΣΗ:

Η Ιακωβιανή μήτρα των y είναι:

$$|J| = \begin{vmatrix} \partial F_1/\partial y_1 & \partial F_1/\partial y_2 \\ \partial F_2/\partial y_1 & \partial F_2/\partial y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{vmatrix} = 2\left(y_2^2 - y_1^2\right) \neq 0 \text{ για } y_2 \neq y_1 \text{ και } y_2 \neq -y_1.$$

Για τις παραγώγους ως προς x_1 προκύπτει το σύστημα:

$$y_2\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -2x_2 \text{ και}$$

$$2y_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + 2y_2\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -x_2$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} -2x_2 & y_1 \\ -x_2 & 2y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{vmatrix}} = \frac{-4x_2y_2 + x_2y_1}{2\left(y_2^2 - y_1^2\right)} \text{ και } \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} y_2 & -2x_2 \\ 2y_1 & -x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y_2x_2 + 4x_2y_1}{2\left(y_2^2 - y_1^2\right)}$$

Παρόμοια, για τις παραγώγους ως προς x_1 προκύπτει το σύστημα:

$$y_2\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + y_1\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -2x_1 \text{ και}$$

$$2y_1\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + 2y_2\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -x_1$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2}=\frac{\begin{vmatrix}-2x_1 & y_1\\ -x_1 & 2y_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_2 & y_1\\ 2y_1 & 2y_2\end{vmatrix}}=\frac{-4x_1y_2+x_1y_1}{2\left(y_2^2-y_1^2\right)} \text{ και } \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=\frac{\begin{vmatrix}y_2 & -2x_1\\ 2y_1 & -x_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_2 & y_1\\ 2y_1 & 2y_2\end{vmatrix}}=\frac{-y_2x_1+4x_1y_1}{2\left(y_2^2-y_1^2\right)}$$

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x,y)=\frac{2x^p+3xy}{x^{3/2}y^{1/2}}$$

(α) Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου *p* ώστε η συνάρτηση να είναι ομογενής βαθμού 0.

(β) Η παραγωγή *Q* ενός εργοστασίου εξαρτάται από τους συντελεστές παραγωγής A και B σύμφωνα με τη σχέση *Q=f(A,B)*. Αν οι συντελεστές παραγωγής αυξηθούν κατά 30%, ποια θα είναι η επίπτωση στην παραγωγή *Q*;

(γ) Δείξτε ότι οι ελαστικότητες η_A και η_B της παραγωγής *Q* ως προς τους συντελεστές παραγωγής A και B ικανοποιούν τη σχέση $\eta_A=-\eta_B$.

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{2\lambda^p x^p+3\lambda^2 xy}{\lambda^2 x^{3/2}y^{1/2}}$, επομένως η συνάρτηση για p=2 είναι ομογενής βαθμού 0.

(β) Εφόσον η συνάρτηση f είναι ομογενής βαθμού 0, είναι $f(1{,}3A,1{,}3B)=(1{,}3)^0 f(A,B)=f(A,B)$ οπότε αύξηση των συντελεστών κατά 30% δεν επηρεάζει το παραγόμενο προϊόν.

(γ) Με βάση το θεώρημα Euler είναι:

$$\frac{\partial Q}{\partial A}\cdot A+\frac{\partial Q}{\partial B}\cdot B=0 \text{ ή } \frac{\partial Q}{\partial A}\cdot\frac{A}{Q}+\frac{\partial Q}{\partial B}\cdot\frac{B}{Q}=0 \text{ ή } \eta_A=-\eta_B.$$

11. Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x_1,x_2,...,x_n)$ και $g(x_1,x_2,...,x_n)$ είναι ομογενείς βαθμού r και s αντίστοιχα (r>0 και s>0). Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομογενείς και, αν είναι, να βρείτε το βαθμό ομογένειάς τους.

(α) $v_1=f(x_1^m,x_2^m,...,x_n^m)$ **για m>0**

(β) $v_2=[g(x_1,x_2,...x_n)]^p$ **για p>0**

(γ) $v_3=f(x_1,x_2,...,x_n)+g(x_1,x_2,...,x_n)$

ΛΥΣΗ:

(α)

$$v_1(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)=f(\lambda^m x_1^m,\lambda^m x_2^m,...,\lambda^m x_n^m)=\lambda^{m\cdot r}f(x_1^m,x_2^m,...,x_n^m)=\lambda^{m\cdot r}v_1(x_1,x_2,...,x_n)$$

Δηλαδή η συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού m·r.

(β) Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού p·s.

(γ) Αν r=s, η συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού r.

12. Έστω η συνάρτηση παραγωγής Q=f(K, L), όπου Q είναι το παραγόμενο προϊόν, K το κεφάλαιο και L η εργασία. Αν η συνάρτηση είναι ομογενής 3ου βαθμού, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $K^2 \dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2} + 2K\,L \dfrac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} + L^2 \dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = 6Q$.

ΛΥΣΗ:

Με βάση το θεώρημα Euler είναι:

$$\frac{\partial Q}{\partial K}\cdot K + \frac{\partial Q}{\partial L}\cdot L = 3Q$$

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι ομογενείς 2ου βαθμού, οπότε

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}\cdot K + \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L}\cdot L = 2\frac{\partial Q}{\partial K}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K}\cdot K + \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}\cdot L = 2\frac{\partial Q}{\partial L}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 1η σχέση επί K και τη 2η επί L και προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}\cdot K^2 + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L}\cdot KL + \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}\cdot L^2 = 2\left(\frac{\partial Q}{\partial K}\cdot K + \frac{\partial Q}{\partial L}\cdot L\right) = 6Q$$

13. Βρείτε τα σημεία στασιμότητας των παρακάτω συναρτήσεων και προσδιορίστε τον τύπο τους

(α) $f(x_1, x_2, x_3) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

(β) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_2^2 + 4x_1^2 + 2x_2 + 5x_3^2 + 3{,}5x_4^2 - 24x_1 + 20x_3 - 75$

(γ) $f(x, y) = xy - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$

(δ) $f(x, y) = 6x^2 + 30x + y^2 - 6y$

(ε) $f(x, y) = xy + 4\ln x + 2y^2 - 10, \quad x > 0$

ΛΥΣΗ:

(α) Σημείο στασιμότητας είναι το σημείο $x_1=x_2=x_3=0$, το οποίο είναι τοπικό μέγιστο.

(β) Σημείο στασιμότητας είναι το σημείο $x_1=3$, $x_2=-1/8$, $x_3=-2$, $x_4=0$, το οποίο είναι τοπικό ελάχιστο.

(γ) Σημείο στασιμότητας είναι το σημείο $x=y=-1$, το οποίο είναι τοπικό ελάχιστο.

(δ) Σημείο στασιμότητας είναι το σημείο $x=-5/2$ και $y=3$, το οποίο είναι τοπικό ελάχιστο.

(ε) Σημείο στασιμότητας είναι το σημείο $x=4$ και $y=-1$, που είναι σαγματικό σημείο.

14. Να προσδιορίσετε τα σημεία στα οποία μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται οι ακόλουθες συναρτήσεις.

(α) $\mathbf{y = 3x_1^3 + 3x_2^3 - 9x_1x_2}$

(β) $\mathbf{y = 4x_1^3 + 6x_1x_2 - x_1^2 + 3x_2^2 + 12}$

ΛΥΣΗ:

(α) Σημεία στασιμότητας είναι τα σημεία $x_1=x_2=0$ και $x_1=x_2=1$. Το πρώτο είναι σαγματικό σημείο ενώ το δεύτερο είναι τοπικό ελάχιστο.

(β) Σημεία στασιμότητας είναι τα σημεία $x_1=x_2=0$ και $x_1=2/3$, $x_2=-2/3$. Το πρώτο είναι σαγματικό σημείο ενώ το δεύτερο είναι τοπικό ελάχιστο.

15. Εστω $g(x,y) = F(f(x,y))$. Οι συναρτήσεις F και f είναι συνεχώς παραγωγίσιμες και $F' > 0$. Να αποδείξετε ότι αν το σημείο (x_o,y_o) είναι σημείο στασιμότητας (μέγιστο ή ελάχιστο) για την *g*, τότε είναι και σημείο στασιμότητας για την *f*.

ΛΥΣΗ:

Αν το σημείο (x_o,y_o) είναι σημείο στασιμότητας για την g τότε $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ και $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ στο σημείο αυτό. Με εφαρμογή του αλυσωτού κανόνα είναι :

$\frac{\partial g}{\partial x} = F' \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$, οπότε $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι και $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ στο σημείο αυτό.

ΛΥΣΕΙΣ 9^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 9

1. Να προσδιορίσετε τις μερικές ελαστικότητες ζήτησης (ως προς την τιμή, σταυροειδής και εισοδηματικές) για τις συναρτήσεις

(α) $Q_1 = 100 - P_1 + 0,75P_2 – 0,25P_3 + 0,0075Y$ όταν $P_1 = 10, P_2 = 20, P_3 = 40$

$Y = 10000, Q_1 = 140$

(β) $Q_1 = 50 - 4P_1 - 3P_2 + 2P_3 + 0,001Y$ όταν $P_1 = 5, P_2 = 7, P_3 = 3$

$Y = 11000, Q_1 = 26$

Πώς χαρακτηρίζονται τα δύο αυτά προϊόντα με βάση τις παραπάνω ελαστικότητες ζήτησης;

ΛΥΣΗ:

(α) $\eta_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{Q_1} = -1 \cdot \frac{10}{140} = -0{,}071$

$\eta_{12} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{Q_1} = 0{,}75 \cdot \frac{20}{140} = 0{,}1071$ υποκατάστατο

$\eta_{13} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_3} \cdot \frac{P_3}{Q_1} = -0{,}25 \cdot \frac{40}{140} = -0{,}071$ συμπληρωματικό

$\eta_M = \frac{\partial Q_1}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{Q_1} = 0{,}0075 \cdot \frac{10000}{140} = 0{,}5357$ ανώτερο αγαθό

(β) $\eta_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{Q_1} = -4 \cdot \frac{5}{26} = -0{,}7692$

$\eta_{12} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{Q_1} = -3 \cdot \frac{7}{26} = -0{,}8077$ συμπληρωματικό

$\eta_{13} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_3} \cdot \frac{P_3}{Q_1} = 2 \cdot \frac{3}{26} = 0{,}2308$ υποκατάστατο

$\eta_M = \frac{\partial Q_1}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{Q_1} = 0{,}001 \cdot \frac{11000}{26} = 0{,}4231$ ανώτερο αγαθό

2. Οι συναρτήσεις ζήτησης, προσφοράς και η συνθήκη ισορροπίας για ένα προϊόν είναι:

$Q_D = D(P, Y_0, P_1^0, P_2^0)$, $\partial D/\partial P<0$, $\partial D/\partial Y_0>0$, $\partial D/\partial P_1^0 >0$, $\partial D/\partial P_2^0 <0$

$Q_S = S(P, W_0, T_0)$, $\partial S/\partial P>0$, $\partial S/\partial W_0<0$, $\partial S/\partial T_0>0$

$Q_D = Qs = Qe$

όπου P τιμή προϊόντος, Y_0 εισόδημα, P_1^0 η τιμή του αγαθού 1, P_2^0 η τιμή του αγαθού 2, W_0 το κόστος της εισροής και T_0 ο δείκτης κλιματολογικών συνθηκών. Να προσδιορίσετε την επίπτωση στην τιμή και ποσότητα ισορροπίας Pe, Qe, από μεταβολή κάθε μίας από τις εξωγενείς μεταβλητές Y_0, P_1^0, P_2^0, W_0, T_0.

ΛΥΣΗ:

Στο σημείο ισορροπίας είναι

$D[P(Y_0, W_0, P_1^0, P_2^0, T_0), Y_0, P_1^0, P_2^0] - Q(Y_0, W_0, P_1^0, P_2^0, T_0)=0$ και

$S[P(Y_0, W_0, P_1^0, P_2^0, T_0), W_0, T_0] - Q(Y_0, W_0, P_1^0, P_2^0, T_0)=0$

Παραγωγίζοντας ως προς Y_0, P_1^0, P_2^0, W_0, T_0, με όλες τις μερικές παραγώγους υπολογισμένες στο σημείο ισορροπίας P^e,Q^e έχουμε:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y_0}\right)^e = \frac{\partial D/\partial Y_0}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0 \quad \text{για} \quad \partial D/\partial Y_0 > 0$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial Y_0}\right)^e = \frac{(\partial S/\partial P)(\partial D/\partial Y_0)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0$$

Επίσης,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial W_0}\right)^e = \frac{-\partial S/\partial W_0}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0 \quad \text{για} \quad \partial S/\partial W_0 < 0$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial W_0}\right)^e = \frac{-(\partial D/\partial P)(\partial S/\partial W_0)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} < 0$$

Επομένως, αύξηση του εισοδήματος αυξάνει την τιμή και την ποσότητα ισορροπίας ενώ αύξηση της τιμής της εισροής αυξάνει την τιμή αλλά μειώνει την ποσότητα ισορροπίας.

Ο ρυθμός μεταβολής ως προς τις εξωγενείς μεταβλητές P_1^0, P_2^0 είναι:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial P_1^0}\right)^e = \frac{\partial D/\partial P_1^0}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial P_1^0}\right)^e = \frac{(\partial S/\partial P)(\partial D/\partial P_1^0)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial P_2^0}\right)^e = \frac{\partial D/\partial P_2^0}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} < 0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial P_2^0}\right)^e = \frac{(\partial S/\partial P)(\partial D/\partial P_1^0)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} < 0$$

Τέλος, ο ρυθμός μεταβολής ως προς T_0 είναι:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T_0}\right)^e = \frac{-\partial S/\partial T_0}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} < 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial T_0}\right)^e = -\frac{(\partial D/\partial P)(\partial S/\partial W_0)}{\partial S/\partial P - \partial D/\partial P} > 0$$

3. Να προσδιορίσετε τις ίδιες επιπτώσεις όταν οι συναρτήσεις εξειδικεύονται ως:

$Q_D = \alpha - \beta P + \gamma Y_0 + \delta P_1^0 - \varepsilon P_2^0$ α, β, γ, δ, ε > 0

$Q_S = -\alpha' + \beta' P + J W_0 + \eta$ T0 α΄, β΄, J, η > 0

ΛΥΣΗ:

Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης είναι:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y_0}\right)^e = \frac{\gamma}{\beta' + \beta}, \left(\frac{\partial Q}{\partial Y_0}\right)^e = \frac{\beta'\gamma}{\beta' + \beta}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial W_0}\right)^e = -\frac{J}{\beta' + \beta}, \left(\frac{\partial Q}{\partial W_0}\right)^e = \frac{\beta J}{\beta' + \beta}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial P_1^0}\right)^e = \frac{\delta}{\beta' + \beta}, \left(\frac{\partial Q}{\partial P_1^0}\right)^e = \frac{\beta'\delta}{\beta' + \beta}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial P_2^0}\right)^e = -\frac{\varepsilon}{\beta' + \beta}, \left(\frac{\partial Q}{\partial P_2^0}\right)^e = -\frac{\beta'\varepsilon}{\beta' + \beta}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mathrm{T}_0}\right)^e = -\frac{\eta}{\beta' + \beta}, \left(\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{T}_0}\right)^e = \frac{\eta\beta}{\beta' + \beta}$$

4. Η συνάρτηση κέρδους μιας επιχείρησης ορίζεται ως $\pi(x,y) = pf(x,y) - wx - ry$, όπου f(x,y) είναι μια συνάρτηση παραγωγής, (x,y) είναι εισροές, w,r είναι οι τιμές των εισροών και p είναι η τιμή του προϊόντος. Να προσδιορίσετε και να ερμηνεύσετε τις συνθήκες πρώτης τάξης για μεγιστοποίηση του κέρδους. Επίσης, να δείξετε ότι οι συνθήκες δεύτερης τάξης ικανοποιούνται όταν η συνάρτηση παραγωγής είναι αυστηρά κοίλη.

ΛΥΣΗ:

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = p \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - w = 0 \text{ ή } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{w}{p} \text{ και}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = p \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - r = 0 \text{ ή } \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{r}{p}$$

Στα σημεία αυτά το οριακό προϊόν κάθε εισροής είναι ίσο με το λόγο της τιμής της εισροής προς την τιμή του προϊόντος.

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} pf_{xx} & pf_{xy} \\ pf_{xy} & pf_{yy} \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = pH'(\mathbf{x})$$

Το κέρδος μεγιστοποιείται όταν η μήτρα $H'(\mathbf{x})$ είναι αρνητικά ορισμένη, δηλαδή όταν η συνάρτηση παραγωγής είναι αυστηρά κοίλη.

5. Το παρακάτω σύστημα πεπλεγμένων συναρτήσεων προκύπτει κατά την λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης κέρδους μιας επιχείρησης:

$pf_1(x_1,x_2) - w_1 = 0$

$pf_2(x_1,x_2) - w_2 = 0$

όπου p,w_1,w_2 >0 είναι οι τιμές προϊόντος και συντελεστών παραγωγής, f(x_1,x_2) είναι μια αυστηρά κοίλη συνάρτηση παραγωγής με $f_1=\partial f/\partial x_1$, $f_2=\partial f/\partial x_2$, $f_{11},f_{22}<0$, $f_{12}>0$. Θεωρώντας τις x_1,x_2 ως ενδογενείς μεταβλητές και τις p,w_1,w_2 ως εξωγενείς να προσδιορίσετε τα πρόσημα των παραγώγων $\partial x_1/\partial w_1$, $\partial x_2/\partial w_2$.

ΛΥΣΗ:

Παραγωγίζοντας τις δύο σχέσεις ως προς w_1 και w_2 έχουμε:

$$p\left(f_{11}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial w_1} + f_{12}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial w_1} \right) - 1 = 0$$

$$p\left(f_{11}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial w_2} + f_{12}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial w_2} \right) = 0$$

$$p\left(f_{12}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial w_1} + f_{22}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial w_1} \right) = 0$$

$$p\left(f_{12}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial w_2} + f_{22}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial w_2} \right) - 1 = 0$$

Από την τρίτη σχέση έχουμε $\frac{\partial x_2}{\partial w_1} = -\frac{f_{12}}{f_{22}}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial w_1}$. Με αντικατάσταση στην πρώτη σχέση έχουμε:

$\frac{\partial x_1}{\partial w_1} = \frac{1}{p}\cdot\frac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} < 0$, οπότε $\frac{\partial x_2}{\partial w_1} = -\frac{1}{p}\cdot\frac{f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} < 0$.

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει:

$\frac{\partial x_1}{\partial w_2} = -\frac{1}{p}\cdot\frac{f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} = \frac{\partial x_2}{\partial w_1} < 0$ και $\frac{\partial x_2}{\partial w_2} = \frac{1}{p}\cdot\frac{f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} < 0$

6. Η συνάρτηση κέρδους μίας επιχείρησης είναι

$\pi = pAL^{\alpha}K^{\beta} - wL - rK$

όπου $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$ είναι η συνάρτηση παραγωγής της επιχείρησης. Οι τιμές του προϊόντος p και των εκροών w και r είναι δεδομένες παράμετροι.

(α) Να προσδιορίσετε τις συνθήκες πρώτης τάξης για την επιλογή των L* και K* που μεγιστοποιούν το κέρδος της επιχείρησης

(β) Κάτω από ποιες προϋποθέσεις σχετικά με τις τιμές που μπορούν να πάρουν τα α, β ικανοποιούνται οι συνθήκες δεύτερης τάξης;

(γ) Τι διασφαλίζει την ύπαρξη λύσης στο σύστημα των εξισώσεων που προσδιορίζονται από τις συνθήκες πρώτης τάξης για τα L, K;

(δ) Πώς θα μπορούσατε να εξετάσετε τις επιπτώσεις στις άριστες ποσότητες $Q^* = A(L^*)^{\alpha}(K^*)^{\beta}$, L* και K* από μεταβολές των παραμέτρων p, w, r.

ΛΥΣΗ:

(α) Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \text{ και } \frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \text{ ή}$$

$$pA\beta L^{a} K^{\beta-1} = r \text{ και } pAaL^{a-1} K^{\beta} = w$$

(β) Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = \beta(\beta-1) pAL^{a} K^{\beta-2}, \ \frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = a(a-1) pAL^{a-2} K^{2} \text{ και } \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} = a\beta pAL^{a-1} K^{\beta-1}.$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H = \begin{pmatrix} \beta(\beta-1) pAL^{a} K^{\beta-2} & \alpha\beta pAL^{a-1} K^{\beta-1} \\ \alpha\beta pAL^{a-1} K^{\beta-1} & \alpha(\alpha-1) pAL^{a-2} K^{\beta} \end{pmatrix}$$

Για να έχουμε μέγιστο πρέπει να είναι 0<α<1, 0<β<1 και α+β<1.

(γ) Το σύστημα έχει λύση όταν α≠0 και β≠0.

(δ) Για να εξετάσουμε τις επιπτώσεις από μεταβολές των παραμέτρων p, w, r πρέπει να εκφράσουμε το κεφάλαιο και την εργασία ως συναρτήσεις των παραμέτρων αυτών και να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες ολικές παραγώγους.

7. Ένα προϊόν (Y) παράγεται με την χρήση κεφαλαίου (K) και εργασίας (L), σύμφωνα με την σχέση $Y = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{2}}$. Ποιος είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος Y=3 όταν χρησιμοποιούνται K=1 και L=9 μονάδες από τον κάθε συντελεστή αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ:

Ο οριακός λόγος υποκατάστασης είναι $\frac{dK}{dL} = -\frac{\partial Y / \partial L}{\partial Y / \partial K} = -\frac{\frac{1}{2} K^{1/4} L^{-1/2}}{\frac{1}{4} K^{-3/4} L^{1/2}} = -\frac{2}{9}$.

8. Μία επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης

$Q_1 = 14 - 0{,}25\ P_1$

$Q_2 = 24 - 0{,}5\ P_2$

Η συνάρτηση κόστους της επιχείρησης είναι

TC = $Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2$

Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης και να υπολογίσετε τα επίπεδα παραγωγής Q_1, Q_2 στα οποία μεγιστοποιείται το κέρδος της επιχείρησης καθώς και οι τιμές στις οποίες θα πωλούνται τα δύο προϊόντα. Επίσης, να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι συνθήκες δεύτερης τάξης.

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση κέρδους είναι $\pi = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - Q_1^2 - 5Q_1 Q_2 - Q_2^2$.

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = \frac{\partial P_1}{\partial Q_1} \cdot Q_1 + P_1 - 2Q_1 - 5Q_2 = 0 \text{ και } \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = \frac{\partial P_2}{\partial Q_2} \cdot Q_2 + P_2 - 5Q_1 - 2Q_2 = 0 \text{ ή}$$

$6Q_1 + 5Q_2 = P_1$ και

$5Q_1 + 4Q_2 = P_2$

Από τις συναρτήσεις ζήτησης είναι: $P_1 = 56 - 4Q_1$ και $P_2 = 48 - 2Q_2$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$10Q_1 + 5Q_2 = 56$ και

$5Q_1 + 6Q_2 = 48$

Οπότε $Q_1 = \frac{96}{35}$ και $Q_2 = \frac{40}{7}$

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -10, \ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -6 \text{ και } \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -5$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι αρνητικά ορισμένη, οπότε έχουμε μέγιστο.

8. Μια επιχείρηση παράγει 2 προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης

$$p_1 = a_1 - \frac{1}{2} b_1 q_1 - \frac{1}{2} d q_2$$
$$p_2 = a_2 - \frac{1}{2} b_2 q_2 - \frac{1}{2} d q_1$$

και συνάρτηση κόστους $c = vq_1q_2$, $(a_1, a_2, b_1, b_2, d, v) > 0$. Να προσδιορίσετε τις ποσότητες στις οποίες μεγιστοποιείται το κέρδος της επιχείρησης. Επίσης, να θέσετε συνθήκες στις τιμές των παραμέτρων ώστε: (ι) να ικανοποιούνται οι συνθήκες δεύτερης τάξης και (ιι) να παράγονται στο μέγιστο θετικές ποσότητες και από τα δύο προϊόντα.

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$\pi = p_1 q_1 + p_2 q_2 - v q_1 q_2$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} \cdot q_1 + p_1 + \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \cdot q_2 - v q_2 = 0 \text{ και}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = \frac{\partial p_1}{\partial q_2} \cdot q_1 + \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \cdot q_2 + p_2 - v q_1 = 0 \text{ ή}$$

$b_1 q_1 + (v + d) q_2 = a_1$ και

$(v+d)q_1 + b_2 q_2 = a_2$

Οι λύσεις του συστήματος είναι $q_1 = \dfrac{a_1 b_2 - a_2(d+v)}{D}$ και $q_2 = \dfrac{a_2 b_1 - a_1(d+v)}{D}$, όπου $D = b_1 b_2 - (d+v)^2 \neq 0$.

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H = \begin{pmatrix} -b_1 & -(d+v) \\ -(d+v) & -b_2 \end{pmatrix}$$

Οι συνθήκες για ΄μέγιστο είναι: $H_1 = -b_1 < 0$ ή $b_1>0$ και $H_2 = b_1 b_2 - (d+v)^2 = D > 0$. Για να είναι οι ποσότητες παραγωγής θετικές πρέπει $a_1 b_2 > a_2(d+v)$ και $a_2 b_1 > a_1(d+v)$.

10. Μια εταιρεία παράγει 3 τύπους υπολογιστών με ανταγωνιστική θέση στην αγορά. Η ζήτηση για τον κάθε ένα είναι:

$$\begin{cases} q_1 = 4000 - 2p_1 + p_2 + p_3 \\ q_2 = 6000 + p_1 - 3p_2 + p_3 \\ q_3 = 5000 + p_1 + p_2 - 2p_3 \end{cases}$$

όπου q_i είναι η εκτιμημένη συνάρτηση ζήτησης (όπου μετράει συνολικές μονάδες ανά έτος) για τον υπολογιστή i και p_i είναι η τιμή πώλησης του υπολογιστή i (σε δολάρια).
(α) Να προσδιορίσετε τις τιμές για τους τρεις υπολογιστές ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά έσοδα. Επιβεβαιώστε ότι για αυτές τις τιμές η εταιρεία παίρνει μέγιστα έσοδα.
(β) Εάν τελικά η εταιρεία θέσει αυτές τις τιμές, ποιες ποσότητες πρέπει να παραχθούν από τον κάθε τύπο;
(γ) Ποια είναι τα έσοδα που προκύπτουν από τις παραπάνω τιμές;

ΛΥΣΗ:

(α) Η συνάρτηση εσόδων είναι:

$R(p_1, p_2, p_3) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\frac{\partial R}{\partial p_1} = q_1 - 2p_1 + p_2 + p_3 = 4000 - 4p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_2} = p_1 + q_2 - 3p_2 + p_3 = 6000 + 2p_1 - 6p_2 + 2p_3 = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_3} = p_1 + p_2 + q_3 - 2p_3 = 5000 + 2p_1 + 2p_2 - 4p_3 = 0$$

Η λύση του συστήματος είναι $p_1 = \dfrac{29000}{3}$, $p_2 = 7500$ και $p_3 = \dfrac{29500}{3}$.

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p_1^2} = -4\,,\ \frac{\partial^2 R}{\partial p_2^2} = -6\,,\ \frac{\partial^2 R}{\partial p_3^2} = -4 \text{ και } \frac{\partial^2 R}{\partial p_1 \partial p_2} = \frac{\partial^2 R}{\partial p_1 \partial p_3} = \frac{\partial^2 R}{\partial p_2 \partial p_3} = 2$$

Η Εσσιανή μήτρα είναι:

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Επειδή $H_1=-4<0$, $H_2=20>0$ και $H_3=-24<0$, έχουμε τοπικό μέγιστο.

(β) Οι αντίστοιχες ποσότητες είναι $q_1=2000$, $q_2=3000$ και $q_3=2500$.

(γ) Τα μέγιστα έσοδα είναι $R^* = \dfrac{19925000}{3}$ δολάρια

11. Μια εταιρεία πουλάει 2 προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης:

$$\begin{cases} q_1 = 110 - 4p_1 - p_2 \\ q_2 = 90 - 2p_1 - 3p_2 \end{cases}$$

όπου q_i είναι η εκτιμημένη συνάρτηση ζήτησης (σε χιλιάδες μονάδες) για το προϊόν i και p_i είναι η τιμή πώλησης προϊόντος i (σε δολάρια).
(α) Προσδιορίστε τις τιμές για τα δύο προϊόντα έτσι ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά έσοδα.
(β) Ποιες ποσότητες πρέπει να παραχθούν από το κάθε προϊόν;
(γ) Ποια αναμένονται να είναι τα μέγιστα έσοδα;

ΛΥΣΗ:

(α) Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι τα έσοδα μεγιστοποιούνται όταν $p_1=13$ και $p_2=6$.

(β) Οι αντίστοιχες ποσότητες είναι $q_1=52$ και $q_2=46$.

(γ) Τα μέγιστα έσοδα είναι 952 δολάρια.

ΛΥΣΕΙΣ 10^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 10.1

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

(α) $\int (x+20)^5 dx$ **(β)** $\int 2x(x^2+3)^4 dx$ (γ) $\int 6\sqrt{8+2x}dx$

(δ) $\int 3x^2(x^3+1)^4 dx$ **(ε)** $\int x(x^2+3)^{\frac{3}{2}} dx$ **(στ)** $\int \left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\right)^5 (x-1)dx$

(ζ) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}dx$

ΛΥΣΗ:

(α) Θέτουμε u=x+20 οπότε du=dx και

$$\int (x+20)^5 dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6}+C = \frac{(x+20)^6}{6}+C$$

(β) Θέτουμε $u=x^2+3$ οπότε du=2xdx και

$$\int 2x(x^2+3)^4 dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5}+C = \frac{(x^2+3)^5}{5}+C$$

(γ) Θέτουμε u=2x+8 οπότε du=2dx και

$$\int 6\sqrt{8+2x}dx = 3\int \sqrt{u}du = 2u^{3/2}+C = 2(2x+8)^{3/2}+C$$

(δ) Θέτουμε $u=x^3+1$ οπότε $du=3x^2dx$ και

$$\int 3x^2(x^3+1)^4 dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5}+C = \frac{(x^3+1)^5}{5}+C$$

(ε) Θέτουμε $u=x^2+3$ οπότε du=2xdx ή $\frac{1}{2}du = xdx$ και

$$\int x(x^2+3)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}\int u^{3/2}du = \frac{1}{5}u^{5/2}+C = \frac{1}{5}(x^2+3)^{5/2}+C$$

(στ) Θέτουμε $u=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}$, οπότε $du=\frac{1}{2}(x-1)dx$ ή $2du=(x-1)dx$ και

$$\int \left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\right)^5 (x-1)dx = 2\int u^5 du = \frac{u^6}{3}+C = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$$

(ζ) Θέτουμε $u=x^2+8$ οπότε du=2xdx και

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C = 2\sqrt{x^2+8}+C$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα

(α) $\int xe^{-x}dx$ **(β)** $\int x^2e^x dx$ (γ) $\int xe^{2x}dx$

(δ) $\int (x+4)\ln x dx$ **(ε)** $\int x(x+2)^4 dx$ **(στ)** $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$

ΛΥΣΗ:

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

(α) $\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + C$

(β) $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2\int xde^x =$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

(γ) $\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int xde^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

(δ) $\int (x+4)\ln x dx = \int x\ln x dx + 4\int \ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 + 4x\ln x - 4\int xd\ln x =$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 d\ln x + 4x\ln x - 4\int dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + 4x(\ln x - 1) + C$$

(ε) $\int x(x+2)^4 dx = \frac{1}{5}\int xd(x+2)^5 = \frac{1}{5}x(x+2)^5 - \frac{1}{5}\int (x+2)^5 dx =$

$$= \frac{1}{5}x(x+2)^5 - \frac{1}{30}(x+2)^6 + C$$

(στ)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx = 2\int xd\sqrt{x+3} = 2x\sqrt{x+3} - 2\int \sqrt{x+3}dx = 2x\sqrt{x+3} - \frac{4}{3}(x+3)^{3/2} + C$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}dx$ **(β)** $\int \frac{x-2}{x^2+3x-4}dx$ (γ) $\int \frac{1}{x^3+x}dx$

(δ) $\int \frac{4x-8}{x^2-4x+13}dx$ **(ε)** $\int \frac{2x+3}{x^2(x-3)}dx$ **(στ)** $\int \frac{x^2+2x+10}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$

(ζ) $\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $\frac{2x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$ οπότε

$$\int \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

(β) Είναι $\dfrac{x-2}{x^2+3x-4} = \dfrac{6/5}{x+4} - \dfrac{1/5}{x-1}$, οπότε

$$\int \frac{x-2}{x^2+3x-4}dx = \frac{6}{5}\int \frac{1}{x+4}dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}dx = \frac{6}{5}\ln|x+4| - \frac{1}{5}\ln|x-1| + C$$

(γ) Είναι $\dfrac{1}{x^3+x} = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$, οπότε

$$\int \frac{1}{x^3+x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

(δ) $\displaystyle\int \frac{4x-8}{x^2-4x+13}dx = 2\int \frac{(x^2-4x+13)'}{x^2-4x+13}dx = 2\ln(x^2-4x+13) + C$

(ε) Είναι $\dfrac{2x+3}{x^2(x-3)} = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ και

$$\int \frac{2x+3}{x^2(x-3)}dx = \int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \ln|x-3| - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$$

(στ) Είναι $\dfrac{x^2+2x+10}{(x+1)^2(x^2+2)} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2} - \dfrac{2x}{x^2+2}$, οπότε

$$\int \frac{x^2+2x+10}{(x+1)^2(x^2+2)}dx = 2\int \frac{1}{x+1}dx + 3\int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \int \frac{2x}{x^2+2}dx =$$

$$= 2\ln|x+1| - 3\frac{1}{x+1} - \ln(x^2+2) + C$$

(ζ) Είναι $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$, οπότε

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$$

Ασκήσεις 10.2

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^2 (x^2+4x)dx$ **(β)** $\displaystyle\int_0^{49} \sqrt{x}dx$ (γ) $\displaystyle\int_{-3}^0 2xe^{x^2}dx$

(δ) $\displaystyle\int_0^4 (2x+5)dx$ **(ε)** $\displaystyle\int_{-1}^0 3x^2e^{x^3}dx$ **(στ)** $\displaystyle\int_9^{16} \sqrt{x}dx$

(ζ) $\displaystyle\int_1^4 3x^5dx$

ΛΥΣΗ:

(α) $\int_0^2 (x^2+4x)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + 4\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = \frac{32}{3}$

(β) $\int_0^{49} \sqrt{x}dx = \left.\frac{2}{3}x^{3/2}\right|_0^{49} = 228{,}67$

(γ) $\int_{-3}^0 2xe^{x^2}dx = \int_{-3}^0 de^{x^2} = \left.e^{x^2}\right|_{-3}^0 = 1-e^9$

(δ) $\int_0^4 (2x+5)dx = \left.x^2\right|_0^4 + \left.5x\right|_0^4 = 16+20 = 36$

(ε) $\int_{-1}^0 3x^2e^{x^3}dx = \int_{-1}^0 de^{x^3} = \left.e^{x^3}\right|_{-1}^0 = 1-\frac{1}{e}$

(στ) $\int_9^{16} \sqrt{x}dx = \left.\frac{2}{3}x^{3/2}\right|_9^{16} = \frac{2}{3}(64-27) = 24{,}67$

(ζ) $\int_1^4 3x^5dx = \left.\frac{x^6}{2}\right|_1^4 = \frac{4095}{2}$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα, τις ευθείες x=1 και x=2 και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2+4$.

ΛΥΣΗ:

Επειδή για κάθε $x\in[1,2]$ η f παίρνει θετικές τιμές, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$A = \int_1^2 (x^2+4)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \left.4x\right|_1^2 = \frac{7}{3}+4(2-1) = \frac{19}{3}$$

3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα, τις ευθείες x=3 και x=6 και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2+5$ **και** $g(x) = x-3$.

ΛΥΣΗ:

Είναι f(x)>g(x) για κάθε $x\in[3,6]$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$A = \int_3^6 [f(x)-g(x)]dx = \int_3^6 (x^2-x+8)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_3^6 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_3^6 + \left.8x\right|_3^6 = \frac{147}{2}$$

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα, τις ευθείες x=$\frac{1}{2}$ και x=$\frac{3}{2}$ και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$ **και** $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

ΛΥΣΗ:

Για $\frac{1}{2} \le x \le 1$ είναι g(x)≥f(x), ενώ για $1 \le x \le \frac{3}{2}$ είναι f(x)≥g(x). Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$A = \int_{1/2}^{1}[g(x) - f(x)]dx + \int_{1}^{3/2}[f(x) - g(x)]dx = \int_{1/2}^{1}\frac{1}{x^2}dx - \int_{1/2}^{1}x^3dx + \int_{1}^{3/2}x^3dx - \int_{1}^{3/2}\frac{1}{x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\Big|_{1/2}^{1} - \frac{x^4}{4}\Big|_{1/2}^{1} + \frac{x^4}{4}\Big|_{1}^{3/2} - \frac{1}{x}\Big|_{1}^{3/2} = \frac{203}{96}$$

Ασκήσεις 10.3

1. Να βρείτε τις παραγώγους πρώτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $\mathrm{f(x)} = \int_{1}^{4} \mathrm{e}^{\mathrm{xy}}\mathrm{dy}$ **(β)** $f(x) = \int_{0}^{3} \mathrm{x}^2\mathrm{y}^3\mathrm{dy}$ (γ) $\mathrm{f(y)} = \int_{0}^{\mathrm{y}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{x+y}}\mathrm{dx}$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι $f(x) = \frac{1}{x}\int_{1}^{4} de^{xy} = \frac{1}{x}e^{xy}\Big|_{1}^{4} = \frac{1}{x}(e^{4x} - e^{x})$.

Άρα $\frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2}(e^{4x} - e^{x}) + \frac{1}{x}(4e^{4x} - e^{x}) = \frac{1}{x}(4e^{4x} - e^{x} - \frac{e^{4x}}{x} + \frac{e^{x}}{x})$

(β) Είναι $f(x) = x^2\int_{0}^{3} y^3dy = x^2\frac{y^4}{4}\Big|_{0}^{3} = \frac{81x^2}{4}$.

Άρα $\frac{df}{dx} = \frac{81x}{2}$.

(γ) Είναι $f(y) = e^{y}\int_{0}^{y^2} e^{x}dx = e^{y}e^{x}\Big|_{0}^{y^2} = e^{y}(e^{y^2} - 1) = e^{y^2+y} - e^{y}$

Άρα $\frac{df}{dy} = e^{y^2+y}(2y + 1) - e^{y} = e^{y^2+y} - e^{y} + 2ye^{y^2+y}$

2. Να μελετήσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$ **(β)** $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$ (γ) $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}$

(δ) $\int_{0}^{\mathrm{e}}\mathrm{lnxdx}$ **(ε)** $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$ **(στ)** $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{(3+\mathrm{x})^2}\mathrm{dx}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\beta\to 0^+}\int_\beta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2(1-\lim_{\beta\to 0^+}\sqrt{\beta}) = 2$

(β) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2}dx + \lim\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 =$

$= -\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{-\varepsilon}+1\right) + \left(-1+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$, δε συγκλίνει

(γ) $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx = \lim_{\beta\to -\infty}\int_\beta^0 e^{-x}dx = -\lim_{\beta\to -\infty}(e^{-x}\Big|_\beta^0) = -1+\lim_{\beta\to -\infty}\frac{1}{e^\beta} = +\infty$, δε συγκλίνει

(δ)

$\int_0^e \ln x dx = \lim_{\beta\to 0^+}\int_\beta^e \ln x dx = \lim_{\beta\to 0^+}(x\ln x)\Big|_\beta^e - \lim_{\beta\to 0^+}(x)\Big|_\beta^e = e - \lim_{\beta\to 0^+}\beta\ln\beta - e + \lim_{\beta\to 0^+}\beta =$

$= -\lim_{\beta\to 0^+}\frac{\ln\beta}{1/\beta} = e - \lim_{\beta\to 0^+}\frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{-1}{\beta^2}} = \lim_{\beta\to 0^+}\beta = 0$

(ε) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{\beta\to 0^+}\int_\beta^1 x^{-1/3}dx + \lim_{\gamma\to +\infty}\int_1^\gamma x^{-1/3}dx = \frac{3}{2}\lim_{\beta\to 0^+}\left(x^{2/3}\right)\Big|_\beta^1 + \frac{3}{2}\lim_{\gamma\to +\infty}\left(x^{2/3}\right)\Big|_1^\gamma =$

$= \frac{3}{2}(1-\lim_{\beta\to 0^+}\beta^{2/3}) + \frac{3}{2}(\lim_{\gamma\to +\infty}\gamma^{2/3}-1) = +\infty$, δε συγκλίνει.

(στ) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(3+x)^2}dx = \lim_{\beta\to +\infty}\int_2^\beta (x+3)^{-3}dx = -\frac{1}{2}\lim_{\beta\to +\infty}\frac{1}{(x+3)^2}\Big|_2^\beta =$

$= -\frac{1}{2}\lim_{\beta\to +\infty}\left(\frac{1}{(\beta+3)^2}-\frac{1}{25}\right) = \frac{1}{50}$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου p συγκλίνουν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 x^p dx$ **(β)** $\int_1^{+\infty} x^p dx$

ΛΥΣΗ:

(α) Για p≥0 είναι $\int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$

Η συνάρτηση x^p δεν ορίζεται στο x=0 για p<0. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$\int_0^1 x^p dx = \lim_{\beta\to 0^+}\int_\beta^1 x^p dx = \lim_{\beta\to 0^+}\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_\beta^1 = \frac{1}{p+1}(1-\lim_{\beta\to 0^+}\beta^p)$

Για p+1≥0 ή −1≤p<0 είναι $\lim\limits_{\beta\to 0^+}\beta^{p+1}=0$ και το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Για p<−1 το ολοκλήρωμα δε συγκλίνει.

(β) $\int\limits_1^{+\infty} x^p dx = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty} x^p dx = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_1^{\beta} = \frac{1}{p+1}(\lim\limits_{\beta\to+\infty}\beta^p - 1)$

Για p+1≤0 ή p≤−1 είναι $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\beta^{p+1}=0$ και το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Για p>−1 το ολοκλήρωμα δε συγκλίνει.

Ασκήσεις 10.4

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int\limits_1^e\int\limits_1^2 \frac{1}{\mathrm{xy}}\mathrm{dydx}$ **(β)** $\int\limits_0^2\int\limits_0^{2-\mathrm{x}} \mathrm{ydydx}$ (γ) $\int\limits_0^1\int\limits_2^4 \mathrm{y}^2\mathrm{xdxdy}$

ΛΥΣΗ:

(α) $\int\limits_1^e\int\limits_1^2 \frac{1}{\mathrm{xy}}\mathrm{dydx} = \int\limits_1^e \frac{1}{x}\left(\ln y\Big|_1^2\right)dx = \int\limits_1^e \frac{\ln 2}{x}dx = \ln 2\cdot \ln x\Big|_1^e = \ln 2$

(β) $\int\limits_0^2\int\limits_0^{2-\mathrm{x}} \mathrm{ydydx} = \int\limits_0^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{2-x} dx = \int\limits_0^2 \frac{(2-x)^2}{2}dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 (2-x)^2 d(2-x) =$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{(2-x)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{6}$$

(γ) $\int\limits_0^1\int\limits_2^4 \mathrm{y}^2\mathrm{xdxdy} = \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\left(x^2\Big|_2^4\right)dy = \int\limits_0^1 6y^2 dy = 2y^3\Big|_0^1 = 2$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\limits_S(\mathrm{yzdx}+\mathrm{xzdy}+\mathrm{xydz})$, όπου S το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο (1,1,2) έως το σημείο (2,0,−1).

ΛΥΣΗ:

Έστω η διανυσματική συνάρτηση f:$\Re^3\to\Re$ με τύπο f(x,y,z)=(yz,xz,yz). Το ευθύγραμμο τμήμα S περιλαμβάνει τα σημεία $t(1,1,2)+(1-t)(2,0,-1)=(2-t,t,3t-1)$ με 0≤t≤1. Η συνάρτηση είναι $f(\mathbf{x}_t)=(3t^2-t,-3t^2+7t-2,-t^2+2t)$ Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι:

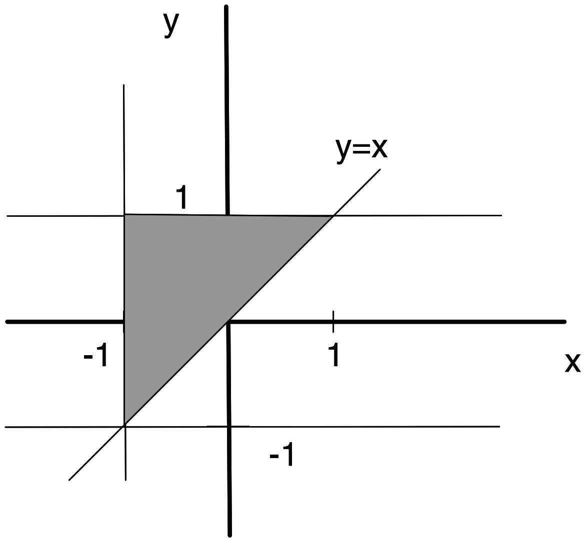
$$\int\limits_{\mathbf{S}} f d\mathbf{x} = \int\limits_S(\mathrm{yzdx}+\mathrm{xzdy}+\mathrm{xydz}) = \int\limits_0^1 (3t^2-t,-3t^2+7t-2,-t^2+2t)(-1,1,3)dt =$$

$$= \int\limits_0^1(-9t^2+14t-2)dt = -3t^3\Big|_0^1 + 7t^2\Big|_0^1 - 2t\Big|_0^1 = 2$$

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_S xydydx$, όπου S είναι το τρίγωνο που περικλείεται από τις ευθείες x=−1, y=x και y=1.

ΛΥΣΗ:

Το χωρίο S προσδιορίζεται ως εξής: $-1 \le x \le 1$ και $x \le y \le 1$ (βλ. σχήμα).



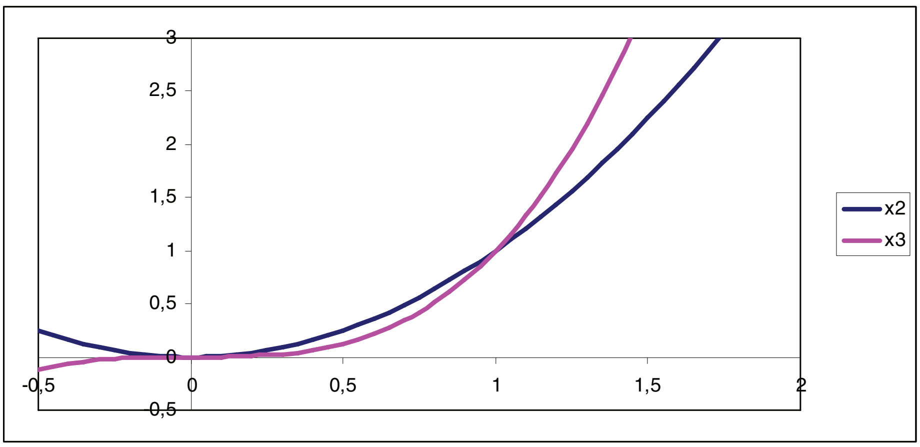
Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x}^{1} xydydx = \int_{-1}^{1} x\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_x^1\right)dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_{-1}^{1} - \left.\frac{x^4}{8}\right|_{-1}^{1} = 0$$

4. **Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_S (x+y)dydx$, όπου S είναι το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες y=x^2 και y=x^3.**

ΛΥΣΗ:

Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία x=0 και x=1. Το χωρίο S προσδιορίζεται ως εξής: $0 \le x \le 1$ και $x^3 \le y \le x^2$ (βλ. σχήμα).



Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^1\int_{x^3}^{x^2}(x+y)dydx=\int_0^1\int_{x^3}^{x^2}xdydx+\int_0^1\int_{x^3}^{x^2}ydydx=\int_0^1 x\left(y\Big|_{x^3}^{x^2}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^3}^{x^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x(x^2-x^3)dx+\frac{1}{2}\int_0^1(x^4-x^6)dx=\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1-\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^1=0{,}078$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 10

1. Να βρείτε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

(α) $\int x(3x-10)^3dx$ **(β)** $\int x^2(x^3+5)^3dx$ (γ) $\int\left(2x^2+8x\right)^3(x+2)dx$

(δ) $\int\sqrt[3]{20+3x^3}\left(x^2\right)dx$ **(ε)** $\int 2xe^{x^2}dx$ **(στ)** $\int(x+2)e^{x^2+4x}dx$

(ζ) $\int\frac{13x-4}{6x^2-x-2}dx$ **(η)** $\int\frac{x-2}{x^2(x+1)}dx$

ΛΥΣΗ:

(α) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int x(3x-10)^3dx=\frac{1}{12}\int xd(3x-10)^4=\frac{1}{12}x(3x-10)^4-\frac{1}{12}\int(3x-10)^4dx=$$

$$=\frac{1}{12}x(3x-10)^4-\frac{1}{12}\cdot\frac{(3x-10)^5}{15}+C$$

(β) Θέτοντας $u=x^3+5$ είναι $du=3x^2dx$ και

$$\int x^2(x^3+5)^3dx=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^4}{4}=\frac{(x^3+5)^4}{12}+C$$

(γ) Αν θέσουμε $u=2x^2+8x$ είναι $du=4(x+2)dx$ και

$$\int\left(2x^2+8x\right)^3(x+2)dx=\frac{1}{4}\int u^3du=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^4}{4}+C=\frac{1}{16}(2x^2+8x)^4+C$$

(δ) Αν θέσουμε $u=20+3x^3$, τότε $du=9x^2dx$ και

$$\int\sqrt[3]{20+3x^3}\left(x^2\right)dx=\frac{1}{9}\int\sqrt[3]{u}du=\frac{1}{12}u^{4/3}+C=\frac{1}{12}(20+3x^3)^{4/3}+C$$

(ε) Είναι $\int 2xe^{x^2}dx=\int de^{x^2}=e^{x^2}+C$

(στ) Αν θέσουμε $u=x^2+4x$ είναι $du=2(x+2)dx$ και

$$\int (x+2)e^{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2+4x} + C$$

(ζ) Είναι $\dfrac{13x-4}{6x^2-x-2} = \dfrac{2}{3x-2} + \dfrac{3}{2x+1}$, οπότε

$$\int \frac{13x-4}{6x^2-x-2}dx = 2\int \frac{1}{3x-2}dx + 3\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{2}{3}\ln|3x-2| + \frac{3}{2}\ln|2x+1| + C$$

(η) Είναι $\dfrac{x-2}{x^2(x+1)} = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x+1}$. Άρα

$$\int \frac{x-2}{x^2(x+1)}dx = 3\int \frac{1}{x}dx - 2\int \frac{1}{x^2}dx - 3\int \frac{1}{x+1}dx = 3\ln|x| + 2\frac{1}{x} - 3\ln|x+1| + C$$

2. Ομοίως, τα:

(α) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ **(β)** $\int 5xe^x dx$ (γ) $\int x\sqrt{x+1}dx$

(δ) $\int xe^{-2x}dx$ **(ε)** $\int x^2\ln(5x)dx$ **(στ)** $\int x(x-4)^5 dx$

(ζ) $\int \frac{x}{(x-3)^2}dx$ **(η)** $\int (2x+5)(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

ΛΥΣΗ:

(α) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\int \ln x d\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}d\ln x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$$

(β) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int 5xe^x dx = 5\int xde^x = 5xe^x - 5\int e^x dx = 5xe^x - 5e^x + C = 5e^x(x-1) + C$$

(γ) Αν θέσουμε u=x+1, τότε είναι x=u−1 και du=dx, οπότε

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \int (u-1)\sqrt{u}du = \int u^{3/2}du - \int \sqrt{u}du = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$$

(δ) Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int xde^{-2x} = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

(ε) Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int x^2\ln(5x)dx = \frac{1}{3}\int \ln(5x)dx^3 = \frac{1}{3}x^3\ln(5x) - \frac{1}{3}\int x^3 d(\ln 5x) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln(5x) - \frac{1}{9}x^3 + C$$

(στ) Αν θέσουμε u=x−4, είναι x=u+4 και du=dx. Άρα

$$\int x(x-4)^5 dx = \int (u+4)u^5 du = \int u^6 du + 4\int u^5 du = \frac{u^7}{7} + 4\frac{u^6}{6} + C =$$

$$= \frac{1}{7}(x-4)^7 + \frac{2}{3}(x-4)^6 + C$$

(ζ) Είναι $\dfrac{x}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{3}{(x-3)^2}$, οπότε

$$\int \frac{x}{(x-3)^2} dx = \int \frac{1}{x-3} dx + 3\int \frac{1}{(x-3)^2} dx = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C$$

(η) Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int (2x+5)(x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\int (2x+5) d(x+1)^{3/2} =$$

$$= \frac{2}{3}(2x+5)(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2} d(2x+5) = \frac{2}{3}(2x+5)(x+1)^{3/2} - \frac{4}{3}\int (x+1)^{3/2} dx =$$

$$= \frac{2}{3}(2x+5)(x+1)^{3/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{5/2} \cdot \frac{2}{5} + C = \frac{4}{15}(x+1)(3x+7)\sqrt{x+1} + C$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^2 (x+3)^2 dx$ **(β)** $\int_{-1}^2 (x^2+4x+6)dx$ (γ) $\int_0^4 (4x^3+3x^2)dx$

(δ) $\int_4^9 \frac{4}{x} dx$ **(ε)** $\int_2^4 -3e^x dx$ **(στ)** $\int_0^2 2xe^{x^2} dx$

ΛΥΣΗ:

(α) $\displaystyle\int_0^2 (x+3)^2 dx = \int_0^2 (x+3)^2 d(x+3) = \left.\frac{(x+3)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{125}{3}$

(β) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2+4x+6)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^2 + 4\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 + 6x\Big|_{-1}^2 = 27$

(δ)

(γ) $\displaystyle\int_0^4 (4x^3+3x^2)dx = x^4\Big|_0^4 + x^3\Big|_0^4 = 256 + 64 = 320$

(δ) $\displaystyle\int_4^9 \frac{4}{x} dx = 4ln|x|\Big|_4^9 = 4(2{,}1972 - 1{,}3863) = 3{,}2437$

(ε) $\displaystyle\int_2^4 -3e^x dx = -3e^x\Big|_2^4 = -3(e^4 - e^2) = -141{,}627$

(στ) $\int_0^2 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}\Big|_0^2 = e^4 - 1$

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + x$ **.**

ΛΥΣΗ:

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα στα σημεία x=0 και x=1. Επειδή f(x)>0 για κάθε $x \in (0,1)$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (-x^2 + x)dx = -\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

5. Να βρείτε τις παραγώγους πρώτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \int_1^2 \frac{1}{xy}dy$ **(β)** $f(y) = \int_{2y}^{y^2} e^{xy}dx$ (γ) $f(y) = \int_y^{3y}(x+y)dx$

(α) $f(x) = \frac{1}{x}\int_1^2 \frac{dy}{y} = \frac{1}{x}\ln 2$. Άρα $\frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2}\ln 2$

(β) $f(y) = \frac{1}{y}e^{xy}\Big|_{2y}^{y^2} = \frac{1}{y}(e^{y^3} - e^{2y^2})$. Άρα

$$\frac{df}{dy} = -\frac{1}{y^2}(e^{y^3} - e^{2y^2}) + \frac{1}{y}(3y^2 e^{y^3} - 4ye^{2y^2}) = 3ye^{y^3} - 4e^{2y^2} - \left(\frac{e^{y^3}}{y^2} - \frac{e^{2y^2}}{y^2}\right)$$

(γ) $f(y) = \int_y^{3y} xdx + y\int_y^{3y} dx = 4y^2 + 2y^2 = 6y^2$

Άρα $\frac{df}{dy} = 12y$

6. Να μελετήσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx$ **(β)** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ (γ) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$

(δ) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ **(ε)** $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ **(στ)** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx$

ΛΥΣΗ:

(α) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\beta\to 0^-}\int_{-1}^{\beta}\frac{dx}{x^2} = -\lim_{\beta\to 0^-}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\beta} = -\lim_{\beta\to 0^-}\frac{1}{\beta} - 1 = +\infty$, που δε συγκλίνει.

(β) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_2^{\beta}\frac{dx}{x^2} = -\lim_{\beta\to+\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_2^{\beta} = -\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{\beta}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(γ) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$

$= \frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\left.\ln(1+x^2)\right|_0^{\beta} = \frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\ln(1+\beta^2) = +\infty$, δε συγκλίνει

(δ) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}e^{-x}dx = -\lim_{\beta\to+\infty}\left.e^{-x}\right|_0^{\beta} = -(\lim_{\beta\to+\infty}e^{-\beta}-1)=1$

(ε) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}xe^{-x}dx = -\lim_{\beta\to+\infty}\left.xe^{-x}\right|_0^{\beta} - \lim_{\beta\to+\infty}\left.e^{-x}\right|_0^{\beta} =$

$= -\lim_{\beta\to+\infty}\beta e^{-\beta} - \lim_{\beta\to+\infty}e^{-\beta} = -\lim_{\beta\to}\frac{\beta}{e^{\beta}}+1=1$

(στ) $\int_0^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx = \lim_{\beta\to3^-}\int_0^{\beta}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \lim_{\beta\to3^-}\int_0^{\beta}\frac{d(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\lim_{\beta\to3^-}\left.\sqrt{9-x^2}\right|_0^{\beta} =$

$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{\beta\to3^-}\sqrt{9-\beta^2}+3\right)=3$

7. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου p για τις οποίες το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}e^{px}dx$ συγκλίνει.

ΛΥΣΗ:

Είναι $\int_0^{+\infty}e^{px}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}e^{px}dx = \frac{1}{p}\lim_{\beta\to+\infty}\left(\left.e^{px}\right|_0^{\beta}\right) = \frac{1}{p}(\lim_{\beta\to+\infty}e^{\beta p}-1)$

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν p≤0.

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2\int_0^3 ye^{-x}dxdy$ **(β)** $\int_0^2\int_{y/2}^1 e^{x^2}dxdy$ (γ) $\int_1^3\int_0^2 2xy^3dxdy$

(α) $\int_1^2\int_0^3 ye^{-x}dxdy = -\int_1^2 y\left(\left.e^{-x}\right|_0^3\right)dy = -\int_1^2 y(e^{-3}-1)dy = -(e^{-3}-1)\left.\frac{y^2}{2}\right|_1^2 =$

$= \frac{3}{2}(1-\frac{1}{e^3})$

(β) Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στο χωρίο που προσδιορίζεται ως εξής: 0≤y≤2 και $\frac{y}{2} \le x \le 1$. Ένας ισοδύναμος τρόπος να προσδιοριστεί το ίδιο χωρίο είναι: $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le 2x$. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

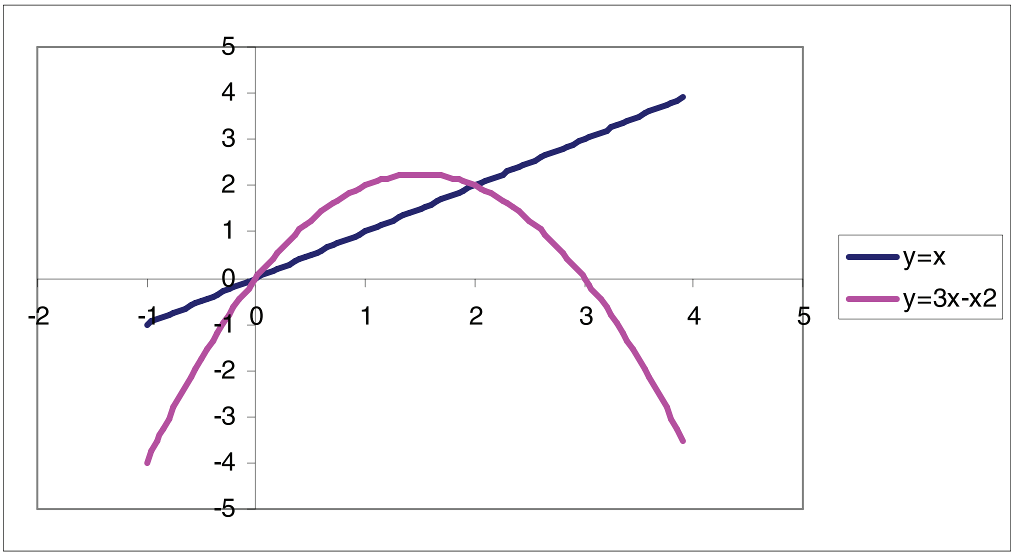
$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dydx = \int_0^1 e^{x^2} \left(y\Big|_0^{2x} \right) dx = \int_0^1 2xe^{x^2} dx = e^{x^2}\Big|_0^1 = e - 1$$

(γ) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^2 2xy^3 dxdy = \int_1^3 y^3 \left(x^2\Big|_0^2 \right) dy = 4\frac{y^4}{4}\Bigg|_1^3 = 80$

9. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_S (x^2 - xy)dydx$ όπου S είναι το χωρίο που περικλείεται από την ευθεία y=x και την καμπύλη y=3x–x².

ΛΥΣΗ:

Η ευθεία τέμνει την καμπύλη στα σημεία x=0 και x=2 (βλ. σχήμα).



Το ζητούμενο χωρίο προσδιορίζεται ως εξής: $0 \le x \le 2$ και $x \le y \le 3x - x^2$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\int_0^2 \int_x^{3x-x^2} (x^2 - xy)dydx = \int_0^2 \int_x^{3x-x^2} x^2 dydx - \int_0^2 \int_x^{3x-x^2} xydydx = \int_0^2 x^2 (y\Big|_x^{3x-x^2})dx - \int_0^2 x\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{3x-x^2} \right)dx =$$

$$= \int_0^2 x^2 (3x - x^2 - x)dx - \int_0^2 x\left[\frac{(3x-x^2)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right]dx = \ldots = \frac{24}{5}$$

ΛΥΣΕΙΣ 11^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ασκήσεις 11.1

1. Η ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο (P, Q) είναι $\eta = -\dfrac{P}{100-P}$ **. Είναι γνωστό ότι όταν το προϊόν πωλείται σε τιμή 20 χ.μ., η ζητούμενη ποσότητα είναι 1000 μονάδες. Ποια είναι η συνάρτηση ζήτησης;**

ΛΥΣΗ:

Είναι $\dfrac{dQ}{dP}\dfrac{P}{Q} = -\dfrac{P}{100-P}$, οπότε $\dfrac{dQ}{Q} = -\dfrac{1}{100-P}dP$. Άρα $\displaystyle\int \frac{1}{Q}dQ = -\int \frac{1}{100-P}dP$

ή $\ln Q = \ln(100-P) + C_0$ ή $e^{\ln Q} = e^{\ln(100-P)+C_0}$, οπότε $Q = C_0 \cdot (100-P)$.

Για P=20 είναι Q=1000, οπότε C_0=12,5.

2. Μία επιχείρηση παράγει ένα προϊόν A. Η συνάρτηση οριακού εσόδου είναι $MR = 20 - 4Q$
όπου q η ποσότητα παραγωγής.
(α) Να βρείτε τα έσοδα της επιχείρησης όταν παράγει 8 μονάδες προϊόντος.
(β) Να βρείτε τη συνάρτηση ζήτησης και να υπολογίσετε την ελαστικότητά της για Q=8.
(γ) Να βρείτε τα μέσα έσοδα της επιχείρησης για το επίπεδο παραγωγής μεταξύ 3 και 8 μονάδων.

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση εσόδων είναι $R = \int MR \cdot dQ = 20Q - 2Q^2$.

(α) Για Q=8 είναι R=160−128=32.

(β) Είναι $R = P \cdot Q = 20Q - 2Q^2$, οπότε $P = 20 - 2Q$. Η συνάρτηση ζήτησης είναι $Q = 10 - \dfrac{1}{2}P$ και η ελαστικότητα για Q=8 είναι $\eta = \dfrac{dQ}{dP}\dfrac{P}{Q} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{8} = -0{,}25$.

(γ) Τα μέσα έσοδα στο διάστημα [3,8] είναι:

$$AR = \frac{1}{8-3}\int_3^8 R \cdot dQ = \frac{1}{5}\int_3^8 (20Q - 2Q^2)dQ = \frac{1}{5}\left(10Q^2\Big|_3^8 - \frac{2}{3}Q^3\Big|_3^8\right) = \frac{136}{3}$$

3. Η οριακή ροπή για αποταμίευση σε μια οικονομία είναι $\mathrm{MPS} = 0{,}5 - 0{,}2 \cdot \mathrm{Y}^{-1/2}$ **όπου Y είναι το διαθέσιμο εισόδημα. Αν η αποταμίευση είναι μηδενική όταν το εισόδημα είναι Y=100 χ.μ., να βρείτε τη συνάρτηση αποταμίευσης.**

ΛΥΣΗ:

Είναι $S = \int MPS dY = \int (0{,}5 - 0{,}2Y^{-1/2})dY = 0{,}5Y - 0{,}4Y^{1/2} + C$.

Αν Y=100 είναι S=50−4+C=0, οπότε C=−46.

4. Το οριακό προϊόν της εργασίας μίας επιχείρησης είναι $\mathrm{MP} = 4\mathrm{L}^{1/3}$ **, όπου L είναι η εργασία. Αν η εργασία είναι η μοναδική εισροή που χρησιμοποιεί η επιχείρηση, να βρείτε τη συνάρτηση παραγωγής της.**

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση παραγωγής είναι $P = \int MP \cdot dL = \int 4L^{1/3} \cdot dL = 4 \cdot \frac{3}{4} L^{4/3} = 3L^{4/3}$.

Ασκήσεις 11.2

1. Να δείξετε ότι ακόμα και αν οι καθαρές επενδύσεις στο υπόδειγμα Domar είναι αρνητικές, τα αποτελέσματα του υποδείγματος εξακολουθούν να ισχύουν.

ΛΥΣΗ:

Η συνθήκη ισορροπίας στο υπόδειγμα Domar είναι $|I(t)| = I(0)e^{pst}$. Αν I(t)<0, τότε $I(t) = -I(0)e^{pst}$. Αν ο πραγματικός ρυθμός μεταβολής των επενδύσεων είναι r, τότε $I(t) = -I(0)e^{rt}$ και $\frac{dI}{dt} = -rI(0)e^{rt}$ και $\frac{dz}{dt} = p \cdot I(t) = -pI(0)e^{rt}$.

Ο ρυθμός μεταβολής του εισοδήματος είναι $\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s} \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{r}{s} I(0)e^{rt}$.

Ο λόγος των δύο ρυθμών μεταβολής είναι $\frac{dY/dt}{dz/dt} = \frac{r}{ps}$, όπως και στην περίπτωση που υποθέσαμε ότι I(t)>0. Επομένως, τα αποτελέσματα του υποδείγματος εξακολουθούν να ισχύουν.

2. Τι αποτέλεσμα θα έχει μια τεχνολογική εξέλιξη στο υπόδειγμα Domar;

[Υπόδειξη: Σκεφτείτε πώς επηρεάζει μια τεχνολογική εξέλιξη τη σχέση της παραγωγικής ικανότητας και του αποθέματος κεφαλαίου].

ΛΥΣΗ:

Μία τεχνολογική εξέλιξη θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του συντελεστή p. Για να ισχύει η συνθήκη r=p·s, θα πρέπει ο ρυθμός μεταβολής των επενδύσεων r να αυξηθεί ώστε να ισχύει η ισότητα.

3. Η κυβέρνηση μιας αναπτυσσόμενης χώρας επιθυμεί να διατηρήσει ρυθμό ανάπτυξης των επενδύσεων τουλάχιστον 4% ετησίως. Η οριακή ροπή για αποταμίευση εκτιμάται ότι είναι s=14% και ο λόγος της παραγωγικής ικανότητας προς το απόθεμα κεφαλαίου ρ=0,20.

(α) Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατή η διατήρηση του επιθυμητού ρυθμού αύξησης των επενδύσεων με αυτές τις συνθήκες.

(β) Με δεδομένη την οριακή ροπή για αποταμίευση, ποιος πρέπει να είναι ο λόγος ρ προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος του 4%;

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι ps=0,20·0,14=0,028 που είναι μικρότερο από τον επιθυμητό ρυθμό r=0,04. Άρα ο επιθυμητός ρυθμός δεν μπορεί να διατηρηθεί γιατί r<ps.

(β) Για να επιτευχθεί ο στόχος του 4% πρέπει να ισχύει $p = \frac{r}{s} = \frac{0{,}04}{0{,}14} = 0{,}2857$, δηλαδή ο λόγος της παραγωγικής ικανότητας προς το απόθεμα κεφαλαίου πρέπει να αυξηθεί.

Ασκήσεις 11.3

1. Έστω ότι κάποιος φανατικός παίκτης τυχερών παιχνιδιών κέρδισε στο LOTTO το ποσό του 1 εκατομμυρίου Ευρώ, το οποίο θα του καταβληθεί μέσα στα επόμενα 20 έτη με ρυθμό 50000 Ευρώ ανά έτος. Ποια είναι η σημερινή αξία των πληρωμών αυτών με συνεχή ανατοκισμό και επιτόκιο προεξόφλησης r=0,10; Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ:

Η παρούσα αξία των πληρωμών αυτών είναι:

$$PV = \int_0^{20} 50000 e^{-0,1t} dt = \frac{50000}{0,1}(1 - e^{-0,1 \cdot 20}) = 432332 \text{ Ευρώ.}$$

Η παρούσα αξία είναι αρκετά μικρότερη από το ποσό που κέρδισε ο παίκτης.

2. Ποια είναι η σημερινή αξία μιας διαρκούς σειράς πληρωμών 50.000 Ευρώ ανά έτος με συνεχή ανατοκισμό και επιτόκιο προεξόφλησης r=0,10; Τι παρατηρείτε;

ΛΥΣΗ:

Αν η σειρά πληρωμών είναι διαρκής, τότε η παρούσα αξία είναι:

$$PV = \int_0^{+\infty} 50000 e^{-0,1t} dt = \frac{50000}{0,1} \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} e^{-0,1t} dt = \frac{50000}{0,1} = 500000 \text{ Ευρώ.}$$

Η παρούσα αξία είναι δεκαπλάσια του ποσού.

3. Ένας έμπορος κρασιών έχει στην κατοχή του μία κάσα σπάνιο Γαλλικό κρασί του οποίου η αξία τη χρονική στιγμή t είναι V(t). Αν το κόστος αποθήκευσης του κρασιού είναι s χρηματικές μονάδες ανά έτος και το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι i, να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε ο έμπορος να πουλήσει το κρασί.

ΛΥΣΗ:

Αν ο έμπορος πουλήσει το κρασί τη χρονική στιγμή t, η παρούσα αξία των χρημάτων που θα εισπράξει μείον το κόστος αποθήκευσης είναι:

$$PV(t) = V(t)e^{-it} - \int_0^t s e^{-iu} du = V(t)e^{-it} - \frac{s}{i}(1 - e^{-it}) = \left[V(t) + \frac{s}{i} \right] e^{-it} - \frac{s}{i}$$

Ο έμπορος θα πουλήσει όταν μεγιστοποιείται η παρούσα αξία. Τότε θα ισχύει:

$$\frac{dPV(t)}{dt} = 0 \text{ ή } e^{-it}\left[\frac{dV}{dt} - iV(t) - s \right] = 0 \text{ ή } \frac{dV}{dt} = iV(t) + s .$$

4. Έστω ότι ο ρυθμός απόσβεσης της αξίας ενός αυτοκινήτου δίνεται από τη συνάρτηση 200(10–t), όπου t είναι η ηλικία του αυτοκινήτου σε έτη. Αν κάποιος αγοράσει το αυτοκίνητο μεταχειρισμένο ενώ είναι ήδη μοντέλο 3 ετών, πόση θα είναι η απώλεια της αξίας του τα επόμενα τρία έτη; Ποια ήταν η αρχική αξία του αυτοκινήτου αν η αξία του εκμηδενίζεται μετά από 10 έτη;

ΛΥΣΗ:

Αν V(t) είναι η αξία του αυτοκινήτου στο χρόνο t και D(t) η απόσβεση, τότε είναι:

$$D(t) = -\frac{dV(t)}{dt} = 200(10-t)\,,\quad \text{οπότε}\quad V(t) = \int 200(t-10)dt = 100t^2 - 2000t + V_0\,,$$

όπου V_0 είναι η αρχική αξία του αυτοκινήτου.

Η συσσωρευμένη απόσβεση από t=3 έως t=6 είναι:

$$\int_3^6 D(t)dt = \int_3^6 200(10-t)dt = 2000t\Big|_3^6 - 100t^2\Big|_3^6 = 6000 - 100(36-9) = 3300\ \text{χ.μ.}$$

Αν η αξία εκμηδενίζεται μετά από 10 έτη, τότε:

V(10)=0 ή 10000−20000+V_0=0 ή V_0=10000 χ.μ.

Ασκήσεις 11.4

1. **Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης κάποιου αγαθού είναι $Q = 8 - 2\sqrt{P}$.**

   (α) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί στην τιμή P=2.

   (β) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί στην τιμή P=4.

   (γ) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή καθώς η τιμή μειώνεται από P=4 σε P=2.

ΛΥΣΗ:

(α) Η μέγιστη τιμή είναι P=16. Το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι:

$$CS_1 = \int_2^{16} D(P)dP = \int_2^{16}(8-2\sqrt{P})dP = 8P\Big|_2^{16} - \frac{4}{3}P^{3/2}\Big|_2^{16} = 30{,}4379$$

(β) Παρόμοια είναι:

$$CS_2 = \int_4^{16} D(P)dP = \int_4^{16}(8-2\sqrt{P})dP = 8P\Big|_4^{16} - \frac{4}{3}P^{3/2}\Big|_4^{16} = 21{,}333$$

(γ) $\Delta CS = -\int_4^{2} D(P)dP = \int_2^{4} D(P)dP = 8P\Big|_2^{4} - \frac{4}{3}P^{3/2}\Big|_2^{4} = 9{,}1046 = CS_1 - CS_2$

2. **Έστω η συνάρτηση ζήτησης $Q = \frac{40}{P^2}$. Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί στην τιμή P=8.**

ΛΥΣΗ:

Αν $Q = D(P) = \frac{40}{P^2}$, τότε το πλεόνασμα καταναλωτή είναι:

$$CS = \lim_{P_0\to+\infty}\int_8^{P_0} D(P)dP = \lim_{P_0\to+\infty}\int_8^{P_0} 40P^{-2}dP = -40\cdot\lim_{P_0\to+\infty}\frac{1}{P}\Big|_8^{P_0} = -40\left(\lim_{P_0\to+\infty}\frac{1}{P_0} - \frac{1}{8}\right) = 5$$

3. **Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης να εξηγήσετε πώς θα υπολογιστεί το πλεόνασμα του καταναλωτή καθώς η τιμή μειώνεται από P=2 σε P=0, οπότε το αγαθό διατίθεται δωρεάν.**

(α) $Q = 10P^{-1/3}$

(β) $Q = 25P^{-2}$

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι :

$$CS = \lim_{P_0\to 0^+}\int_{P_0}^{2} D(P)dP = \lim_{P_0\to 0^+}\int_{P_0}^{2} 10P^{-1/3}dP = 10\cdot\frac{3}{2}\left(\lim_{P_0\to 0^+} P^{2/3}\Big|_{P_0}^{2}\right) = 15(2^{2/3} - 0) = 23{,}81$$

(β) Είναι:

$$CS = \lim_{P_0\to 0^+}\int_{P_0}^{2} D(P)dP = \lim_{P_0\to 0^+}\int_{P_0}^{2} 25P^{-2}dP = -25\left(\lim_{P_0\to 0^+}\frac{1}{P}\Big|_{P_0}^{2}\right) = -25\left(\frac{1}{2} - \lim_{P_0\to 0^+}\frac{1}{P_0}\right),$$

που δε συγκλίνει

4. **Η συνάρτηση ζήτησης για κάποιο αγαθό είναι Q=a–bP, ενώ η συνάρτηση προσφοράς είναι Q=c+dP, όπου a, b, c και d είναι θετικές σταθερές με c<a. Να εκφράσετε αλγεβρικά το πλεόνασμα του καταναλωτή, το πλεόνασμα του παραγωγού και το κοινωνικό πλεόνασμα.**

ΛΥΣΗ:

Η τιμή ισορροπίας είναι $P^* = \dfrac{a-c}{b+d}$ και η ποσότητα ισορροπίας $Q^* = \dfrac{ad+bc}{b+d}$.

Το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι:

$$CS = \int_{P^*}^{a/b} D(P)dP = \int_{P^*}^{a/b}(a-bP)dP = \ldots = \frac{(ad+bc)^2}{2b(b+a)^2} = \frac{\left(Q^*\right)^2}{2b}$$

Το πλεόνασμα του παραγωγού είναι :

$$PS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} S(Q)dQ = P^*Q^* - \int_0^{Q^*}\frac{Q-c}{d}dQ = \ldots = \frac{1}{2}\frac{(ad+bc)^2}{d(b+d)^2} = \frac{\left(Q^*\right)^2}{2d}$$

Το κοινωνικό πλεόνασμα είναι:

$$CS + PS = \frac{\left(Q^*\right)^2}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 11

1. **Η συνάρτηση οριακού κόστους μίας επιχείρησης είναι $MC = Q(1+3Q)^{-3/2}$ και η συνάρτηση οριακού εσόδου είναι $MR = 25 - 16Q + Q^2$, όπου Q είναι η παραγόμενη και πωλούμενη ποσότητα. Επιπλέον, το σταθερό κόστος της επιχείρησης είναι 600 χρηματικές μονάδες. Να βρείτε τη συνάρτηση κερδών και τη συνάρτηση ζήτησης της επιχείρησης.**

ΛΥΣΗ:

Η συνάρτηση κόστους είναι $TC = \int MC dQ = \int Q(1+3Q)^{-3/2} dQ$.

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες είναι:

$$TC = -\frac{2}{3}Q(1+3Q)^{-1/2} + \frac{4}{9}(1+3Q)^{1/2} + C_0$$

Για Q=0 είναι $TC = \frac{4}{9} + C_0 = 600$ ή $C_0 = \frac{5396}{9}$.

Η συνάρτηση εσόδων είναι $R = \int MR \cdot dQ = 25Q - 8Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$.

Η συνάρτηση κερδών είναι:

$$\pi = TR - TC = 25Q - 8Q^2 + \frac{1}{3}Q^3 + \frac{2}{3}Q(1+3Q)^{-1/2} - \frac{4}{9}(1+3Q)^{1/2} - \frac{5396}{9}$$

Είναι $R = P \cdot Q = 25Q - 8Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$, οπότε η συνάρτηση ζήτησης είναι :

$$P = 25 - 8Q + \frac{1}{3}Q^2$$

2. Έστω ότι η οριακή ροπή για κατανάλωση είναι $MPC = 0{,}6 + 0{,}2Y^{-1/2}$ και ότι η κατανάλωση ισούται με το εισόδημα Y όταν Y=100. Να βρείτε τη συνάρτηση κατανάλωσης.

ΛΥΣΗ:

Είναι $C = \int MPC \cdot dY = \int (0{,}6 + 0{,}2Y^{-1/2})dY = 0{,}6Y + 0{,}4Y^{1/2} + C_0$.

Όταν Y=100 είναι C=Y, οπότε 100=60+4+C_0 ή C_0=36.

3. Η συνάρτηση καθαρών επενδύσεων σε μια οικονομία είναι $\mathrm{I(t)} = 6\mathrm{t}^{1/3}$, όπου I(t) είναι οι καθαρές επενδύσεις το χρόνο t και το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου είναι 20 μονάδες.

(α) Να βρείτε το απόθεμα κεφαλαίου το χρόνο t=5.

(β) Να βρείτε τις καθαρές επενδύσεις που έγιναν στο διάστημα από t=2 έως t=4.

ΛΥΣΗ:

(α) Το απόθεμα κεφαλαίου το χρόνο t είναι:

$$K(t) = \int I(t)dt = \int 6t^{1/3}dt = \frac{9}{2}t^{4/3} + K_0 = \frac{9}{2}t^{4/3} + 20.$$

Το απόθεμα στο t=5 είναι $K(5) = \frac{9}{2}5^{4/3} + 20 = 58{,}475$.

(β) Οι καθαρές επενδύσεις στο διάστημα από t=2 έως t=4 είναι:

$$I_{2,4} = \int_2^4 I(t)dt = \frac{9}{2}t^{4/3}\Big|_2^4 = \frac{9}{2}\left(4^{4/3} - 2^{4/3}\right) = 17{,}226$$

4. Έστω ότι ένας ενοικιαστής νοικιάζει ένα σπίτι με μηνιαίο ενοίκιο 1000 Ευρώ. Ο ιδιοκτήτης του σπιτιού ενδιαφέρεται να πουλήσει το σπίτι. Αν ο ενοικιαστής έχει τη δυνατότητα να δανειστεί από το τραπεζικό σύστημα όποιο ποσό επιθυμεί, με ετήσιο επιτόκιο 5% και συνεχή ανατοκισμό, ποια είναι η ανώτατη τιμή πώλησης που θα δεχτεί ώστε να αγοράσει αυτός το σπίτι;

ΛΥΣΗ:

Η ανώτατη τιμή που θα δεχθεί ο ενοικιαστής είναι η παρούσα αξία μιας διαρκούς σειράς πληρωμών με ρυθμό 12·1000=12000 Ευρώ ανά έτος και επιτόκιο 5%, δηλαδή:

$$PV = \int_0^{+\infty} 12000 e^{-0,05t} dt = \frac{12000}{0,05} = 240000 \text{ Ευρώ.}$$

5. Μία εταιρία έχει αναλάβει μία επενδυτική δραστηριότητα της οποίας τα έσοδα μεταβάλλονται με ρυθμό $R'(t) = 800 - \frac{t^2}{4}$, ενώ τα έξοδα μεταβάλλονται με ρυθμό $C'(t) = 2t^2$. Η υπολειμματική αξία του εξοπλισμού που χρησιμοποιείται για την επένδυση μειώνεται με ρυθμό $D(t) = \frac{1}{t+1}$, όπου t ο χρόνος.

(α) Να βρείτε για πόσο χρόνο συμφέρει η συνέχιση αυτής της δραστηριότητας.

(β) Να βρείτε τα συνολικά κέρδη που θα αποφέρει στην εταιρία αυτή η επενδυτική δραστηριότητα.

ΛΥΣΗ:

(α) Τα κέρδη μεγιστοποιούνται όταν τα οριακά έσοδα ισούνται με τα οριακά κόστη, δηλαδή όταν:

$$R'(t) + D(t) = C'(t) \text{ ή } 800 - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{t+1} = 2t^2 \text{ ή } 9t^3 + 9t^2 - 3200t - 3204 = 0$$

Προσεγγιστικά είναι t=18,855 έτη.

(β) Τα συνολικά κέρδη είναι:

$$\int_0^{18,855} (800 - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{t+1} - 2t^2) dt = 800t\Big|_0^{18,855} - \frac{3t^3}{4}\Big|_0^{18,855} + ln(t+1)\Big|_0^{18,855} = 10060,36$$

χρηματικές μονάδες.

6. Έστω ότι η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι $MC(Q) = Q^{3/2} + 8$, όπου Q είναι η παραγόμενη ποσότητα. Να βρείτε το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή P=9, στην τιμή P=72 και το πλεόνασμα του παραγωγού καθώς η τιμή αυξάνεται από P=9 σε P=72.

ΛΥΣΗ:

Για P=9 είναι $Q = (9-8)^{2/3} = 1$. Το πλεόνασμα του παραγωγού είναι:

$$PS_1 = 9 \cdot 1 - \int_0^1 (Q^{3/2} + 8) dQ = 9 - \frac{2}{5} Q^{5/2}\Big|_0^1 - 8Q\Big|_0^1 = \frac{3}{5}$$

Για P=72 είναι $Q=(72-8)^{2/3}=16$. Το πλεόνασμα του παραγωγού είναι:

$$PS_2 = 64\cdot 72 - \int_0^{16}(Q^{3/2}+8)dQ = 4608 - \frac{2}{5}Q^{5/2}\Big|_0^{16} - 8Q\Big|_0^{16} = 4480 - \frac{2048}{5} = \frac{20352}{5}$$

Το πλεόνασμα καθώς η τιμή αυξάνει από P=9 σε P=72 είναι:

$$\Delta PS = PS_2 - PS_1 = \frac{20352}{5} - \frac{3}{5} = \frac{20349}{5} = 4069{,}8$$

7. Η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος περιγράφεται από τη σχέση $P^3Q=800$ και η συνάρτηση προσφοράς Q=50P. Να υπολογίσετε το πλεόνασμα του παραγωγού, το πλεόνασμα του καταναλωτή και το κοινωνικό πλεόνασμα.

ΛΥΣΗ:

Η τιμή ισορροπίας είναι P*=2 και η ποσότητα ισορροπίας Q*=100.

Το πλεόνασμα του παραγωγού είναι:

$$PS = 2\cdot 100 - \int_0^{100}\frac{Q}{50}dQ = 200 - \frac{Q^2}{2}\Big|_0^{100} = 100$$

Επειδή η συνάρτηση ζήτησης δε μηδενίζεται, το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι:

$$CS = \lim_{P_0\to+\infty}\int_2^{P_0}\frac{800}{P^3}dP = 800\cdot\lim_{P_0\to+\infty}\left(-\frac{P^{-2}}{2}\Big|_2^{P_0}\right) = -400\left(\lim_{P_0\to+\infty}\frac{1}{P_0^2}-\frac{1}{4}\right) = 100$$

Επομένως, το κοινωνικό πλεόνασμα είναι CS+PS=200.

8. Η συνάρτηση οριακού κόστους μιας πλήρως ανταγωνιστικής επιχείρησης είναι $\mathrm{MC}=3\mathrm{Q}+4$, όπου Q είναι η παραγόμενη ποσότητα. Υποθέστε ότι υπάρχουν συνολικά 100 τέτοιες επιχειρήσεις, οι οποίες έχουν την ίδια συνάρτηση κόστους. Να βρείτε το πλεόνασμα του παραγωγού για κάθε επιχείρηση όταν η τιμή είναι P=20 χρηματικές μονάδες, καθώς και το πλεόνασμα του παραγωγού για το σύνολο της αγοράς.

ΛΥΣΗ:

Η παραγόμενη ποσότητα από κάθε επιχείρηση προσδιορίζεται από τη σχέση P=MC(Q). Για P=20 είναι Q=16/3. Το πλεόνασμα του παραγωγού για κάθε επιχείρηση είναι:

$$PS = 20\cdot\frac{16}{3} - \int_0^{16/3}(3Q+4)dQ = 20\cdot\frac{16}{3} - \frac{3}{2}Q^2\Big|_0^{16/3} - 4Q\Big|_0^{16/3} = \frac{320}{3} - \frac{128}{3} - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$$

.

Η καμπύλη προσφοράς για την κάθε επιχείρηση είναι P=MC=3Q+4 ή $Q=\frac{1}{3}P-\frac{4}{3}$. Για το σύνολο των 100 επιχειρήσεων είναι $Q=\frac{100}{3}P-\frac{400}{3}$. Για P=20 είναι $Q=\frac{1600}{3}$ και το πλεόνασμα του παραγωγού για το σύνολο της αγοράς είναι:

$$PS = 20 \cdot \frac{1600}{3} - \int_0^{1600/3} S(Q)dQ = 20 \cdot \frac{1600}{3} - \int_0^{1600/3} (0{,}03Q + 4)dQ = 20 \cdot \frac{1600}{3} - \frac{0{,}03}{2} Q^2 \Big|_0^{1600/3} - 4Q\Big|_0^{1600/3} =$$

$$= 20 \cdot \frac{1600}{3} - \frac{0{,}03}{2} \cdot \frac{1600^2}{9} - 4 \cdot \frac{1600}{3} = 0$$