ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

ΤΟ ΠΑΡΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ περιλαμβάνει 15 επιλεγμένες εργαστηριακές ασκήσεις Πανεπιστημιακής Φυσικής για πρωτοετείς φοιτητές των Θετικών και Πολυτεχνικών σχολών. Οι ασκήσεις αυτές μπορούν να διδαχτούν στα πλαίσια ενός διδακτικού εξαμήνου. Είναι αντιπροσωπευτικές ενός σημαντικού μέρους της βασικής ύλης της Φυσικής που διδάσκονται οι φοιτητές και περιλαμβάνουν Ηλεκτρομαγνητισμό και Σύγχρονη Φυσική. Το σύγγραμμα αυτό αποτελεί επιπλέον του 50 % προσαύξηση του προηγούμενου συγγράμματος «ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ», αφού στις 10 υπάρχουσες ασκήσεις προστέθηκαν 5 επιπλέον ασκήσεις, με σκοπό να καλυφθούν περισσότερα βασικά κεφάλαια της Πανεπιστημιακής Φυσικής.

Ο σκοπός του συγγράμματος είναι να αναδείξει το γεγονός ότι η Φυσική, το θεμέλιο όλων των επιστημών του μηχανικού, είναι πειραματική επιστήμη, επειδή όλοι οι γνωστοί νόμοι που περιγράφουν τα φυσικά φαινόμενα προέκυψαν από πειράματα. Η επιλογή και ο σχεδιασμός των πειραμάτων έγινε έτσι ώστε να αναδειχθεί ότι μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων πειραμάτων εξάγονται οι νόμοι της Φυσικής, οι οποίοι περιγράφουν ποσοτικά θεμελιώδη φυσικά φαινόμενα.

Οι ασκήσεις μπορούν να διδαχτούν αυτοτελώς ή παράλληλα με τη διδασκαλία του αντίστοιχου μαθήματος. Σε κάθε άσκηση, παράλληλα με τη μελέτη των φυσικών φαινομένων, δίδεται έμφαση σε βασικές εφαρμογές, οι οποίες περιλαμβάνονται στη διαδικασία της εκτέλεσης της άσκησης. Οι φοιτητές εκτός του ότι θα εξοικειωθούν στη χρήση βασικών οργάνων μετρήσεων, επιπλέον θα κατανοήσουν πώς γίνεται η επεξεργασία των μετρήσεων, μέσω κατάλληλων γραφικών παραστάσεων και με τη βοήθεια υπολογιστή, όπου απαιτείται. Από την ανάλυση των δεδομένων φανερώνεται πώς μπορούν να αποκαλυφθούν βασικοί φυσικοί νόμοι που διέπουν ποσοτικά τα φαινόμενα που διερευνώνται πειραματικά.

Μια καινοτομία του παρόντος συγγράμματος είναι ότι προτείνονται νέες ασκήσεις που παρουσιάζονται για πρώτη φορά και οι οποίες αφορούν την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών, οι οποίες παρουσιάζονται συνήθως στα βιβλία Πανεπιστημιακής Φυσικής με έναν περισσότερο μαθηματικό ή θεωρητικό τρόπο. Οι ασκήσεις αυτές αφορούν τις έννοιες της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, οι οποίες όμως αναδεικνύονται μέσα από την ανάλυση πειραματικών δεδομένων φυσικών ποσοτήτων που εξελίσσονται σχετικά γρήγορα χρονικά και καταγράφονται κατά την εκτέλεση των σχετικών πειραμάτων. Μια άλλη καινοτόμα σημαντική άσκηση αφορά την μελέτη και την ποσοτική μέτρηση του μαγνητικού πεδίου που παράγει ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός, με την βοήθεια μιας απλής μαγνητικής πυξίδας σε ρόλο ευαίσθητου μαγνητομέτρου. Με το πείραμα αυτό προσδιορίζεται το διάνυσμα καθώς και η μεταβολή του μέτρου του μαγνητικού πεδίου με την απόσταση από τον αγωγό, όπως προβλέπεται από το νόμο Biot-Savart. Στην πραγματικότητα χρησιμοποιήθηκε η μαγνητική βελόνα πυξίδας για την μέτρηση απευθείας του μαγνητικού πεδίου, σε μια καινοτόμα παραλλαγή του ιστορικού πειράματος που έκαναν οι Biot και Savart, με το οποίο εξήγαγαν τον ομώνυμο νόμο κάνοντας χρήση της μαγνητικής βελόνας.

Το παρόν σύγγραμμα υιοθετεί τη δομή και τις καινοτομίες του προηγούμενου συγγράμματος, όπως είναι η εκτενής χρήση γραφικής περιγραφής και επεξήγησης των φυσικών φαινομένων και συσκευών που χρησιμοποιούνται. Έμφαση δίνεται στο να προκαλέσουν τον φοιτητή να συμμετάσχει ενεργά στη διεξαγωγή των εργαστηριακών ασκήσεων. Για το λόγο αυτό, σημαντικό βάρος δίνεται στη μελέτη και προετοιμασία πριν το εργαστήριο, ώστε εν συνεχεία κατά τη διεξαγωγή της άσκησης ο φοιτητής να αποκομίσει τα περισσότερα δυνατά οφέλη, να κατανοήσει τα φυσικά φαινόμενα σε βάθος και να επιλύσει τις τυχόν απορίες του. Τα βασικά φαινόμενα που εμπλέκονται στην άσκηση περιγράφονται συνοπτικά και αυτοτελώς. Έτσι δεν είναι απαραίτητη η μελέτη πρόσθετης βιβλιογραφίας. Οι φοιτητές θα πρέπει να προετοιμαστούν πριν την διεξαγωγή της άσκησης γιατί θα πρέπει να απαντούν γραπτώς σε σχετικές ερωτήσεις κατανόησης. Πρέπει να σημειώσουμε πως οι ερωτήσεις και η αναφορά μαζί με τους πίνακες μετρήσεων και τις απαραίτητες γραφικές παραστάσεις υπάρχουν ήδη, ώστε να συμπληρωθούν από τους φοιτητές σε αντίστοιχες παραγράφους μέσα στο ίδιο το σύγγραμμα. Έτσι δεν χρειάζεται τετράδιο εργαστηρίου και μιλιμετρέ χαρτιά που θα έπρεπε να κοπούν και να επικολληθούν στο τετράδιο εργαστηρίου. Επιπλέον, με τον τρόπο αυτό οι φοιτητές μαθαίνουν πώς πρέπει να συντάσσεται σωστά μια αναφορά.

Πιο συγκεκριμένα, πριν ο κάθε φοιτητής εκτελέσει την κάθε άσκηση, θα πρέπει να έχει μελετήσει καλά την άσκηση που είναι προγραμματισμένη να εκτελεστεί. Η μελέτη επικεντρώνεται στην παράγραφο Α. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ. Στο εργαστήριο προσέρχεται ο φοιτητής έχοντας το παρόν σύγγραμμα, όπου θα έχει ήδη απαντήσει γραπτώς στα ερωτήματα που υπάρχουν στην παράγραφο: Β. ΠΡΟΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ ΠΡΙΝ ΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ. Τις απαντήσεις των ερωτημάτων μπορεί σχετικά εύκολα να τις βρει ο φοιτητής μελετώντας ολόκληρη την παραπάνω παράγραφο Α. Εν συνεχεία ο φοιτητής εκτελεί την άσκηση σύμφωνα με τις οδηγίες στην παράγραφο Γ. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΤΟ ΕΓΑΣΤΗΡΙΟ. Εκεί θα συμπληρώνεται η αναφορά που περιλαμβάνει τους απαραίτητους Πίνακες, θα γίνεται η απαραίτητη επεξεργασία των μετρήσεων και θα γίνονται οι απαραίτητες γραφικές παραστάσεις με την βοήθεια PC υπολογιστή όπου χρειάζεται, θα απαντώνται γραπτώς τα σχετικά ερωτήματα και θα γράφονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την άσκηση.

Μια άλλη ιδιαιτερότητα του παρόντος συγγράμματος είναι η παρουσίαση στο τέλος της κάθε άσκησης ενδεικτικών μετρήσεων και αποτελεσμάτων που προκύπτουν, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στην άσκηση, καθώς και βασικών συμπερασμάτων που μπορούν να εξαχθούν από τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να γίνει σύγκριση και έλεγχος των μετρήσεων και της ακρίβειας των αποτελεσμάτων, μετά τη σχετική επεξεργασία των δεδομένων. Διαπιστώνεται, από τα αποτελέσματα που παρατίθενται, ότι μπορούν να επιτευχθούν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα με τη χρήση σχετικά απλού και φθηνού εξοπλισμού για την εκτέλεση των παρόντων ασκήσεων.

Τέλος η σημαντικότερη και ιδιαίτερη καινοτομία του βιβλίου αφορά τη δυνατότητα της εικονικής εκτέλεσης των ασκήσεων. Συγκεκριμένα η εκτέλεση των πειραμάτων έχει καταγραφεί σε διάφορα video, τα οποία θα είναι αναρτημένα στο διαδίκτυο στον ιστότοπο του βιβλίου και θα μπορούν να ανανεώνονται. Μέσα από τα video αυτά ο αναγνώστης θα μπορεί να παρακολουθήσει την εξέλιξη των πειραμάτων. Θα μπορεί να καταγράψει τις δικές του μετρήσεις που θα παρακολουθεί σε πραγματικό χρόνο, όπως όταν θα τις κατέγραφε ο ίδιος αν διέθετε τον απαραίτητο εξοπλισμό και μάλιστα καλύτερα, γιατί υπάρχει η δυνατότητα πολλών επαναλήψεων του video για καλύτερη κατανόηση.

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ - ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΜΕΤΡΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ

Σκοπός: Να γίνει κατανοητό τι είναι σημαντικά ψηφία (ΣΨ), τι είναι ακρίβεια ή σφάλμα μετρήσεως, πώς υπολογίζουμε τη μετάδοση σφάλματος από υπολογισμούς. Όλα αυτά εφαρμόζονται στη μέτρηση της πυκνότητας ενός αγνώστου σώματος.

❍ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΣΚΕΥΕΣ

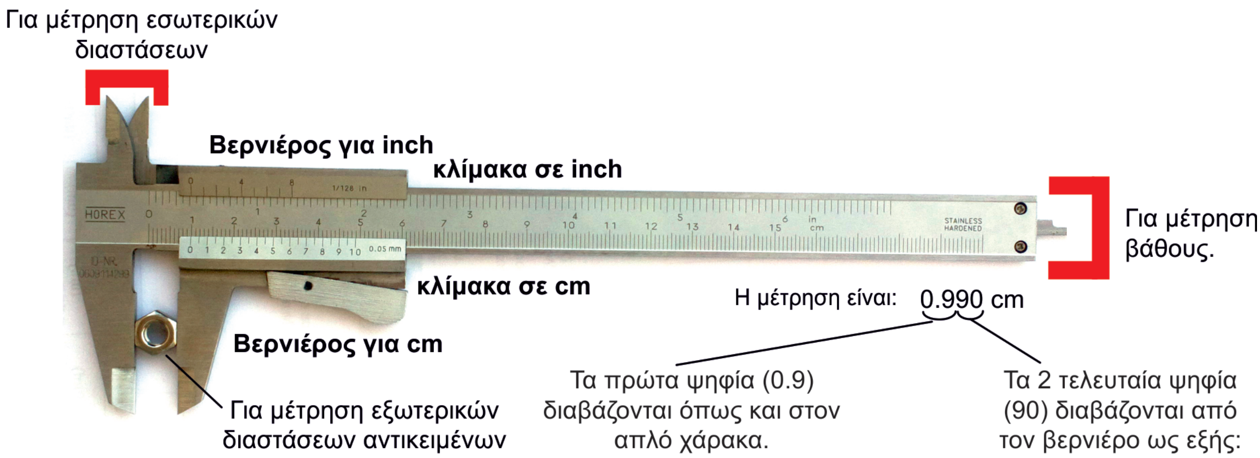
1. Ζυγός ακριβείας

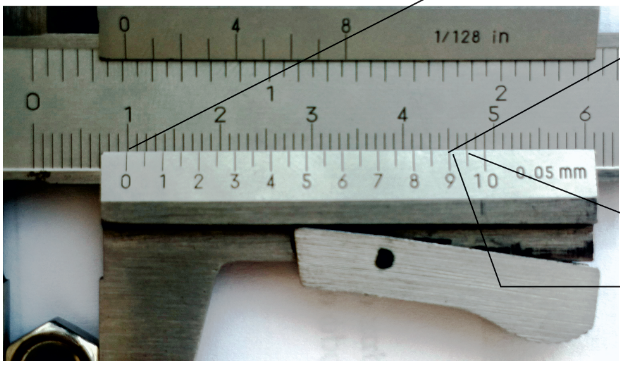
Φωτογραφία 1 ζυγού πριν τη μέτρηση όπου μηδενίζεται η ένδειξη με το πάτημα της γκρίζας μπάρας στο κάτω μέρος από την οθόνη του ζυγού.

Φωτογραφία 2 ζυγού κατά τη μέτρηση όπου τοποθετείται το προς ζύγιση σώμα και διαβάζεται η ένδειξη της μάζας του σώματος σε g.

Η ακρίβεια του ζυγού είναι $\Delta m = 0.01$ g, δηλαδή προσδιορίζεται από το τελευταίο ΣΨ (2 ψηφία μετά την υποδιαστολή).

2. Διαστημόμετρο





Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τα παρακάτω είναι πολύ σημαντικά και πρέπει να τα ακολουθούμε σε κάθε εργαστηριακή άσκηση.

Α1. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ ΑΠΟ ΜΕΤΡΗΣΗ

1. Όταν κάνω μια μέτρηση γράφω όλα τα ψηφία που εμφανίζονται στο όργανο μέχρι και το τελευταίο ψηφίο, το λεγόμενο **αβέβαιο ψηφίο**, το οποίο καθορίζεται από την **ακρίβεια του οργάνου** ή από τα σφάλματα της μέτρησης.

> **ΣΗΜΕΙΩΣΗ**: Κανένα όργανο μέτρησης όσο μεγάλης ακρίβειας και αν είναι,, **πάντα** έχει μία πεπερασμένη ακρίβεια μέχρι το λεγόμενο αβέβαιο ψηφίο, πέραν του οποίου δεν γνωρίζω και δεν έχει νόημα και **είναι εσφαλμένο** να γράφω ψηφία.

2. Μετράω το μήκος L ενός σώματος χρησιμοποιώντας ένα χάρακα που έχει ακρίβεια $\Delta L = 0.1$ cm. Έστω ότι βρίσκω $L = 5.3$ cm. Τότε λέμε ότι η μέτρηση του μήκους έχει 2 σημαντικά ψηφία (ΣΨ), το αβέβαιο ψηφίο είναι το 3 και γράφω $L \pm \Delta L = (5.3 \pm 0.1)$ cm.

Έχει επικρατήσει η εσφαλμένη συνήθεια πως τα ΣΨ είναι τα ψηφία μετά από την υποδιαστολή. Αυτά λέγονται δεκαδικά ψηφία και δεν είναι τα ΣΨ.

Η ακρίβεια του οργάνου και γενικότερα το σφάλμα το *γράφω πάντα με 1 ΣΨ*· *δεν έχουν νόημα και* ***είναι λάθος*** *να γράφω περισσότερα από 1 ΣΨ στην ακρίβεια ή το σφάλμα, γιατί δηλώνει το αβέβαιο ψηφίο το οποίο είναι 1 και έτσι εξ ορισμού είναι 1 ΣΨ.*

3. Αν μετρήσω 15.3 cm, τότε έχω 3 ΣΨ.

4. Αν μετρήσω 0.5 cm, τότε έχω 1 ΣΨ, γιατί στην αρχή (αριστερά) των αριθμών τα μηδενικά δεν είναι ΣΨ. Αυτό γιατί μπορώ να βάζω αυθαίρετα όσα μηδενικά θέλω αριστερά. Για παράδειγμα, τον αριθμό 5.3 μπορώ να τον γράψω:

0.53×10 τον οποίο μπορώ να γράψω ακόμα σαν 0.053×10^2 ή 0.0053×10^3 ή...

γιατί σε όλες αυτές τις περιπτώσεις τα ΣΨ παραμένουν 2. Έτσι μπορώ να προσθέτω αυθαίρετα εμπρός από τον αριθμό όσα μηδενικά θέλω γιατί πάντα γράφεται με κατάλληλη δύναμη του 10 χωρίς να αλλάζουν τα ΣΨ.

5. Αντίθετα δεν μπορώ να προσθέτω αυθαίρετα μηδενικά στο τέλος, γιατί αυξάνω αυθαίρετα τα σημαντικά ψηφία. Παράδειγμα το 5.3 δεν μπορώ να το γράψω σαν 5.30 (3 ΣΨ) ή 5.300 (4 ΣΨ) ή 5.30000 (6 ΣΨ)…

6. Φυσικά τα μηδενικά ενδιάμεσα στα ψηφία του αριθμού είναι πάντα ΣΨ, παράδειγμα ο 5.03 έχει 3 ΣΨ.

7. Αν στη μέτρηση με το χάρακα έβρισκα ακριβώς 5 cm, τότε πρέπει να γράψω 5.0 cm ή στη μορφή $L \pm \Delta L = (5.0 \pm 0.1)$ cm. Αν έγραφα 5, τότε θα εννοούσα **εσφαλμένα** ότι έχω ακρίβεια στα cm και όχι στο δέκατο 0.1 cm. Αν η ακρίβεια του χάρακα ήταν μεγαλύτερη, π.χ. αν $\Delta L = 0.002$ cm, τότε την τιμή 5 ακριβώς θα την έγραφα προσθέτοντας και τα απαραίτητα μηδενικά τότε θα έγραφα (5.000 ± 0.002) cm.

Σημείωση: Ο παραπάνω κανόνας δεν πρέπει να συγχέει το γεγονός ότι αν γράψουμε 5.000 στο κομπιουτεράκι, τότε στη οθόνη του εμφανίζεται αυτόματα το 5, γιατί απλά έτσι είναι προγραμματισμένο!

8. Αν μέτραγα L τριακόσια σαράντα μέτρα, με ακρίβεια 10 m, τότε δεν μπορώ να γράψω 340 m γιατί θα εννοούσα **εσφαλμένα** ότι έχω ακρίβεια στο μέτρο (1 m) ή μερικά μέτρα. Το σωστό θα είναι να γράψω: $L \pm \Delta L = (3.4 \pm 0.1) \times 10^2$m. Αυτή η γραφή είναι η λεγόμενη επιστημονική μορφή.

Α2. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ ΑΠΟ ΠΡΑΞΕΙΣ

Όταν κάνω πράξεις **πρόσθεση ή αφαίρεση**, τότε κάνω τις πράξεις αυτές μόνο μεταξύ των γνωστών ψηφίων.

Παραδείγματα:

Πρόσθεση:

713.545
+ 504.3;;
= 1217.8;;

Αφαίρεση:

523.545
– 513.3;;
= 10.2;;

Στα παραπάνω παραδείγματα τα ΣΨ στα εκατοστά και στα χιλιοστά στον 2ο προσθετέο δεν τα γνωρίζω, οπότε αυτά τα ψηφία δεν μπορώ να τα υπολογίσω στην πρόσθεση ή αφαίρεση και για αυτό γράφω το αντίστοιχο αποτέλεσμα με τα υπόλοιπα ΣΨ.

Όταν κάνω πράξεις **πολ/σμό ή διαίρεση** ισχύει ο προσεγγιστικός κανόνας ότι κρατώ τόσα σημαντικά ψηφία (ΣΨ) όσα ο αριθμός με τα λιγότερα ΣΨ.
Παράδειγμα: Στον πολ/σμό 845.32 x 2.3 το κομπιουτεράκι θα μου δώσει αποτέλεσμα 1691.236.
Όμως θα γράψω σαν αποτέλεσμα

$735.32 \times 2.3 = 1.7 \times 10^3$

(5 ΣΨ) x (2 ΣΨ) = (2 ΣΨ)

γιατί ο αριθμός με τα λιγότερα ΣΨ είναι ο 2.3 (2 ΣΨ) άρα το αποτέλεσμα θα έχει 2 ΣΨ, δηλαδή 1.7
Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να εξηγηθεί ως εξής:
Ο 2.3 έχει 2 ΣΨ και δηλώνει με ακρίβεια τουλάχιστον 0.1. Εάν κάνω σφάλμα 0.1, δηλαδή αν αντί για 2.3 πολλαπλασιάσω με το 2.4 τότε θα πάρω αποτέλεσμα

735.32 x 2.4 = 1764.768... αντί για 1691.236...

Δηλαδή το σφάλμα μεταδίδεται στο 2ο ΣΨ του γινομένου και για αυτό γράφω το αποτέλεσμα 1.7×10^3 με μόνο 2 ΣΨ, δηλαδή όσα και ο αριθμός (2.3) με τα λιγότερα ΣΨ.

Α3. ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Έστω ότι υπολογίζω την ταχύτητα $\upsilon = x/t$ ενός σώματος που προκύπτει από μετρήσεις του διαστήματος x και του χρόνου t.
Όμως το διάστημα μετριέται με ακρίβεια Δx και ο χρόνος μετριέται με ακρίβεια Δt. Επομένως έχω κάποια ακρίβεια ή σφάλμα $\Delta\upsilon$ στον υπολογισμό της ταχύτητας.
Επομένως πρέπει να υπολογίσω πόσο σφάλμα $\Delta\upsilon$ μεταδίδεται στον υπολογισμό της υ από τα Δx και τα Δt.

Παράδειγμα
Έστω ότι μετρώ το $x = 54.3$ m με ακρίβεια $\Delta x = 0.1$ m και
$t = 12.35$ s με ακρίβεια $\Delta t = 0.02$ s.
Υπολογίζω $\upsilon = 54.3$ m / 12.35 s = 4.3967611… m/s
Με πόσα ΣΨ μπορώ να γράψω το αποτέλεσμα της υ;
Δηλαδή θα πρέπει να υπολογίσω πόση είναι η ακρίβεια $\Delta\upsilon$ στον υπολογισμό της υ.

Πρακτικά,
μπορώ να εκτιμήσω το σφάλμα $\Delta\upsilon_x$ που μεταδίδεται στον υπολογισμό της υ από το σφάλμα $\Delta x = 0.1$ m υπολογίζοντας π.χ. την
$\upsilon = (x + \Delta x)/t = (54.3 + 0.1)$ m / 12.35 s = 4.4048583… m/s
δηλαδή κάνω σφάλμα $\Delta\upsilon = 4.3967611\ldots - 4.4048583 = -0.0080971\ldots$ m/s δηλαδή $\Delta\upsilon_x = -0.0080971\ldots$ m/s, και επειδή **το σφάλμα δίνεται πάντα με 1 ΣΨ** γιατί δηλώνει το αβέβαιο (1) ψηφίο τότε στρογγυλεύω σε: $\Delta\upsilon_t = -0.008$ m/s.

Ανάλογα μπορώ επίσης να εκτιμήσω το σφάλμα $\Delta\upsilon_t$ που μεταδίδεται στον υπολογισμό της υ από το σφάλμα στη μέτρηση του χρόνου
$\Delta t = 0, 02$ s, υπολογίζοντας τη
$\upsilon = x/(t + \Delta t) = 54.3$ m /(12, 35 + 0.02) s = 4.389652… m/s
δηλαδή κάνω σφάλμα $\Delta\upsilon_t = 4.389652\ldots$ m/s – 4.3967611… m/s = – 0.071086… m/s
ή $\Delta\upsilon_t = -0.071086$ m/s
και επειδή το σφάλμα δίνεται πάντα με 1 ΣΨ γιατί δηλώνει το αβέβαιο (1) ψηφίο τότε στρογγυλεύω
$\Delta\upsilon_t = -0.07$ m/s.
Το συνολικό σφάλμα και από το $\Delta\upsilon_x$ και από το $\Delta\upsilon_t$ υπολογίζεται από το πιθανό σφάλμα:
$\Delta\upsilon = [(\Delta\upsilon_x)^2 + (\Delta\upsilon_t)^2]^{0.5} = (0.0080971^2 + 0.071086^2)^{0.5}$ m/s =
$= (0.00006556302841 + 0.0050532219396)^{0.5}$m/s = 0.0717635... m/s
δηλαδή $\Delta\upsilon = 0.07$ m/s, το οποίο συμφωνεί με το $\Delta\upsilon_t$, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $\Delta\upsilon_x$ και έτσι έχει τη μεγαλύτερη συμμετοχή και επιβαρύνει περισσότερο στο συνολικό σφάλμα.

Παρατηρήστε πως στον παραπάνω υπολογισμό του πιθανού σφάλματος τα $\Delta\upsilon_x$ και $\Delta\upsilon_t$ τα αντικατέστησα με όλα τα ψηφία που υπολογίστηκε χωρίς στρογγυλοποίηση σε 1 ΣΨ. Η στρογγυλοποίηση γίνεται πάντα μετά την τελευταία πράξη.

Κανόνας: Όταν κάνω πράξεις ποτέ δεν στρογγυλεύω στις ενδιάμεσες πράξεις γιατί έτσι θα μεταδοθεί μεγάλο σφάλμα στο τελικό αποτέλεσμα.

Α4. ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Όμως πώς μπορώ να υπολογίσω με ακρίβεια θεωρητικά τα Δυ, $Δυ_x$ και $Δυ_t$;
Παρατηρώ πως το $Δυ_x$ το υπολόγισα πριν από τη διαφορά
$Δυ_x = (x + Δx)/t – x/t$ = (μεταβολή της ταχύτητας ανά μονάδα μήκους) επί Δx.
Όμως: η μεταβολή της ταχύτητας ανά μονάδα μήκους είναι η παράγωγος της υ ως προς x.
Επειδή έχουμε 2 μεταβλητές υ(x, t) τότε η παράγωγος ως προς x είναι η μερική παράγωγος της υ ως προς x δηλαδή $\partial υ/\partial x$ όπου παραγωγίζω κανονικά ως προς x θεωρώντας το t σταθερό.
Άρα $Δυ_x = \partial υ/\partial x\ Δx = [\partial/\partial x\ (x/t)]\ Δx = 1/t\ Δx = (1/12.35)\ 0.1$ m/s = 0.080971... m/s.
Ανάλογα
$Δυ_t = (x)/(t + Δt) – x/t$ = (μεταβολή της ταχύτητας ανά μονάδα χρόνου) επί Δt.
Όμως: η μεταβολή της ταχύτητας ανά μονάδα χρόνου είναι η παράγωγος της υ ως προς t.
$Δυ_t = \partial υ/\partial t Δt = [\partial/\partial\ t\ (x/t)]\ Δt = – x/t^2 Δt = – 54.3/(12.35)^2\ 0.02$ m/s = – 0.07149… m/s.
Επομένως θα υπολογίσω το πιθανό σφάλμα στην ταχύτητα
$Δυ = [(Δυ_x)^2 + (Δυ_t)^2]^{0.5} = [(0.080971…)^2 + (– 0.07149…)^2]^{0.5}$ m/s =
$= (0.006556… + 0.0051108…)^{0.5}$m/s = 0.1080129… m/s και με 1 ΣΨ γίνεται: Δυ = 0.1 m/s.
Άρα υ ± Δυ = [54.3 m / 12.35 s] ± 0.1 = (4.3967611336 ± 0.1) m/s,
όπου το 3 στρογγυλοποιείται στο επόμενο ψηφίο το 4, επειδή το επόμενο ψηφίο είναι 9 δηλαδή μεγαλύτερο του 5, τότε το 4.39… γίνεται 4.4.
Σαν συμπέρασμα έχω ότι: υ ± Δυ = (4.4 ± 0.1) m/s.

Β. ΠΡΟΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ ΠΡΙΝ ΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Θα πρέπει να έχετε μελετήσει και κατανοήσει όλα τα παραπάνω εισαγωγικά στοιχεία.
Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις κατανόησης.

1. Σημειώστε δίπλα στους παρακάτω αριθμούς πόσα σημαντικά ψηφία έχουν.

23.54
13.540
1800.000
0.000018000

2. Γράψτε τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων με τα σωστά ΣΨ.

245.2734 x 56.21 =
846.7235 + 76.79 =
0.0234 x 5.4857 =

3. Έστω ότι ζυγίζω τη μάζα ενός σώματος και βρίσκω ενάμιση τόνο με ακρίβεια εκατό κιλά. Γράψτε τη μάζα του σώματος στη μορφή:

m ± Δm = (....... ± ......) x 10… Kg

Γ. ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Γ1. (Εργασία πριν από το εργαστήριο)

■ ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ (γράφετε με δικά σας λόγια τι θα μετρήσετε και για ποιο σκοπό)

■ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ (περιγράψτε τα όργανα που θα χρησιμοποιήσετε)

Γ2. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Θα μετρηθεί η μάζα και οι διαστάσεις ενός σώματος για να προσδιοριστεί η πυκνότητα ενός σώματος. Ακολούθως από τη σύγκριση της μετρούμενης τιμής με τις γνωστές τιμές πυκνοτήτων διαφόρων υλικών θα γίνει η ταυτοποίηση του υλικού.

Πρέπει να σημειωθεί πως ακόμα και στην απίθανη περίπτωση όπου η τιμή της πυκνότητας που υπολογίσουμε μπορεί να ταυτίζεται με κάποια γνωστή τιμή πυκνότητας, αυτό δεν μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα πως το σώμα που μετρήσαμε ταυτίζεται με αυτό το γνωστό σώμα. Αυτό οφείλεται στα σφάλματα ή την ακρίβεια των μετρήσεων και μπορεί να οδηγήσει στο γεγονός εντελώς τυχαία να μετρήσουμε την ίδια πυκνότητα με αυτή κάποιου σώματος. Αν επαναλάβουμε τις μετρήσεις τότε πιθανότατα θα υπολογίσουμε διαφορετική τιμή πυκνότητας. Έτσι με το ίδιο σκεπτικό ακόμα και στην περίπτωση η οποία έχει και τις περισσότερες πιθανότητες, που υπολογίσουμε τιμή πυκνότητας που δεν συμπίπτει με καμία από τις γνωστές τιμές, αυτό δεν θα σημαίνει πως το σώμα που μετράμε είναι διαφορετικό από τα γνωστά σώματα.

Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε το σφάλμα $\Delta\rho$ που μεταβιβάζεται στον υπολογισμό της ρ και ακολούθως θα συγκρίνουμε τις γνωστές τιμές πυκνοτήτων. Οι τιμές που θα εμπίπτουν στο διάστημα $\rho \pm \Delta\rho$ θα καθορίσουν την πιθανή ταυτότητα του υλικού που μελετάμε.

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Μάζα σωμάτων

1. Με τη βοήθεια του ζυγού ζυγίστε τη μάζα m ενός από τα σώματα σφαίρα, κύβος και κύλινδρος που σας διατίθενται για μέτρηση.

2. Καταγράψτε την τιμή της μάζας στον Πίνακα Ι και σημειώστε την ακρίβεια της μέτρησης Δm. Είναι συνήθως η ακρίβεια του οργάνου, το τελευταίο ψηφίο που αλλάζει μεταξύ δύο τιμών.

Διαστάσεις σωμάτων

1. Μετρήστε και καταγράψτε τις απαραίτητες διαστάσεις L μήκους, (π.χ. μήκος L, ύψος H, πλάτος ή διάμετρος D) του σώματος για τον προσδιορισμό του όγκου του.

2. Σημειώστε την ακρίβεια της κάθε μέτρησης ΔL_i (συνήθως είναι η ακρίβεια του διαστημομέτρου αν οι διαστάσεις του σώματος δεν μεταβάλλονται περισσότερο από αυτή την ακρίβεια).

3. Σε κάθε μέτρηση προσέξτε να γράψτε τουλάχιστον τόσα σημαντικά ψηφία ώστε ο αριθμός να συμφωνεί με την ακρίβεια της κάθε μέτρησης (δεν κόβω κανένα ψηφίο, αν το 0 είναι στο τέλος του αριθμού το γράφω, ούτε προσθέτω αυθαίρετα ψηφία).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Μάζα m	Μήκος L	Διάμετρος ή Πλάτος D	Ύψος H
m = ... ± g	L = ... ± cm	D = ... ± cm	H = ... ± cm
ακρίβεια Δm= … … g	ακρίβεια ΔL = … … cm	ακρίβεια ΔD = … … cm	ακρίβεια ΔH = … … cm

Γ3. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Υπολογισμός πυκνότητας.

1. Υπολογίστε την πυκνότητα ρ του σώματος από τη σχέση: $\rho = m/V$.

2. Υπολογίστε το σφάλμα Δρ που μεταδίδεται στον υπολογισμό της ρ (κανόνες μετάδοσης σφάλματος ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με τα παρακάτω παραδείγματα).

Παραδείγματα υπολογισμού του σφάλματος της μέτρησης πυκνότητας σώματος

1ο Παράδειγμα

Θέλω να υπολογίσω την πυκνότητα μιας σφαίρας. Έτσι ζύγισα τη μάζα m = 14.17 g, με ακρίβεια Δm = ± 0.01g, και τη διάμετρο D = 4.28, με ακρίβεια ΔD = ± 0.05 cm, άρα η ακτίνα είναι R = d/2 = 2.14 cm και η ακρίβεια ΔR = ΔD/2 = ± 0.05/2 = ± 0.03 cm. ($V_{σφαίρας} = 4/3\pi R^3$)

Να υπολογιστεί η ακρίβεια (σφάλμα) Δρ στον υπολογισμό της πυκνότητας.
Γράψτε το αποτέλεσμα σαν ρ ± Δρ με τα σωστά ΣΨ.

❁ **Υπόδειξη:** Έστω ότι έχω σφαίρα και μέτρησα μάζα m = 14.17g με ακρίβεια Δm = 0.01g και ακτίνα R = 2.14 cm με ακρίβεια ΔR = 0.003 cm. Θα υπολογίσουμε το σφάλμα $\Delta\rho_m$ που μεταδίδεται στη ρ όταν μεταβάλλεται η m κατά Δm = 0.01g και το σφάλμα $\Delta\rho_R$ που μεταδίδεται στη ρ όταν μεταβάλλεται η ακτίνα R κατά ΔR = 0.03 cm.

Ο τύπος της πυκνότητας της σφαίρας είναι $\rho = m/(4/3\pi R^3)$

$\Delta\rho_m = (\partial\rho/\partial m)\ \Delta m = (\partial\ (m/(4/3\pi R^3))/\ \partial m)\ \Delta m = 1/(4/3\pi R^3)\ \Delta m =$

$= 1/[4/3\ x3.14159x(2.14)^3]\ 0.01\ g/cm^3 = 0.1082070\ldots\ g/cm^3$.

$\Delta\rho_R = (\partial\rho/\partial R)\ \Delta R = (\partial(m/(4/3\pi R^3))/\partial R)\ \Delta R = m/(4/3\pi)\ \partial(R^{-3})/\partial R\ \Delta R =$

$= 3/4\ m/\pi\ (-\ 3R^{-4})\ \Delta R = -\ (3/4)\ (14.17/3.14159)3(2.142)^{-4}]\ 0.003 = -\ 0.0014462\ldots\ g/cm^3$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Προφανώς η σταθερά π γράφτηκε με περισσότερα ΣΨ από αυτά των μετρήσεων, ώστε να μην ακυρώσω την ακρίβεια των μετρήσεων. Για παράδειγμα αν έγραφα **εσφαλμένα π = 3.14 (3ΣΨ)**, τότε αυτή η επιλογή θα ακύρωνε τη μέτρηση με 4 ΣΨ της μάζας και της ακτίνας που έγιναν με ζυγό ακριβείας και διαστημόμετρο.

Το (σφάλμα) Δρ στον υπολογισμό της πυκνότητας θα είναι

$\Delta\rho = (\Delta\rho_m{}^2 + \Delta\rho_R{}^2)^{0.5} = [(0.1082070\ldots)^2 + (-\ 0.0014462\ldots)^2]^{0.5} = 0.01171...g/cm^3$.

Θα στρογγυλέψουμε το $\Delta\rho$ στο 1 ΣΨ, έτσι το: $\Delta\rho = 0.01171...g/cm^3$ και θα πρέπει να γράψουμε
$\Delta\rho = 0.01 g/cm^3$.
Έτσι βρήκαμε $\rho = m/(4/3\pi R^3) = 14.17/(4/3) = 0.34421 g/cm^3$, τότε θα γράψετε τόσα ΣΨ στη ρ μέχρι το 1 ΣΨ της $\Delta\rho = 0.01 g/cm^3$ δηλαδή
$\rho \pm \Delta\rho$
$(0.34421 \pm 0.01)\ g/cm^3$ άρα $(0.34 \pm 0.01)\ g/cm^3$,
δηλαδή το ψηφίο 1 στο σφάλμα αντιστοιχεί στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο της ρ, όπου έτσι δηλώνει ότι είναι το αβέβαιο ψηφίο. Τα υπόλοιπα ψηφία (421) πέραν του αβέβαιου ψηφίου πρέπει να διαγραφούν.

2ο Παράδειγμα

Παράδειγμα υπολογισμού μετάδοσης σφάλματος στον υπολογισμό της πυκνότητας ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου μάζας $m = 3.253g \pm 0.001g$, διαστάσεων $L_1 = (5.35 \pm 0.05)$ cm,
$L_2 = (9.20 \pm 0.05)$ cm, $L_3 = (2.75 \pm 0.05)$ cm, ποιο από τα παραπάνω σφάλματα συνεισφέρει περισσότερο στο σφάλμα της $\Delta\rho$;
Η πυκνότητα υπολογίζεται από $\rho = m/V$ όπου
ο όγκος $V = L_1L_2L_3 = 5.35 \times 9.20 \times 2.75\ cm^3 = 135.355\ cm^3$.
Γράφω όλα τα ψηφία του αποτελέσματος **χωρίς να στρογγυλεύω πριν από τον υπολογισμό του τελικού αποτελέσματος της ρ**, γιατί θα έχω **επιπλέον σφάλμα** από τις ενδιάμεσες στρογγυλοποιήσεις.
Άρα η πυκνότητα θα είναι
$\rho = 3.253/135.355\ g/cm^3$ ή $\rho = 0.024033 g/cm^3 \pm \Delta\rho$.
Πόσο όμως είναι το αναμενόμενο σφάλμα $\Delta\rho$ στον υπολογισμό της ρ;
Στο $\Delta\rho$ μεταδίδεται ένα σφάλμα $\Delta\rho_m$ από την ακρίβεια Δm μέτρησης της μάζας και τρία σφάλματα $\Delta\rho_{L1}$, $\Delta\rho_{L2}$, $\Delta\rho_{L3}$ από τις ακρίβειες ΔLi των μετρήσεων των 3 διαστάσεων του σώματος δηλαδή
$\Delta\rho = [(\Delta\rho_m)^2 + (\Delta\rho_{L1})^2 + (\Delta\rho_{L2})^2 + (\Delta\rho_{L3})^2]^{1/2}$.
Γενικώς η κάθε συμβολή $\Delta\rho_i$ υπολογίζεται ως εξής:
Η $\Delta\rho_m$ είναι ανάλογη της μεταβολής της ρ ανά μονάδα μάζας $\Delta\rho/\Delta m$ πολλαπλασιασμένη με την ακρίβεια μέτρησης της μάζας Δm δηλαδή $\Delta\rho_m = (\Delta\rho/\Delta m)\ \Delta m$.
Στην πραγματικότητα το ποιλίκο $(\Delta\rho/\Delta m)$ είναι η παράγωγος της ρ ως προς m ή πιο καλύτερα η μερική παράγωγος της ρ ως προς m που γράφεται $\partial\rho/\partial m$ άρα $\Delta\rho_m = \partial\rho/\partial m\ \Delta\rho$.
Μερική παράγωγος είναι πρακτικά ό,τι και η απλή παράγωγος αλλά εφαρμόζεται σε συνάρτηση που περιέχει περισσότερες της μιας μεταβλητής όπως στην περίπτωση της πυκνότητας ρ η οποία περιέχει 4 μεταβλητές m, L_1, L_2, L_3 αφού
$\rho(m, L_1, L_2, L_3) = m/(L_1L_2L_3)$, τότε $\Delta\rho_m = \partial(m/(L_1L_2L_3))/\partial m\ \Delta\rho_m = 1/(L_1L_2L_3)\Delta m$,
δηλαδή παραγωγίζω ως προς m όπως γνωρίζω θεωρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές L_1, L_2, L_3 σαν σταθερές.

Άρα $\Delta\rho_m = 1/(L_1L_2L_3)\ \ \Delta m = (1/(5.35 \times 9.20 \times 2.75))1/cm^3 0.001\ g = 0.0000073879 g/cm^3$.

Επαναλαμβάνω τα ίδια και για τις άλλες συμβολές $\Delta\rho_{L1}$, $\Delta\rho_{L2}$, $\Delta\rho_{L3}$ στο συνολικό σφάλμα $\Delta\rho$ δηλαδή
$\Delta\rho_{L1} = \partial(m/(L_1L_2L_3))/\partial L_1\ \Delta\rho = -\ m/(L_1^2L_2L_3)\Delta L_1 = (3.253/(5.35^2 \times 9.20 \times 2.75))g/cm^6\ 0.05cm^3 =$
$= -\ 0.000224579 g/cm^3$.
$\Delta\rho_{L2} = \partial(m/(L_1L_2L_3))/\partial L_2\ \Delta\rho = -\ m/(L_1L_2^2L_3)\Delta L_2 = -\ (3.253/(5.35 \times 9.20^2 \times 2.75))\ g/cm^6\ 0.05cm^3 =$
$= -\ 0.000130598 g/cm^3$.
$\Delta\rho_{L3} = \partial(m/(L_1L_2L_3))/\partial L_3\ \Delta\rho = -\ m/(L_1L_2^2L_3^2)\Delta L_3 = -\ (3.253/(5.35 \times 9.20 \times 2.75^2))\ g/cm^6\ 0.05\ cm^3 =$
$= -\ 0.000436909 g/cm^3$

και βρίσκω $\Delta\rho = [(\Delta\rho_m)^2 + (\Delta\rho_{L1})^2 + (\Delta\rho_{L2})^2 + (\Delta\rho_{L3})^2]1/^2$
$\Delta\rho = [(0.000224579)^2 + (-0.0045)^2 + (-0.000130598)^2 + (-0.000436909)^2]^{1/2} g/cm^3$.

Παρατηρώ πως τη μεγαλύτερη συμμετοχή στο σφάλμα την έχει η μέτρηση του L_3 και τη μικρότερη η μέτρηση της m.

Βρίσκω τελικά
$\Delta\rho = 0.000799474 g/cm^3$ στρογγυλεύοντας σε 1 ΣΨ $\Delta\rho = 0.0008 g/mm^3$.
Άρα
$\rho = 0.024033\ g/cm^3 \pm 0.008\ g/cm^3$ βλέπω πως το σφάλμα είναι τελικά στο 3ο ψηφίο
μετά την υποδιαστολή της τιμής της ρ, άρα τα υπόλοιπα ψηφία αγνοούνται και πρέπει να παραλείπονται δηλαδή
$\rho = 0.024\ g/cm^3 \pm 0.008\ g/cm^3$.

Αν θέλω να βρω σε ποιο πιθανό στοιχείο του περιοδικού πίνακα αντιστοιχεί η πυκνότητα που βρήκα θα αντιστοιχίσω όλα τα στοιχεία που παρουσιάζουν πυκνότητες στο διάστημα $0.024\ g/cm^3 \pm 0.008\ g/cm^3$, δηλαδή μεταξύ 0.016 και 0.032 g/mm^3 και μεταξύ αυτών θα επιλέξω το πιο κατάλληλο που ταιριάζει από άλλες ιδιότητες, όπως π.χ. χρώμα του σώματος.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ του Δρ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1. Γράψτε τον υπολογισμό με την τελική μορφή ρ ± Δρ με τα σωστά σημαντικά ψηφία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

ρ ± Δρ:… … … … … … … … … … … … … … … … … … … .

2. Συγκρίνατε τις πυκνότητες που υπολογίσατε με τις πυκνότητες των σωμάτων με τις τιμές των πυκνοτήτων των στοιχείων στον πίνακα που υπάρχει παρακάτω και βρείτε ποιο είναι το πιθανό υλικό του σώματος από τα υλικά του παρακάτω πίνακα που εμπίπτουν στο παραπάνω διάστημα τιμών ρ ± Δρ.

Παράδειγμα
Αν υπολογίσω ρ ± Δρ: $(8.95 \pm 0.04)\ g/cm^3$, τότε από τον παρακάτω πίνακα πυκνοτήτων βρίσκω πως ο χαλκός Cu με πυκνότητα $8.92\ g/cm^3$ εμπίπτει στο παραπάνω διάστημα τιμών της ρ και επομένως το υλικό που μετρήσαμε είναι πιθανότατα χαλκός. Αυτό θα μπορεί να επιβεβαιωθεί επιπρόσθετα από το γεγονός αν και το χρώμα του σώματος συμφωνεί με το χαρακτηριστικό χρώμα του χαλκού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

ΠΙΝΑΚΑΣ πυκνοτήτων γνωστών στοιχείων

Πυκνότητα	Στοιχείο	Ονομασία
0.53	Li	Λίθιο
0.86	K	Κάλιο
0.97	Na	Νάτριο
1.53	Rb	Ρουβίδιο
1.54	Ca	Ασβέστιο
1.74	Mg	Μαγνήσιο
1.82	P	Φώσφορος
1.85	Be	Βηρύλλιο
1.9	Cs	Καίσιο
2.07	S	Θείο
2.33	Si	Πυρίτιο
2.35	B	Βόριο
2.63	Sr	Στρόντιο
2.7	Al	Αλουμίνιο
2.99	Sc	Σκάνδιο
3.14	Br	Βρώμιο
3.51	C	Άνθρακας
3.65	Ba	Βάριο
4.19	Se	Σελήνιο
4.47	Y	Ύττριο
4.51	Ti	Τιτάνιο
4.94	I	Ιώδιο
5.25	Eu	Ευρώπιο
5.32	Ge	Γερμάνιο
5.5	Ra	Ράδιο
5.72	As	Αρσενικό
5.91	Ga	Γάλλιο
6.09	V	Βανάδιο
6.16	La	Λανθάνιο
6.25	Te	Τελλούριο
6.48	Pr	Πρασεοδύμιο
6.51	Zr	Ζιρκόνιο
6.69	Sb	Αντιμόνιο
6.77	Ce	Δημήτριο
6.97	Yb	Υττέρβιο
7	Nd	Νεοδύμιο
7.14	Cr	Χρώμιο
7.14	Zn	Ψευδάργυρος
7.22	Pm	Προμήθειο
7.29	Sn	Κασσίτερος
7.31	In	Ίνδιο
7.44	Mn	Μαγγάνιο
7.54	Sm	Σαμάριο
7.87	Fe	Σίδηρος
7.89	Gd	Γαδολίνιο
8.25	Tb	Τέρβιο
8.56	Dy	Δυσπρόσιο
8.58	Nb	Νιόβιο
8.64	Cd	Κάδμιο
8.78	Ho	Όλμιο
8.89	Co	Κοβάλτιο
8.91	Ni	Νικέλιο
8.92	Cu	Χαλκός
9.05	Er	Έρβιο
9.2	Po	Πολώνιο
9.32	Tm	Θούλιο
9.8	Bi	Βισμούθιο
9.84	Lu	Λουτίσιο
10.07	Ac	Ακτίνιο
10.28	Mo	Μολυβδαίνιο
10.49	Ag	Άργυρος
11.34	Pb	Μόλυβδος
11.49	Tc	Τεχνήτιο
11.72	Th	Θόριο
11.85	Tl	Θάλλιο
12.02	Pd	Παλλάδιο
12.41	Rh	Ρόδιο
12.45	Ru	Ρουθήνιο
13.25	Bk	Μπερκέλιο
13.31	Hf	Άφνιο
13.51	Cm	Κιούριο
13.55	Hg	Υδράργυρος
13.67	Am	Αμερίκιο
15.1	Cf	Καλιφόρνιο
15.37	Pa	Πρωτακτίνιο
16.68	Ta	Ταντάλιο
18.97	U	Ουράνιο
19.26	W	Βολφράμιο
		(Τανγκστένιο)
19.32	Au	Χρυσός
19.74	Pu	Πλουτώνιο
20.48	Np	Νεπτούνιο
		(Ποσειδώνιο)
21.03	Re	Ρήνιο
21.45	Pt	Λευκόχρυσος
22.61	Os	Όσμιο
22.65	Ir	Ιρίδιο

Οι παραπάνω τιμές

είναι σε μονάδες

$\boxed{(\text{σε } g/cm^3)}$

Κόκκινα=υγρά

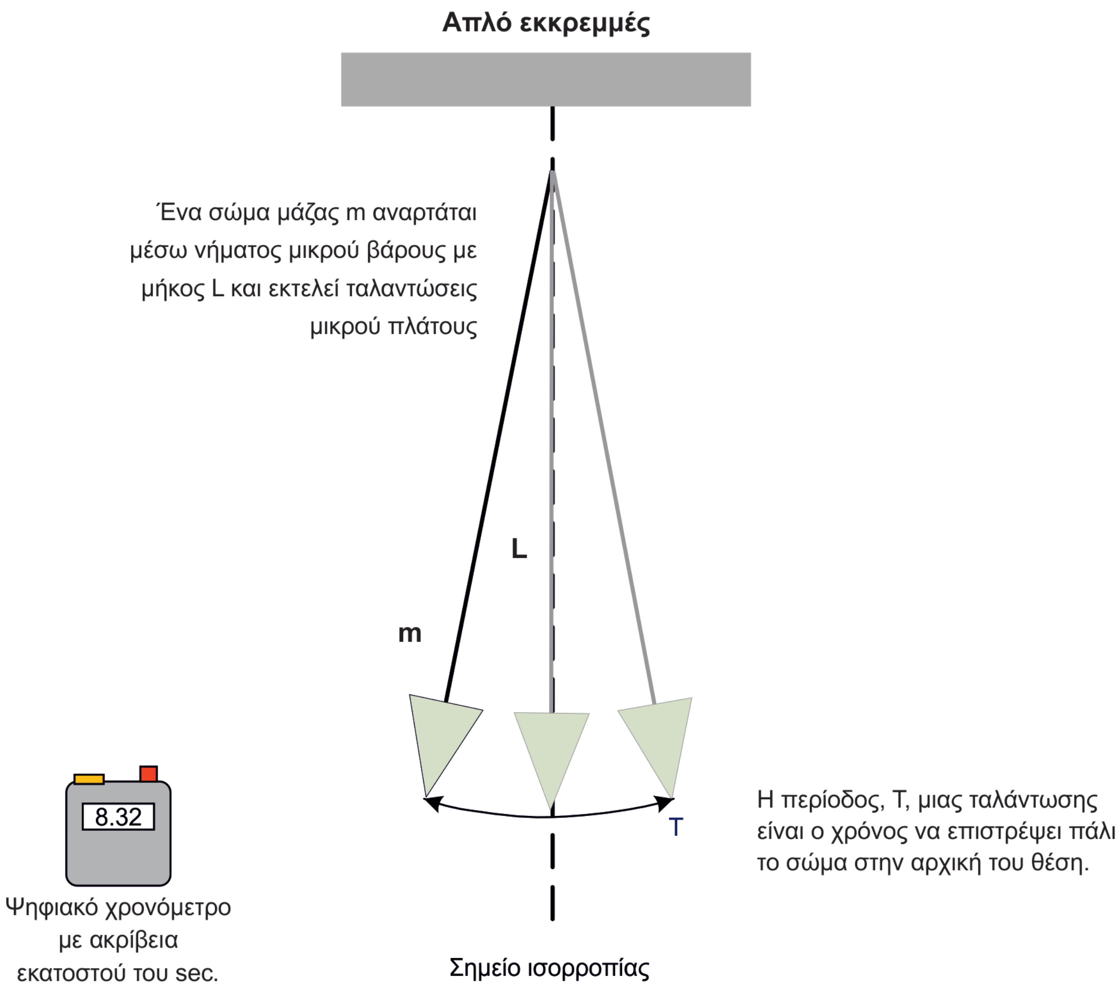
ΑΣΚΗΣΗ 2

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ
ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Μελέτη ταλάντωσης απλού εκκρεμούς

Σκοπός: **1.** Να μελετηθεί πώς κατανέμονται στατιστικά πολλές πειραματικές μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους.
2. Να γίνει κατανοητή η έννοια της τυπικής απόκλισης, της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της μέσης τιμής μελετώντας την ταλάντωση του εκκρεμούς.

■ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ



Συνήθως δεν μετρούμε μια περίοδο της ταλάντωσης γιατί υπόκειται στο σχετικά μεγάλο σφάλμα της τάξεως του 0.1 s της αντίδρασης του παρατηρητή.

Συνήθως μετρούμε περισσότερες π.χ. 10 ταλαντώσεις και έτσι το % σφάλμα από την αντίδραση του παρατηρητή μικραίνει γιατί αντιστοιχεί στο 10/σιο περίπου χρόνο των 10 ταλαντώσεων και όχι στο μικρότερο χρόνο της μιας ταλάντωσης.

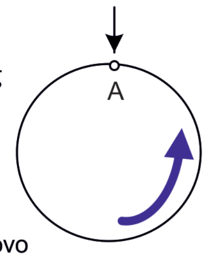
Α. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Α1. Η κανονική κατανομή

Έστω ότι μετρούμε ένα φυσικό μέγεθος πολλές φορές. Αν καταγράψω τις μετρήσεις, τότε θα παρατηρήσω πως μερικές μετρήσεις επαναλαμβάνονται περισσότερες φορές και μερικές άλλες λιγότερες φορές, όπως φαίνεται από τα παρακάτω δεδομένα ενός πειράματος.

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Έστω ότι μετρώ επανειλημμένα την περίοδο T περιφοράς ενός τροχού που περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα περιφοράς.



Δηλαδή μετρώ το χρόνο που το σημείο Α περνά κάθε φορά από το ίδιο σημείο (βέλος).

n	T(s)
1	3.6
2	3.3
3	3.5
4	3.7
5	3.8
6	3.6
7	3.5
8	3.6
9	3.4
10	3.7
11	3.6
12	3.9
13	3.8
14	3.7
15	3.5

Στον παρακάτω πίνακα καταγράφω πόσες φορές Ν επαναλήφθηκε η ίδια μέτρηση της περιόδου Τ.

T(s)	**N**
3.3	1
3.4	1
3.5	3
3.6	4
3.7	3
3.8	2
3.9	1

Καταγράφω στο διπλανό πίνακα τα αποτελέσματα των μετρήσεων της Τ.

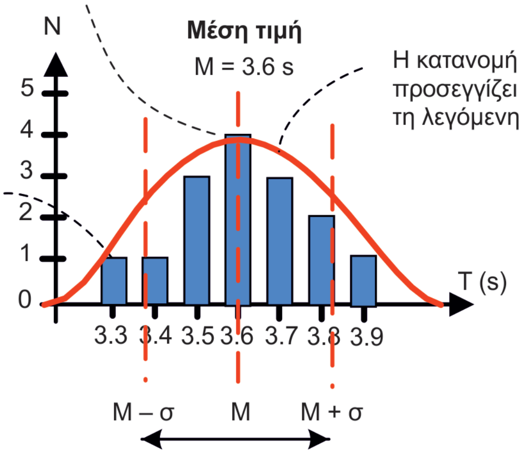
Παρατηρώ ότι οι πιο πολλές μετρήσεις συγκεντρώνονται γύρω από κάποια τιμή, τη λεγόμενη μέση τιμή, Μ.

Μέση τιμή

Μ = 3.6 s

Η κατανομή των μετρήσεων προσεγγίζει την κανονική κατανομή, τη λεγόμενη καμπάνα του Gauss.

Ελάχιστες μετρήσεις ευρίσκονται μακρυά από τη μέση τιμή, Μ.



Η διασπορά ή το εύρος των μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή, Μ, καθορίζεται από τη **τυπική απόκλιση**, σ, η οποία καθορίζει ότι το πλήθος των μετρήσεων από Μ – σ έως Μ + σ είναι της τάξεως του 68% του συνόλου των μετρήσεων.

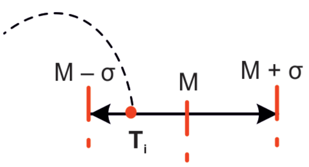
Η τυπική απόκλιση των μετρήσεων Ν με μέση τιμή Μ ορίζεται από:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(M - x_i)^2}$$

Α2. Τι σημαίνει η τυπική απόκλιση

Η τυπική απόκλιση σ υπολογίζεται από $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}(M - x_i)^2}$ όπου Ν ο αριθμός των μετρήσεων και x_i είναι τυχαία μέτρηση.

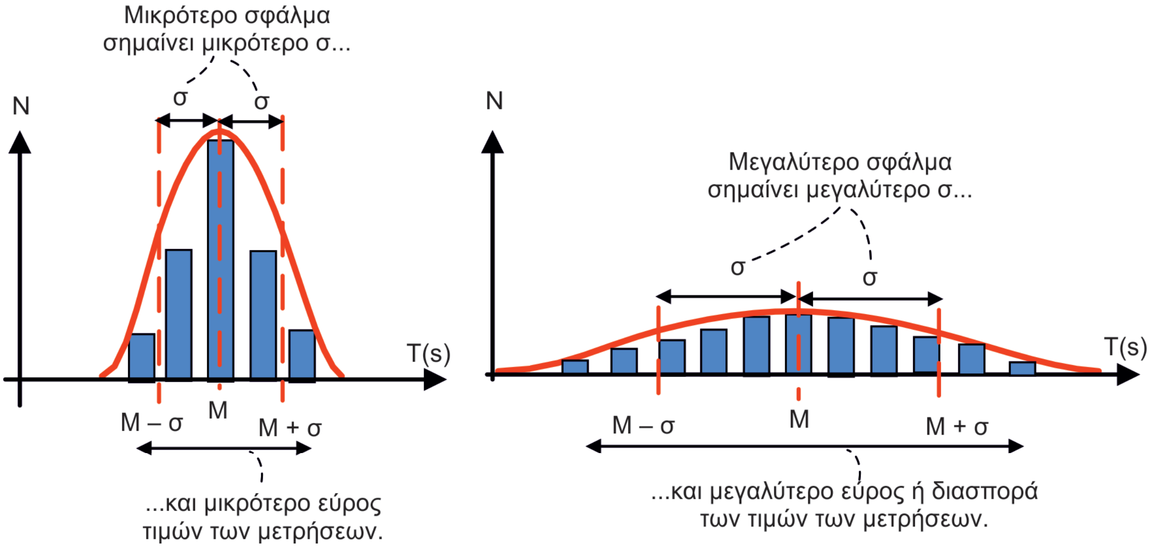
Εκλέγοντας μια τυχαία μέτρηση περιόδου T_i αυτή έχει πιθανότητα περίπου 68% να βρεθεί στο διάστημα: Μ – σ έως Μ + σ.



Στο συγκεκριμένο πείραμα το σ βρίσκεται στρογγυλεμένο στο 1 ΣΨ να είναι: σ = 0.2 s

Δηλαδή η κάθε μέτρηση T_i έχει 68% πιθανότητα να βρεθεί στο διάστημα: (3.6 ± 0.2) S.

Το σ είναι ένα μέτρο του σφάλματος που γίνεται στις μετρήσσεις. Λιγότερο (μεγαλύτερο) σφάλμα σημαίνει μικρότερο (μεγαλύτερο) σ και μικρότερο (μεγαλύτερο) εύρος τιμών των μετρήσεων.



Α3. Η μέση τιμή Μ και η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής σ_M

Η μέση τιμή των μετρήσεων είναι η αντιπροσωπευτική τιμή όλων των μετρήσεων. Το σφάλμα που υπεισέρχεται στη Μ είναι η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής, η οποία είναι πολύ μικρότερη της σ και δίνεται από $\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Η φυσική σημασία της σ_M είναι πως εάν κάνω πολλά σετ Ν μετρήσεων, τότε οι μέσες τιμές από κάθε σετ των Ν μετρήσεων ακολουθούν επίσης την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση τη σ_M και η σ_M χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του σφάλματος της μέσης τιμής και γράφουμε: $M \pm \sigma_M$.

Όταν έχουμε επαναλάβει τις μετρήσεις Ν φορές, τότε χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή Μ σαν την περισσότερο αντιπροσωπευτική μέτρηση των Ν μετρήσεων...

...και δεν χρησιμοποιούμε μια μόνο μέτρηση x_i.

Αυτό γιατί η τυπική απόκλιση, σ_M, της μέσης τιμής είναι πολύ μικρότερη από το σ και δίνεται από: $\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Τι σημαίνει η τυπική απόκλιση, σ_M, της μέσης τιμής

Εκτελώ πολλά σετ των Ν μετρήσεων και υπολογίζω σε κάθε σύνολο των Ν μετρήσεων τη μέση τιμή M_i…

n	T (s)
1	3.6
2	3.3
3	3.5
4	3.7
5	3.8
6	3.6
7	3.5
8	3.6
9	3.4
10	3.7
11	3.6
12	3.9
13	3.8
14	3.7
15	3.5

M_1

n	T (s)
1	3.6
2	3.3
3	3.5
4	3.7
5	3.8
6	3.6
7	3.5
8	3.6
9	3.4
10	3.7
11	3.6
12	3.9
13	3.8
14	3.7
15	3.5

M_2

....

n	T (s)
1	3.6
2	3.3
3	3.5
4	3.7
5	3.8
6	3.6
7	3.5
8	3.6
9	3.4
10	3.7
11	3.6
12	3.9
13	3.8
14	3.7
15	3.5

M_i

....

πολλά σετ των Ν μετρήσεων

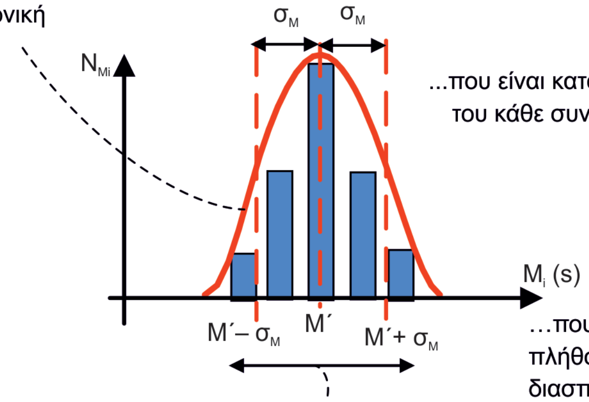
Καταγράφουμε στον παρακάτω πίνακα το πόσες φορές N_{Mi} μετρήθηκαν οι διάφορες μέσες τιμές M_i.

M_i (s)	N_{Mi}
3.4	1
3.5	4
3.6	6
3.7	5
3.8	1

Ακολούθως κάνουμε τη γραφική παράσταση το πόσες φορές N_{Mi} μετρήθηκαν οι διάφορες μέσες τιμές M_i …

...τότε παίρνω την κατανομή των μέσων τιμών. Παρατηρώ πως και αυτή ακολουθεί την κανονική κατανομή...

...με μια διασπορά σ_M, που είναι: $\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$



...που είναι κατά πολύ μικρότερη του σ του κάθε συνόλου των Ν μετρήσεων κατά τον παράγοντα: $\sqrt{N}$

…που σημαίνει πως όταν αυξάνεται το πλήθος Ν των μετρήσεων, μειώνω τη διασπορά σ_M της μέσης τιμής κατά πολύ περισσότερο του σ του κάθε σετ των Ν μετρήσεων.

...το εύρος τιμών των μέσων τιμών M_i

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Εκτελώντας ένα σχετικά μεγάλο πλήθος μετρήσεων Ν και παίρνοντας τη μέση τιμή Μ των μετρήσεων, τότε επιτυγχάνω καλύτερη ακρίβεια στη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους.

Στο συγκεκριμένο πείραμα της μέτρησης της περιόδου Τ με Ν = 15 βρίσκω: $\sigma_M = \frac{0.2}{\sqrt{15}} = 0.05$ s

Έτσι αυξάνω την ακρίβεια της μέτρησης της περιόδου, η οποία από κάθε μια μεμονωμένη μέτρηση μήκους είναι στο 2^o ΣΨ, επεκτείνεται στο 3^o ΣΨ όταν παίρνω τη μέση τιμή όπου γράφω:

Τ: (3.61 ± 0.05) s

Α4. Πώς κάνουμε γραφική παράσταση

Για να κάνουμε μια γραφική παράσταση, π.χ. στην περίπτωσή μας την κατανομή των μετρήσεων της μέτρησης της περιόδου του εκκρεμούς, ακολουθούμε τα εξής.
Παρατηρώ ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή για τον άξονα x και τον άξονα y.
Ακολούθως αποφασίζω τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή που θα έχει ο άξονας x και y ώστε να «χωράνε» όλες οι τιμές των μετρήσεων.
Αποφασίζουμε τις υποδιαιρέσεις, για να τοποθετούμε στο διάγραμμα εύκολα τα σημεία. Για το σκοπό αυτό προτιμούμε οι υποδιαιρέσεις στους άξονες να είναι 0, 1, 2, 3... ή 0, 5, 10, 15… Δηλαδή περιέχουν 2, 4, 8... υποδιαιρέσεις. Αποφεύγουμε τις υποδιαιρέσεις με μονό αριθμό όπως π.χ. 3, 6...
Καταγράφουμε την ποσότητα και τις μονάδες που αναπαριστά ο κάθε άξονας μέσα σε παρένθεση, π.χ. στον άξονα y έχω L (cm) και στον άξονα x έχω t (s).
Τοποθετούμε προσεκτικά **μόνο τα πειραματικά σημεία** χωρίς να σημειώνω τις συντεταγμένες (x, y) στους άξονες και **δεν ενώνω ποτέ τα πειραματικά σημεία** (π.χ. με τεθλασμένη γραμμή).

Α5. Η μεθοδολογία που ακολουθείται στην άσκηση

Για τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, π.χ. της περιόδου ταλάντωσης ενός εκκρεμούς η οποία υπόκειται σε σημαντικά σφάλματα όπως π.χ. η υποκειμενική αντίληψη του παρατηρητή και τα αντανακλαστικά του, τα τυχόντα ρεύματα αέρα κ.λπ., τότε αντί για μια μόνο μέτρηση περιόδου Τ μετρούμε πολλές περιόδους (π.χ. 10 ταλαντώσεις T_{10}). Έτσι ελαττώνουμε τα παραπάνω σφάλματα των μετρήσεων κατά 10 φορές. Επιπλέον, αντί για ένα σετ 10 ταλαντώσεων, επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση της περιόδου των 10 ταλαντώσεων σε πολλά σετ (π.χ. 20 σετ). Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε τη μέση τιμή των T_{10} για πιο αντιπροσωπευτική μέτρηση του T_{10}, ενώ η τυπική απόκλιση σ των μετρήσεων θεωρείται σαν η διασπορά ή η απόκλιση που έχουν οι μετρήσεις του T_{10} σε σχέση με τη μέση τιμή του T_{10}.

Β. ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ ΠΡΙΝ ΑΠΟ ΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Θα πρέπει να έχετε μελετήσει την παραπάνω συνοπτική θεωρία.

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ:

1. Περιγράψτε τη μορφή της κανονικής κατανομής που ακολουθούν συνήθως οι μετρήσεις πειραμάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

2. Περιγράψτε τι είναι η τυπική απόκλιση και σε τι χρησιμεύει.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

3. Γιατί είναι καλύτερα να χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή μετρήσεων και όχι μια μεμονωμένη μέτρηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

4. Τι είναι η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

5. Γιατί είναι καλύτερα να κάνουμε πολλές μετρήσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Γ. ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Γ1. (Εργασία πριν από το εργαστήριο)

■ ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ (γράφετε με δικά σας λόγια τι θα μετρήσετε και για ποιο σκοπό)

■ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ (σχεδιάζετε με μολύβι την πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιήσετε)

Γ2. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Ρυθμίζετε το μήκος του εκκρεμούς περίπου στο 1 m. Μετρήστε την περίοδο 10 ταλαντώσεων του εκκρεμούς με τη βοήθεια του ψηφιακού χρονομέτρου. Επαναλάβετε το ίδιο 20 φορές και καταγράψτε τις τιμές στον παρακάτω ΠΙΝΑΚΑ Ι.

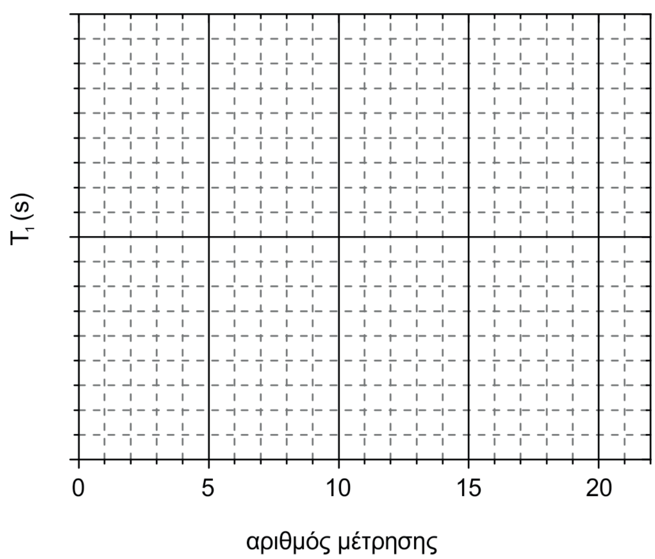
ΠΙΝΑΚΑΣ Ι ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Ν (αριθμός μέτρησης)	T_{10}(s)	T_1(s)	T_1(s) Στρογγυλεμένο στα 3 ΣΨ
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Γ3. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

1. Στο παρακάτω Διάγραμμα 1 κάνουμε τη γραφική παράσταση την περίοδο T_1 (άξονας y) έναντι του αριθμού της μέτρησης (άξονας x).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1



2. Από τις στρογγυλεμένες τιμές T_1 στα 3 ΣΨ σημειώστε πόσες φορές (συχνότητα) εμφανίζεται η κάθε μία διαφορετική μέτρηση. Καταγράψτε τα αποτελέσματα στον παρακάτω ΠΙΝΑΚΑ ΙΙ.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

Μέτρηση T_1 (s)	Συχνότητα που εμφανίζεται

3. Στο Διάγραμμα 2 κάνετε τη γραφική παράσταση, όπου στον άξονα x τοποθετείτε τις διαφορετικές μετρήσεις που πήρατε και στον άξονα y πόσες φορές (συχνότητα) εμφανίζονται.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2