

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ αποτελούν ένα πεδίο έρευνας το οποίο τα τελευταία χρόνια κερδίζει ολοένα και περισσότερο το ενδιαφέρον των ερευνητών στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Πραγματοποιούνται νοερά και χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην καθημερινή ζωή για να βρούμε γρήγορα και κατά προσέγγιση το αποτέλεσμα πολύπλοκων υπολογισμών που είναι απαραίτητοι για την επίλυση πρακτικών ζητημάτων. Για παράδειγμα, χρειαζόμαστε μια εκτίμηση για να έχουμε μια πρώτη εικόνα για τον υπολογισμό του συνολικού ποσού των εξόδων μας σε μια εκδρομή ή για τον προσδιορισμό του αριθμού των ατόμων σε ένα κατάστημα ή για την εύρεση του χρόνου που θα χρειαστούμε για να μετακινηθούμε από ένα μέρος σε ένα άλλο. Τα οφέλη από την πραγματοποίηση μιας εκτίμησης εστιάζονται τόσο στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού όσο και στην πρακτική χρησιμότητά της, καθώς με τη χρήση της αφενός ενισχύεται μια γενική αίσθηση σχετικά με την αναμενόμενη αριθμητική απάντηση και αφετέρου είναι δυνατός ο έλεγχος για το αν ο ακριβής υπολογισμός που πραγματοποιείται αργότερα είναι λογικός ή/και σωστός.

Σε αρκετές χώρες στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι εκτιμήσεις παρουσιάζονται ως μία από τις μαθησιακές επιδιώξεις και ενθαρρύνεται η συστηματική διδασκαλία τους μέσα από προτάσεις που αφορούν συγκεκριμένες στρατηγικές εκτίμησης. Στην Ελλάδα το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ, 2003) αναγνωρίζει την αναγκαιότητα διδασκαλίας των εκτιμήσεων και τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου επιχειρούν την ενσωμάτωσή τους στη διδασκαλία. Ωστόσο, η διδασκαλία της εκτίμησης δεν είναι ισόποσα μοιρασμένη για όλους τους τύπους εκτίμησης ούτε πάντα προσφέρεται υποστήριξη στους εκπαιδευτικούς για την ενίσχυση της ικανότητας των παιδιών για πραγματοποίηση εκτιμήσεων. Συχνά μάλιστα παρατηρείται η αντίσταση των παιδιών και των ενηλίκων

να πραγματοποιήσουν εκτιμήσεις και τονίζεται το ενδιαφέρον τους αποκλειστικά στους υπολογισμούς με ακρίβεια.

Το παρόν βιβλίο συντάσσεται με την άποψη ότι η πραγματοποίηση και η αξιοποίηση αυθεντικών εκτιμήσεων από μικρή ηλικία μπορεί να αποτελέσει ευκαιρία τόσο μετάβασης σε πρακτικές που επενδύουν αποτελεσματικά στη συμμετοχή και την ενεργή εμπλοκή των μαθητών¹ στη διαδικασία μάθησης όσο και ενίσχυσης της αίσθησης του αριθμού θεωρώντας την ικανότητα εκτίμησης αναπόσπαστο μέρος της. Το βασικό ερώτημα που επιχειρεί να απαντήσει αφορά στον τρόπο με τον οποίο τα άτομα πραγματοποιούν εκτιμήσεις, αναλύοντας τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν και προσδιορίζοντας την αναπτυξιακή πορεία της ικανότητας για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων. Για τον σκοπό αυτόν, παρουσιάζονται σύγχρονα θεωρητικά και εμπειρικά αποτελέσματα από την Ελλάδα και το εξωτερικό² για τις δυνατότητες και τις δυσκολίες των παιδιών και των ενηλίκων στον χώρο των τριών ειδών εκτίμησης (υπολογιστικής, πλήθους και μέτρων) και συνοψίζονται συμπεράσματα που οδηγούν σε νέες διδακτικές κατευθύνσεις. Το περιεχόμενο του βιβλίου αντλεί στοιχεία τόσο από την ψυχολογία των μαθηματικών, προκειμένου να περιγράψει την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης αναφορικά με την πραγματοποίηση εκτιμήσεων, όσο και από τη διδακτική των μαθηματικών, προκειμένου να παρουσιάσουν εκπαιδευτικές μέθοδοι και νέοι τρόποι διδασκαλίας των εκτιμήσεων. Το βιβλίο απευθύνεται σε υποψήφιους και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς επικεντρώνεται στην περιγραφή των μαθηματικών ιδεών των ίδιων των παιδιών για τις εκτιμήσεις. Απευθύνεται, επίσης, σε γονείς αλλά και σε όσους επιθυμούν να ενημερωθούν για τη σημασία των εκτιμήσεων και την εξέλιξη της ικανότητας πραγματοποίησής τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου παρουσιάζονται γενικά στοιχεία για τις εκτιμήσεις και προσδιορίζονται η σημασία και η χρησιμότητά τους. Περιγράφονται σύντομα τα είδη των εκτιμήσεων και τα χαρακτηριστικά τους,

1. Οι όροι «μαθητής» και «μαθητές» χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν και τα δύο φύλα. Ανάλογα χρησιμοποιούνται και οι όροι «εκπαιδευτικός», «εκπαιδευτικοί», «ερευνητής» και «ερευνητές».

2. Καθώς το μεγαλύτερο μέρος των ερευνητικών αποτελεσμάτων έχει δημοσιευθεί σε αγγλόφωνα κείμενα, η βασική ορολογία που χρησιμοποιείται παρουσιάζεται στα ελληνικά και τα αγγλικά ώστε να είναι δυνατή για τον αναγνώστη η παρακολούθηση της ξενόγλωσσας βιβλιογραφίας.

και επιχειρείται η σύνδεσή τους με την αίσθηση του αριθμού και τους νοερούς υπολογισμούς.

Στο δεύτερο κεφάλαιο η εστίαση αφορά αποκλειστικά στην υπολογιστική εκτίμηση. Αρχικά αποσαφηνίζεται το εννοιολογικό περιεχόμενο της υπολογιστικής εκτίμησης και παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους οι σύγχρονες έρευνες μελετούν την ικανότητα των παιδιών και των ενηλίκων για την πραγματοποίηση υπολογιστικών εκτιμήσεων. Στη συνέχεια εξετάζεται η ανάπτυξη της ικανότητας για υπολογιστική εκτίμηση αναφορικά με τις επιδόσεις των ατόμων και τις στρατηγικές που επινοούν. Με δεδομένο ότι σε μεγάλο μέρος των ερευνών συμμετέχουν εν ενεργεία και υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τη χρήση της υπολογιστικής εκτίμησης και τις επιδόσεις τους σε έργα υπολογιστικής εκτίμησης.

Στο τρίτο κεφάλαιο, το οποίο αφορά στην εκτίμηση πλήθους, περιγράφονται τα κύρια στοιχεία που εξηγούν τις ατομικές διαφορές στο Προσεγγιστικό Αριθμητικό Σύστημα καθώς και οι παράγοντες που επηρεάζουν την ικανότητα για εκτίμηση πλήθους. Παρουσιάζεται η αναπτυξιακή πορεία της εκτίμησης πλήθους και αναλύονται οι στρατηγικές εκτίμησης πλήθους που έχουν αναδειχθεί πιο συχνά στις σχετικές έρευνες. Ένα μεγάλο μέρος του κεφαλαίου αυτού αφιερώνεται στην εκτίμηση σε αριθμογραμμή, θεωρώντας την αφενός μέρος της εκτίμησης πλήθους και αφετέρου σημαντικό μέσο άντλησης πληροφοριών για την κατανόηση της έννοιας του αριθμού από τα παιδιά και τους ενήλικες. Αναλύονται οι κύριες τάσεις αναφορικά με την ερμηνεία των αναπαραστάσεων για τα αριθμητικά μεγέθη, όπως αναδεικνύονται μέσα από τα αποτελέσματα ερευνών που μελετούν την εκτίμηση σε αριθμογραμμή. Τέλος, επισημαίνεται η ισχυρή σχέση ανάμεσα στην ικανότητα για εκτίμηση σε αριθμογραμμή και τις μαθηματικές ικανότητες.

Η εκτίμηση μέτρων περιλαμβάνεται στο τέταρτο κεφάλαιο. Αρχικά προσδιορίζονται οι εννοιολογικές απαιτήσεις της εκτίμησης μέτρων και οι παράγοντες που την επηρεάζουν. Στη συνέχεια περιγράφονται οι στρατηγικές που ενεργοποιούνται στις καταστάσεις που απαιτούν εκτιμήσεις μέτρων και αναλύεται η σχέση της χρήσης των στρατηγικών με την επιτυχία στις εκτιμήσεις μέτρων. Δεδομένης της μεγάλης ετερογένειας στο περιεχόμενο των χαρακτηριστικών για τα οποία πραγματοποιούνται κατ' εκτίμηση μετρήσεις, οι τελευταίες ενότητες αυτού του κεφαλαίου επικεντρώνονται σε ερευνητικά στοιχεία για τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των ατόμων σε εκτιμήσεις μήκους, εμβαδού, όγκου, χρόνου και βάρους.

Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στη διδασκαλία των εκτιμήσεων στο δημοτικό σχολείο. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφεται η θέση των εκτιμήσεων στα αναλυτικά προγράμματα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τα μαθηματικά στην Ελλάδα και το εξωτερικό και αναλύονται ενδεικτικές δραστηριότητες που αφορούν στα είδη εκτίμησης από τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών. Παρουσιάζονται, επίσης, τα αποτελέσματα από διδακτικές παρεμβάσεις και μέσα από τις προτάσεις των ερευνητών αναδεικνύονται οι βασικές αρχές για την έγκαιρη και συστηματική ενίσχυση της ικανότητας για πραγματοποίηση εκτιμήσεων στο πλαίσιο του σχολείου.

Κλείνοντας αυτή τη σύντομη εισαγωγή, θα ήθελα εκφράσω την απειρίοριστη ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για όλη τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόησή τους καθ' όλη τη διάρκεια ολοκλήρωσης αυτής της προσπάθειας.

Δέσποινα Δεσλή

Ιούλιος 2021

1.

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ

1.1 Αποσαφήνιση της έννοιας

ΠΟΛΥ ΣΥΧΝΑ στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε εκτιμήσεις σε μια διαδικασία παραγωγής απαντήσεων οι οποίες επιτρέπουν σωστές αποφάσεις, χωρίς να δημιουργούνται πολύπλοκοι ή ακριβείς υπολογισμοί. Για παράδειγμα, προβαίνουμε συχνά σε μέτρηση κατ' εκτίμηση (π.χ., για το βάρος ενός καρπουζιού, το ύψος ενός κτηρίου) ή στην εκτίμηση του πλήθους ενός συνόλου (π.χ., για τον αριθμό των παιδιών σε μια τάξη, τον αριθμό των σελίδων σε ένα βιβλίο). Άλλες φορές πραγματοποιούμε εκτιμήσεις ενός υπολογισμού, δηλαδή προσδιορίζουμε κατά προσέγγιση έναν υπολογισμό (π.χ., το σύνολο των μηνιαίων εξόδων μας, το ποσό των χρημάτων ύστερα από έκπτωση) που δεν μπορούμε ή δεν θέλουμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια. Η εμπλοκή μας σε καταστάσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται οι εκτιμήσεις σε καθημερινή βάση είναι πολύ μεγάλη και η πραγματοποίησή τους καθίσταται σημαντική, καθώς μας επιτρέπουν να έχουμε γρήγορη και καλή εικόνα των ενεργειών μας. Κατά τους Northcote και McIntosh (1999), καθημερινά οι ενήλικες, σε διάφορες καταστάσεις που απαιτούν υπολογισμούς, καταφεύγουν πολύ πιο συχνά σε κατά προσέγγιση υπολογισμούς παρά σε ακριβείς υπολογισμούς. Χαρακτηριστικά η Reys (1992) επισήμανε ότι περισσότερο από το 80% των μαθηματικών μας ενασχολήσεων απαιτούν την πραγματοποίηση εκτιμήσεων παρά υπολογισμών με ακρίβεια. Φυσικά αυτό το στοιχείο από μόνο του αποτελεί μια εκτίμηση, ωστόσο δείχνει εμφανικά τη μεγάλη στήριξη που μας προσφέρουν οι εκτιμήσεις.

Αρκετοί είναι οι ορισμοί που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία σε μια προσπάθεια να αποσαφηνιστεί η έννοια της εκτίμησης. Μέσα από

τις αρχές του NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2006), στις οποίες στηρίζεται το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών στις ΗΠΑ, η εκτίμηση εμφανίζεται να περιλαμβάνει τόσο τον κατά προσέγγιση³ υπολογισμό όσο και την κατάληξη σε ένα κατά προσέγγιση συμπέρασμα για αυτούς τους υπολογισμούς. Με άλλα λόγια, η λέξη για την εκτίμηση, όπως χρησιμοποιείται στο NCTM, αναφέρεται στη διαδικασία της εκτίμησης και στο αποτέλεσμα της εκτίμησης. Με αυτόν τον ορισμό συμφωνούν και οι Segovia και Castro (2009), για τους οποίους η εκτίμηση είναι η απόφαση που λαμβάνεται ως αποτέλεσμα ενός συνδυασμού διενέργειας αριθμητικών ενεργειών και αποτίμησης αυτών των ενεργειών, αλλά και ο Reys (1986), ο οποίος ορίζει την εκτίμηση ως διαδικασία για την παροχή επαρκούς απάντησης σε ένα πρόβλημα. Σύμφωνα με άλλους ερευνητές, η εκτίμηση ερμηνεύεται ως «γρήγορη ιδέα για την ποσότητα ή το μέγεθος κάποιου αντικειμένου χωρίς τη διενέργεια υπολογισμού ή μέτρησης» (Micklo, 1999, σ. 142) και «δεξιότητα διατύπωσης υποθέσεων σχετικά με την τιμή μιας απόστασης, το κόστος, το μέγεθος κ.λπ. ή σχετικά με αριθμητικούς υπολογισμούς» (Clayton, 1996, σ. 87). Ανεξάρτητα από την υιοθέτηση οποιουδήποτε ορισμού, όποιος προβαίνει σε εκτιμήσεις είναι αδιαμφισβήτητα σε θέση να «εικάζει», να «προβλέπει», με την έννοια ότι χρειάζεται να έχει μια γενική ιδέα για αυτό που θα μετρήσει ή για τον υπολογισμό που θα πραγματοποιήσει κατά προσέγγιση.

Η εκτίμηση ως έννοια περιλαμβάνει πολλά από όσα περιγράφονται στους παραπάνω ορισμούς. Ωστόσο, ο Reys (1984) αρχικά διατύπωσε τα γενικά χαρακτηριστικά της εκτίμησης τα οποία αργότερα επέκτειναν και ανέπτυξαν οι Segovia, Castro, Castro και Rico (1989 στο Segovia & Castro, 2009). Έτσι, πέρα από το γεγονός ότι με την εκτίμηση προσδιορίζεται κατά προσέγγιση η τιμή μιας αριθμητικής πράξης ή μιας ποσότητας, απαιτείται η αναγνώριση πληροφοριών και η στήριξη σε σημεία αναφοράς και προηγούμενες εμπειρίες. Η εκτίμηση πραγματοποιείται νοερά και συνήθως γρήγορα με τις απαραίτητες τροποποιήσεις στους αριθμούς που εμπλέκονται ώστε αυτοί να είναι όσο το δυ-

3. Η διάκριση ανάμεσα στις εκτιμήσεις και τις προσεγγίσεις δεν είναι σαφής (Sowder, 1992) και συχνά χρησιμοποιείται ο όρος «προσεγγιστικές διαδικασίες» ή «προσεγγιστικοί υπολογισμοί» για να περιγράψει τους τρόπους με τους οποίους καταλήγουμε σε ένα κατ' εκτίμηση αποτέλεσμα.

νατόν περισσότερο απλοί και εύκολα διαχειρίσιμοι. Το αποτέλεσμα της εκτίμησης ποτέ δεν διασφαλίζει την ακρίβεια στο αποτέλεσμα του υπολογισμού, αλλά βρίσκεται κοντά σε αυτό. Τέλος, οι εκτιμήσεις μπορεί να διαφέρουν από άτομο σε άτομο ανάλογα με τα κριτήρια που θέτει το κάθε άτομο για την εκτίμηση μιας κατάστασης. Για παράδειγμα, αν πρόκειται να πραγματοποιήσουμε μια εκτίμηση για το γινόμενο 190×240 , είναι πιθανό να σκεφτούμε τον πολλαπλασιασμό 200×200 ή τον πολλαπλασιασμό 200×240 . Ωστόσο, αν επιλέξουμε τον δεύτερο πολλαπλασιασμό, το αποτέλεσμα της εκτίμησης μας θα είναι πιο κοντά στο πραγματικό ακριβές αποτέλεσμα, αλλά η εκτέλεση του πρώτου πολλαπλασιασμού είναι σίγουρα περισσότερο εύκολη και βολική. Με βάση λοιπόν το τελευταίο χαρακτηριστικό, διαφαίνεται η υποκειμενικότητα των αποτελεσμάτων μιας εκτίμησης, γεγονός που μας επιτρέπει να μιλάμε για περισσότερο ή λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις.

Οι Luwel και Verschafel (2008), υιοθετώντας την οπτική του Reys (1986), υποστηρίζουν ότι η εκτίμηση είναι μια «σύνθετη δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος» (σ. 320) που οδηγεί σε κατά προσέγγιση κρίση ή υπολογισμό για την οποία χρειάζονται διάφορες υπολογιστικές δεξιότητες και μαθηματικές διαδικασίες (Sowder, 1992· Usiskin, 1986). Η επιτυχία στην εκτίμηση αναπτύσσεται και βελτιώνεται με τον χρόνο και, πέρα από δεξιότητες και ικανότητες, αφορά ακόμα και στη στάση μας απέναντι στα μαθηματικά (Reys, 1986). Σε αυτό το πλαίσιο, ο Usiskin (1986) υποστήριξε ότι οι εφαρμογές της εκτίμησης ταιριάζουν με τις κατευθύνσεις και τις επιδιώξεις των μαθηματικών, δηλαδή, «τη σαφήνεια στη σκέψη και τον λόγο, την ευχέρεια στην αντιμετώπιση των προβλημάτων και τη συνέπεια στην εφαρμογή των διαδικασιών» (σ. 2). Αυτή η θεώρηση του Usiskin δικαιολογεί την άποψη ότι τα μαθηματικά δεν συνδέονται αποκλειστικά με την ακρίβεια και, κατά συνέπεια, η εκτίμηση αποτελεί μέρος τους και αναδεικνύει έναν τρόπο χρήσης τους. Τα μαθηματικά, υπό αυτό το πρίσμα, περιλαμβάνουν έναν ξεχωριστό τρόπο σκέψης και όχι μια συλλογή από κανόνες, συχνά μη συνδεδεμένους μεταξύ τους.

Πληθώρα ερευνητικών στοιχείων δείχνουν πως τα μεγαλύτερα άτομα παρουσιάζουν περισσότερο αναπτυγμένες επιδόσεις στην εκτίμηση, μεγαλύτερη ποικιλία διαφορετικών στρατηγικών σε σχέση με τα μικρότερα άτομα (Lemaire, Lecacheur, & Farioli, 2000· LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993· Threadgill-Sowder, 1984· Lemaire & Lecacheur,

2011) και είναι περισσότερο πιθανό να αναγνωρίσουν το εύρος των εκτιμήσεων που μπορούν να πραγματοποιηθούν (Sowder & Wheeler, 1989). Τέτοια στοιχεία επισημαίνουν αφενός την αναπτυξιακή πορεία της εκτίμησης και αφετέρου τον αναπτυξιακό ρόλο της εκτίμησης στη μάθηση των μαθηματικών.

Παρόλο που στις περισσότερες σχετικές έρευνες οι συμμετέχοντες δεν δέχτηκαν στοχευμένη διδασκαλία για τις εκτιμήσεις, ένα αρκετά ικανοποιητικό ποσοστό αυτών τις πραγματοποιούν με επιτυχία χρησιμοποιώντας συχνά τις κατάλληλες στρατηγικές εκτίμησης. Αυτό ενδεχομένως δείχνει ότι οι γνώσεις τους για τις εκτιμήσεις έχουν χαρακτηριστικά άτυπης γνώσης που δεν προέρχονται απαραίτητα από τη διδασκαλία στο σχολείο. Το στοιχείο αυτό πιθανότατα υποδηλώνει πως η ανάπτυξή της βασίζεται στην εμπειρία και τις γνώσεις των ατόμων και συμβάλλει στην ανάπτυξη της σημασίας των αριθμών, των πράξεων και των ικανοτήτων υπολογισμού (Λεμονίδης, 2013, 2020). Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια γίνονται προσπάθειες για τη διδακτική αξιοποίηση και ενίσχυσή τους.

Όπως και η επίλυση προβλήματος, η εκτίμηση δεν μπορεί να αποτελέσει μια ξεχωριστή ενότητα των μαθηματικών απομονωμένη από τις άλλες. Αντ' αυτού, διαπερνά πολλούς –αν όχι όλους– θεματικούς άξονες στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά και, προκειμένου να αναπτυχθεί αποτελεσματικά, χρειάζεται να καλλιεργηθεί και να ενθαρρυνθεί κατά τη διάρκεια πολλών χρόνων ενασχόλησης με τα μαθηματικά (Reys, 1986). Όταν διδάσκεται ως μεμονωμένη ενότητα, όπως συχνά συμβαίνει, η προσπάθεια μπορεί να οδηγήσει ακόμη και σε αντίθετα αποτελέσματα, προκαλώντας στους μαθητές αντιπάθεια και δυσπιστία για την ίδια τη διαδικασία.

1.2 Η σημασία της εκτίμησης

Τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον των ερευνητών από τον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης για τη μελέτη των δυνατοτήτων πραγματοποίησης εκτιμήσεων ολοένα αυξάνεται. Οι λόγοι που οι ερευνητές ασχολούνται ιδιαίτερα εκτεταμένα με την εκτίμηση είναι αρκετοί, τρεις όμως φαίνεται να είναι οι κυριότεροι και αυτοί που αναδεικνύουν τη σημασία της.

Πρώτον, η πραγματοποίηση μιας εκτίμησης είναι λιγότερο περίπλοκη από οποιονδήποτε άλλον υπολογισμό που οδηγεί σε αποτέλε-

σμα με ακρίβεια. Αυτή η απλότητα στη διαδικασία αφορά κυρίως στην ευχρηστία της εκτίμησης, δηλαδή στο πόσο εύκολο είναι να πραγματοποιήσει κάποιος μια εκτίμηση σε σχέση με την πραγματοποίηση ενός ακριβούς υπολογισμού (Reys & Bestgen, 1981· LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993). Για παράδειγμα, η εκτίμηση ενός αποτελέσματος για την πρόσθεση $124 + 83$, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με στρογγυλοποίηση και των δύο όρων της πρόσθεσης προς την πλησιέστερη δεκάδα (π.χ., $120 + 80$) ή κρατώντας σταθερό τον έναν όρο και προσαρμόζοντας τον άλλον όρο (π.χ., $124 + 86$) ή με τη χρήση άλλων στρατηγικών (βλ. Κεφάλαιο 2), οδηγεί στην ανάγκη για λιγότερο απαιτητικούς αριθμητικούς υπολογισμούς. Η ικανότητα αυτή να μεταφράζουμε ένα σύνθετο έργο σε ένα κατά προσέγγιση αποτέλεσμα αποκαλύπτει την εστίασή μας στο νόημα των αριθμών και των πράξεων (van de Walle, Lovin, Karp, & Bay-Williams, 2017).

Δεύτερον, υπάρχει μεγάλη ποικιλία στρατηγικών εκτίμησης που μπορούν να οδηγήσουν σε περισσότερο ή λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις. Ανάλογα με τη χρήση των στρατηγικών εκτίμησης επιτυγχάνεται η εγγύτητα στον ακριβή υπολογισμό (Reys, Ryblov, Bestgen, & Wyatt, 1982· LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993· Levine, 1982). Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν και η εκτέλεση της πρόσθεσης $120 + 80$ είναι πιο εύκολη, η εκτέλεση της πρόσθεσης $125 + 85$, η οποία στηρίζεται στην ίδια λογική της στρογγυλοποίησης και είναι, ωστόσο, περισσότερο σύνθετη, είναι εκείνη που διασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα της εκτίμησης θα βρίσκεται πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα. Οι καλοί εκτιμητές γνωρίζουν και χρησιμοποιούν πολλές στρατηγικές εκτίμησης, προσαρμόζοντάς τις ανάλογα με τις απαιτήσεις των υπολογισμών (Dowker, 1992, 1997· Lemaire & Brun, 2014, 2016· Dowker, Flood, Griffiths, Harriss, & Hook, 1996). Η ποικιλία των στρατηγικών σε καταστάσεις που ενισχύουν την εκτίμηση απαιτεί στέρεη γνώση της αξίας των αριθμών και των μαθηματικών ενεργειών και συνδέεται συχνά με τους νοερούς υπολογισμούς και συλλογισμούς κατά τη σύγκριση και επαλήθευση με βάση τις ακριβείς συνθήκες (Cochran & Hartmann Dugger, 2013· van de Walle et al., 2017). Είναι ενδιαφέρον να τονιστεί ότι η απλότητα και η εγγύτητα στις εκτιμήσεις συχνά λειτουργούν αντιθετικά μεταξύ τους (Lemaire et al., 2000), καθώς μια εύκολη εκτίμηση συχνά δεν βρίσκεται κοντά στον ακριβή υπολογισμό. Παρόμοια, είναι δυνατόν να ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή η εκτίμηση που προ-

σεγγίζει καλύτερα έναν ακριβή υπολογισμό δεν πραγματοποιείται πάντοτε με τον πιο εύκολο τρόπο.

Τρίτον, οι καταστάσεις που απαιτούν την πραγματοποίηση εκτιμήσεων ποτέ δεν οδηγούν σε μόνο μία σωστή απάντηση, αλλά είναι αποδεκτό ένα πεδίο τιμών (van de Walle et al., 2017). Με άλλα λόγια, επειδή ακριβώς είναι δυνατόν για μια κατάσταση να υπάρχουν πολλές εκτιμήσεις, άλλοτε περισσότερο ή λιγότερο διαφορετικές μεταξύ τους, η επιτυχία σε αυτές εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Τέτοιοι παράγοντες μπορεί να αφορούν, μεταξύ άλλων, την ίδια την κατάσταση που απαιτεί την πραγματοποίηση της εκτίμησης (π.χ., οικειότητα με το έργο που εκτελείται), το είδος της εκτίμησης (π.χ., εκτίμηση για ένα μετρήσιμο χαρακτηριστικό, όπως τον χρόνο) ή την πολυπλοκότητα των υπολογισμών στην εκτίμηση. Όλα τα παραπάνω, μαζί με την υποκειμενικότητα που χαρακτηρίζουν τις εκτιμήσεις, οδηγούν σε περισσότερες από μία απαντήσεις σε μια κατάσταση εκτίμησης.

Αν και υπάρχουν πολλοί που επιχειρηματολογούν υπέρ της σπουδαιότητας της εκτίμησης, τα στοιχεία από την αντιμετώπισή της στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης είναι αντιφατικά (Treffers & van den Heuvel-Panhuizen, 2020) και μετριάζουν συχνά αυτή τη σπουδαιότητα. Για παράδειγμα, η εισαγωγή των παιδιών στις εκτιμήσεις ξεκινά αργά, πιθανότατα ακολουθώντας τις εισηγήσεις ερευνητών (π.χ., Siegler & Booth, 2005) που υποστηρίζουν ότι τα παιδιά είναι σε θέση να τις πραγματοποιούν μετά την ηλικία των 8-9 ετών. Ωστόσο, παρόλο που γνωρίζουμε πια ότι ακόμα και πριν από την έναρξη της τυπικής εκπαίδευσης τα μικρά παιδιά καθημερινά εμπλέκονται και χρησιμοποιούν με επιτυχία τις εκτιμήσεις (Sekeris, Empsen, Verschaffel, & Luwel, 2020· Dowker, 2003· Jordan, Mulhern, & Wylie, 2009· Δεσλή, 2011), όταν ξεκινούν την τυπική εκπαίδευση τείνουν να εκτελούν μαθηματικές διαδικασίες στη βάση των υπολογισμών με ακρίβεια, αποφεύγοντας την πραγματοποίηση εκτιμήσεων (Sekeris et al., 2020). Σε αυτό ενδεχομένως συμβάλλει αφενός η μεγάλη έμφαση στη διδασκαλία των αλγόριθμων και την απομνημόνευση τεχνικών (Boaler & Zoido, 2016) στο πλαίσιο του σχολείου και αφετέρου η περιορισμένη ανοχή στο λάθος ή την απόκλιση από την ακριβή απάντηση που συνοδεύει συχνά τη διδασκαλία των υπολογισμών με ακρίβεια (Sowder & Wheeler, 1989· Sekeris et al., 2020).

Πέρα από τους λόγους για τους οποίους αξίζει να ασχοληθεί κάποιος ερευνητικά με την εκτίμηση και τις προοπτικές σύνδεσής της με

τα μαθηματικά, η σπουδαιότητά της συνδέεται με τη μεγάλη χρησιμότητά της καθώς προσφέρει σημαντική στήριξη στα άτομα για την κατανόηση του πραγματικού κόσμου. Αναλυτικά τα στοιχεία που συγκλίνουν στην ανάδειξη της σπουδαιότητας της εκτίμησης περιγράφονται στην ενότητα που ακολουθεί.

1.3 Η χρησιμότητα της εκτίμησης

Στις αναθεωρήσεις των αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι εκτιμήσεις παρουσιάζονται ως μία από τις βασικές μαθησιακές επιδιώξεις και αποτελούν σημαντικό μέρος τους στην Ελλάδα και στο εξωτερικό. Καθώς τα οφέλη από την έκθεση των παιδιών σε δραστηριότητες εκτίμησης έχουν επισημανθεί, ενθαρρύνεται η συστηματική διδασκαλία της μέσα από προτάσεις που αφορούν συγκεκριμένες στρατηγικές εκτίμησης. Στην Ελλάδα, το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ, 2003) αναγνώρισε την αναγκαιότητα διδασκαλίας των εκτιμήσεων και τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών για πρώτη φορά το 2006 συμπεριέλαβαν τη διδασκαλία τους.

Η χρησιμότητα της εκτίμησης κυρίως τεκμαίρεται από τις δυνατότητες που προσφέρει σε μια ποικιλία πρακτικών εφαρμογών στην καθημερινή ζωή. Πιο συγκεκριμένα, η ανεπάρκεια γνώσης μιας ακριβούς τιμής μπορεί να οδηγήσει στην πραγματοποίηση μιας εκτίμησης (Segovia & Castro, 2009). Όταν δεν έχουμε όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για να πούμε με ακρίβεια, για παράδειγμα, τον αριθμό των αυτοκινήτων που ταξιδεύουν σε ένα Σαββατοκύριακο, καταφεύγουμε στον υπολογισμό κατά προσέγγιση. Υπάρχουν, επίσης, αρκετά συχνά καταστάσεις που δεν απαιτούν υψηλό επίπεδο ακρίβειας στις απαντήσεις, όπως, για παράδειγμα, όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε αν μια ποσότητα νερού μάς φτάνει για να κάνουμε μια εργασία ή αν ένα ποσό χρημάτων είναι αρκετό για να πληρώσουμε σε συγκεκριμένες αγορές μας ή πόσο χρόνο θα χρειαστούμε για την εκτέλεση μιας συνταγής. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μια εκτίμηση των σχετικών ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν την κατάσταση μπορεί να είναι αρκετή και μπορεί ακόμη μάλιστα να είναι η γρηγορότερη και πιο αποτελεσματική απάντηση. Τέλος, η διαχείριση περισσότερο «δύσκολων» αριθμών μπορεί να μας οδηγήσει στην πραγματοποίηση μιας εκτίμησης. Για παράδειγμα, η τιμή του

λίτρου της βενζίνης όπως εμφανίζεται ως δεκαδικός αριθμός (π.χ., 1,539€) γίνεται περισσότερο σαφής και κατανοητή αν μετατρέψουμε τον αριθμό σε απλούστερο, προκειμένου να υπολογίσουμε πόσα λίτρα βενζίνης θα βάλουμε με ένα συγκεκριμένο διαθέσιμο ποσό χρημάτων. Επομένως, οι εκτιμήσεις αφενός επιτρέπουν έναν γρήγορο υπολογισμό που μπορεί να δώσει απάντηση σε πολλά πρακτικά ζητήματα και αφετέρου καθιστούν το άτομο ικανό να διαχειριστεί δεδομένα που είτε προέρχονται από την καθημερινή ζωή είτε περιέχουν γνήσιο μαθηματικό περιεχόμενο.

Πέρα από την πρακτική χρησιμότητα της εκτίμησης, αναγνωρίζεται και ο ρόλος της ως μέσο πρόβλεψης ή στρατηγική ελέγχου προκειμένου να αξιολογηθεί η λογικότητα μιας απάντησης (Siegler & Booth, 2005· Dowker, 2003· Yang, 2019· Ganor-Stern, 2016· van den Heuvel-Panhuizen, 2001a· Levin, 1981). Κατά τη διάρκεια πραγματοποίησης ενός κατά προσέγγιση υπολογισμού, η εκτίμηση παρέχει άμεσο ή έμμεσο έλεγχο, ώστε να διασφαλιστεί ότι ο υπολογισμός κινείται στη σωστή κατεύθυνση. Για παράδειγμα, η πρόσθεση $28 + 16$ αναμένεται να δίνει άθροισμα κοντά στο 45 ή το 50 (δεδομένου ότι στρογγυλοποιούνται οι όροι έως $30 + 15$ ή $30 + 20$, αντίστοιχα), με αποτέλεσμα η εκτίμηση να αποφέρει άμεσο έλεγχο της απάντησης. Κατά συνέπεια, στην περίπτωση που ακολουθήσει ο ακριβής γραπτός υπολογισμός, αν βρεθεί άθροισμα 314 (πιθανότατα εξαιτίας κάποιου λάθους στη διαδικασία εκτέλεσης του γραπτού αλγόριθμου), τότε η εκτίμηση που έχει προηγηθεί μπορεί να λειτουργήσει ως μέσο έμμεσου ελέγχου της λογικότητας του αποτελέσματος. Με άλλα λόγια, ο λύτης είναι δυνατόν να πραγματοποιήσει μια σύγκριση ανάμεσα σε αυτό που περίμενε να βρει και αυτό που τελικά βρήκε, και να ελέγξει, στην περίπτωση που απέχουν πολύ τα δύο αποτελέσματα μεταξύ τους, ποιο είναι το σωστό ή πού εντοπίζεται το λάθος. Έτσι, μετά την ολοκλήρωση του υπολογισμού, η εκτίμηση προσφέρει την ευκαιρία να ανακληθεί η αρχική απάντηση. Όπως επισημαίνουν οι Reys, Lindquist, Lambdin και Smith (2012), η έκθεση των παιδιών σε καταστάσεις που προσφέρουν ευκαιρίες για εκτίμηση από μικρή ηλικία θα τα βοηθήσει να τη συμπεριλάβουν, πριν από, κατά τη διάρκεια ή μετά την ολοκλήρωση του υπολογισμού, ανάμεσα στις μαθηματικές τους μεθόδους προκειμένου να διαθέτουν πληροφορίες σχετικά με το εάν ο υπολογισμός τους κλίνει προς τη λογικότητα.

Η ικανότητα στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων φαίνεται να συσχετίζεται θετικά με πολλά στοιχεία που απαιτούν μαθηματική γνώση και κατανόηση. Τουλάχιστον αυτό δείχνουν αποτελέσματα ερευνών που συγκρίνουν τις επιδόσεις των παιδιών σε καταστάσεις εκτίμησης και τη γενική βαθμολογία τους σε τεστ μαθηματικής επίδοσης (π.χ., Booth & Siegler, 2006· Siegler & Booth, 2005· Daker & Lyons, 2018). Ενδεχομένως αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι η εκτίμηση επιτρέπει να προχωρήσουμε πέρα από τη μηχανιστική εφαρμογή των μαθηματικών διαδικασιών και τεχνικών, και να εστιάσουμε στην εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης με ευέλικτους και αποτελεσματικούς τρόπους.

Στη διαδικασία της εκτίμησης συντελούνται γνωστικές διεργασίες που απαιτούνται κυρίως για την πραγματοποίηση αριθμητικών πράξεων και τη διαχείριση των αριθμών, η μελέτη των οποίων προσφέρει σημαντικές πληροφορίες για τη γνωστική ανάπτυξη στο πεδίο των μαθηματικών γενικότερα (LeFevre et al., 1993· Schoen, Blume, & Hoover, 1990· Sowder & Wheeler, 1989) και της επίλυσης προβλήματος ειδικότερα (Greeno, Collins, & Resnick, 1996). Τέτοιες γνωστικές διεργασίες αφορούν τη μνήμη, τη χρήση μαθηματικής γλώσσας, την ταχύτητα επεξεργασίας κ.λπ. και θεωρούνται υψηλού επιπέδου (Reys et al., 1982). Ωστόσο, σημαντικά οφέλη στην ανάπτυξη μεταγνωστικών διαδικασιών επίσης αναγνωρίζονται. Όπως επισημαίνει η Sowder (1992), τα άτομα που παρουσιάζουν επιτυχία στις εκτιμήσεις διακρίνονται από ευελιξία, αυτοπεποίθηση και ανοχή στις αποκλίσεις ανάμεσα στις εκτιμήσεις τους και τους ακριβείς υπολογισμούς. Επίσης, είναι σε θέση να νοηματοδοτούν τα μαθηματικά με τα οποία ασχολούνται και αναζητούν τη λογικότητα ελέγχοντας τα αποτελέσματά τους κάθε φορά που εμπλέκονται σε μαθηματικά έργα. Η σημασία που αποδίδουν στην εκτίμηση και τον έλεγχο τους επιτρέπει να παρουσιάζουν ποικιλία μεταγνωστικών στρατηγικών οι οποίες ευνοούν με τη σειρά τους τη διαμόρφωση ενεργητικής στάσης στην επίλυση προβλημάτων. Ευρήματα ερευνών δείχνουν πως η θετική στάση απέναντι στην εκτίμηση (Bestgen, Reys, Rybolt, & Wyatt, 1980), η εμπιστοσύνη στην εκτίμηση (Reys et al., 1982) και η υψηλή αξία που αποδίδει κάποιος στην εκτίμηση (LeFevre et al., 1993) συνδέονται με περισσότερες επιτυχίες εκτιμήσεις.

Πρόσφατα, οι Treffers και van den Heuvel-Panhuizen (2020), σε μια ανάλυση των διδακτικών προσεγγίσεων, όπως αυτές διαφαίνονται στα

επίσημα σχολικά εγχειρίδια της Ολλανδίας, προτείνουν έναν διαφορετικό ρόλο της εκτίμησης αναδεικνύοντας περαιτέρω την αξία της. Συγκεκριμένα, θεωρούν την εκτίμηση σημαντικό διδακτικό εργαλείο για τη διδασκαλία των υπολογισμών με ακρίβεια. Αυτή η ιδέα εξηγείται καλύτερα μέσα από το παράδειγμα της πρόσθεσης $52 + 29$. Αν γνωρίζουμε την κατώτατη τιμή (π.χ., 70) και την ανώτατη τιμή ανάμεσα στις οποίες βρίσκεται το ακριβές άθροισμα, ερωτήσεις όπως «Πόσο πιο πάνω από το 70;» «Πόσο πιο κάτω από το 90;» (σ. 91) μπορούν να αξιοποιηθούν, προκειμένου να γίνει περισσότερο ακριβής η απάντηση και να απομακρυνθούμε από μηχανιστικές τεχνικές που αποστηθίζουμε χωρίς νόημα. Για τους ίδιους, οι εκτιμήσεις δεν αποτελούν έναν μεμονωμένο στόχο αλλά συμβάλλουν στην ενίσχυση της κατανόησης των αριθμών, της απόδοσης νοήματος σε αυτούς αλλά και της δυνατότητας χρήσης και εφαρμογής τους.

1.4 Είδη εκτίμησης

Στη βιβλιογραφία διακρίνονται τρεις κύριοι τύποι εκτίμησης, ο καθένας από τους οποίους απαιτεί διαφορετική κατανόηση και διαφορετικές ικανότητες και δεξιότητες (Sowder, 1992· Hogan & Brezinski, 2003· van den Heuvel-Panhuizen, 2001a· van de Walle et al., 2017). Το μόνο κοινό στοιχείο μεταξύ τους είναι ότι καταλήγουν σε μια προσεγγιστική απάντηση (Booth & Siegler, 2006), δεδομένου ότι η ποικιλομορφία τους επικεντρώνεται σε διαφορές στα χαρακτηριστικά τους, στην ανάπτυξή τους και στους παράγοντες δυσκολίας. Οι τύποι εκτίμησης είναι: η εκτίμηση ενός υπολογισμού, η εκτίμηση πλήθους και η εκτίμηση μέτρησης.

Η *εκτίμηση ενός υπολογισμού* ή *υπολογιστική εκτίμηση* (computational estimation) αναφέρεται στον κατά προσέγγιση προσδιορισμό του αποτελέσματος ενός αριθμητικού υπολογισμού που δεν μπορούμε ή δεν μας ενδιαφέρει να πραγματοποιήσουμε με ακρίβεια. Χρησιμοποιείται σε καταστάσεις που απαντούν στην ερώτηση «Πόσο περίπου κάνει το...;» όπως, για παράδειγμα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά με το μυαλό το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 21×8 ή της πρόσθεσης $4.578 + 3.547 + 1.936$.

Η *εκτίμηση πληθικότητας* ή *εκτίμηση πλήθους* (numerosity estimation ή quantity estimation) αναφέρεται στον κατά προσέγγιση υπολογισμό

του αριθμού των στοιχείων σε ένα σύνολο. Αναγνωρίζεται συνήθως σε καταστάσεις που απαντούν στην ερώτηση «Πόσα περίπου είναι αυτά;» όπως όταν, για παράδειγμα, θέλουμε να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση τον αριθμό των φιλάθλων σε ένα στάδιο ή τον αριθμό των βιβλίων σε ένα ράφι της βιβλιοθήκης. Για αρκετούς ερευνητές στον συγκεκριμένο τύπο εκτίμησης αναγνωρίζεται και εντάσσεται ένας ακόμη τύπος εκτίμησης. Πρόκειται για την *εκτίμηση αριθμογραμμής* (number line estimation), η οποία περιλαμβάνει την εκτίμηση της θέσης ενός αριθμού πάνω σε μια αριθμογραμμή (π.χ., «Πού περίπου βρίσκεται ο αριθμός 78;» σε μια αριθμογραμμή από το 1 έως το 100) ή την εκτίμηση του αριθμού που αναπαριστά ένα συγκεκριμένο σημείο μιας αριθμογραμμής (π.χ., «Ποιος αριθμός περίπου βρίσκεται εδώ;» καταδεικνύοντας μια συγκεκριμένη θέση πάνω σε αριθμογραμμή).

Η *εκτίμηση μέτρησης* ή *μέτρηση κατ' εκτίμηση* (measurement estimation) αναφέρεται στον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της τιμής μιας μέτρησης χωρίς τη χρήση τυπικών εργαλείων μέτρησης. Αναγνωρίζεται σε καταστάσεις στις οποίες ζητείται η κατά προσέγγιση μέτρηση ενός χαρακτηριστικού ενός αντικειμένου ή μιας κατάστασης (π.χ., όγκος, χρόνος, βάρος) και απουσιάζουν τα συγκεκριμένα όργανα μέτρησης για αυτό, όπως όταν, για παράδειγμα, θέλουμε να υπολογίσουμε αν χωρά το αυτοκίνητό μας σε μια θέση πάρκινγκ, πόση ώρα θα χρειαστούμε περίπου για να ολοκληρώσουμε μια εργασία ή πόσα κιλά περίπου ζυγίζει ένα αντικείμενο.

Οι τρεις παραπάνω τύποι εκτίμησης αφορούν σε *ποσοτικές αριθμητικές αναπαραστάσεις* τις οποίες χρειάζεται να διαχειριστούμε πραγματοποιώντας εκτιμήσεις. Οι Siegler και Booth (2005), αναγνωρίζοντας πως η εκτίμηση αποτελεί «μια διαδικασία μετάφρασης μεταξύ εναλλακτικών ποσοτικών αναπαραστάσεων από τις οποίες τουλάχιστον η μία δεν είναι ακριβής» (σ. 198), προβαίνουν σε διαχωρισμό ανάμεσα στις καταστάσεις εκτίμησης που εμπεριέχουν *αριθμητικές αναπαραστάσεις* και σε εκείνες που εμπεριέχουν *μη αριθμητικές αναπαραστάσεις*. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση των αριθμητικών αναπαραστάσεων κατά την πραγματοποίηση των εκτιμήσεων διαχειριζόμαστε αριθμούς που βρίσκονται στη μία ή και στις δύο πλευρές της μετάφρασης, όπως στους τρεις τύπους εκτίμησης που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Για παράδειγμα, η υπολογιστική εκτίμηση απαιτεί τη μετάφραση μιας αριθμητικής αναπαράστασης (π.χ., 18×5) σε μια άλλη αριθμητική αναπα-

ράσταση (περίπου 100). Η εκτίμηση πλήθους περιλαμβάνει τη μετάφραση μιας μη αριθμητικής αναπαράστασης (π.χ., η οπτική αναπαράσταση του συνόλου των σελίδων σε ένα βιβλίο) σε μια άλλη που είναι αριθμητική (περίπου 250 σελίδες). Παρόμοια, η εκτίμηση μέτρησης περιλαμβάνει τη μετάφραση μιας μη αριθμητικής αναπαράστασης (π.χ., η οπτική αναπαράσταση του ύψους ενός κτηρίου) σε μια άλλη αριθμητική αναπαράσταση (περίπου 20 μέτρα). Στην περίπτωση της δεύτερης κατηγορίας, αυτής των μη αριθμητικών αναπαραστάσεων, δεν υπάρχουν αριθμοί σε καμία από τις δύο πλευρές της μετάφρασης και απαιτείται η μετάφραση μιας μη αριθμητικής αναπαράστασης (π.χ., η φωτεινότητα μιας λάμπας) σε άλλη μη αριθμητική αναπαράσταση (χωροταξία μιας περιοχής). Οι εκτιμήσεις με αριθμητικές αναπαραστάσεις αποτελούν την πιο χαρακτηριστική περίπτωση εκτιμήσεων και με αυτές, ακολουθώντας την ταξινόμησή τους στους τρεις τύπους (υπολογιστική εκτίμηση, εκτίμηση πλήθους και εκτίμηση μέτρησης), ασχολείται το παρόν βιβλίο.

Οι καταστάσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται όλοι οι τύποι εκτίμησης δεν απαιτούν ακριβείς μετρήσεις ή υπολογισμούς, καθώς οι εκτιμήσεις αξιοποιούν και βασίζονται στο σχετικό μέγεθος και τη διαχείριση των αριθμών (van den Heuvel-Panhuizen, 2001a). Φαίνεται όμως πως η εκτίμηση πλήθους και η υπολογιστική εκτίμηση συνδέονται άμεσα με την ικανότητά μας για αίσθηση του αριθμού (number sense) και συχνά περιλαμβάνουν στρογγυλοποιήσεις των αριθμών που εμπλέκονται. Οι εκτιμήσεις που αφορούν σε μια μέτρηση για ένα χαρακτηριστικό ή τον υπολογισμό θέσεων σε μια αριθμογραμμή συνδέονται περισσότερο με την ικανότητά μας για χωρικό συλλογισμό. Ωστόσο, και οι τρεις τύποι εκτίμησης συχνά αναδεικνύονται σε περιστάσεις που συνδυαστικά απαιτούν τόσο την ικανότητά μας για αίσθηση του αριθμού όσο και την ικανότητά μας για χωρικό συλλογισμό. Αναλυτικά, τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά και οι δυνατότητες παιδιών και ενηλίκων στα τρία διαφορετικά είδη εκτίμησης περιγράφονται ξεχωριστά στα κεφάλαια που ακολουθούν. Αρχικά, όμως, είναι σημαντικό να παρουσιαστούν συνοπτικά η αίσθηση του αριθμού και οι νοεροί υπολογισμοί ώστε να γίνει κατανοητή η σχέση τους με τις εκτιμήσεις.

1.5 Αίσθηση του αριθμού, νοεροί υπολογισμοί και εκτιμήσεις

1.5.1 Αίσθηση του αριθμού

Ως αίσθηση του αριθμού ορίζεται η «γενική κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων μαζί με την ικανότητα και την τάση για χρήση αυτής της κατανόησης με ευελιξία, προκειμένου να αναπτύξει κανείς χρήσιμες στρατηγικές για τη διαχείριση των αριθμών και των πράξεων με αυτούς» (McIntosh, Reys, & Reys, 1992, σ. 3). Ο όρος αναφέρεται στην ικανότητα ενός ατόμου να αναγνωρίζει και να καταλαβαίνει το νόημα των αριθμών, των αριθμητικών πράξεων και των σχέσεων μεταξύ τους, και να χρησιμοποιεί αριθμητικά δεδομένα ως μέσο για να επεξεργάζεται και να ερμηνεύει πληροφορίες από τον πραγματικό κόσμο με σκοπό την επικοινωνία. Αυτή η ικανότητα είναι απαραίτητη για να είναι σε θέση «να πραγματοποιεί μαθηματικές κρίσεις με ευελιξία και να αναπτύσσει χρήσιμες και αποτελεσματικές στρατηγικές κατά τη διαχείριση αριθμητικών καταστάσεων» (McIntosh, Reys, Reys, Bana, & Farrell, 1997, σ. 407). Επεκτείνοντας την οπτική αυτή για την αίσθηση του αριθμού οι Gersten και Chard (1999) υποστηρίζουν ότι η άνεση και η ευελιξία που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της αίσθησης του αριθμού οδηγούν στην επίτευξη μιας αυτοματοποίησης των αριθμητικών συνδυασμών, η οποία με τη σειρά της απελευθερώνει δυνάμεις και πόρους για υψηλού επιπέδου επίλυση προβλήματος. Η Sfard (2008) επισημαίνει ότι η βαθιά κατανόηση των αριθμών και των ιδιοτήτων οδηγεί τα άτομα στην πραγματικότητα να εξατομικεύουν τις γνώσεις τους για τους αριθμούς και να προχωρούν σε συνδέσεις αυτών των γνώσεων με την εφαρμογή τους σε τρόπους υπολογισμού. Καθώς η αίσθηση του αριθμού θεωρείται αρκετά σύνθετη για να προσδιοριστεί (Andrews & Sayers, 2015), συχνά παρουσιάζονται διαφοροποιήσεις στην αναγνώριση των στοιχείων που την απαρτίζουν (για εκτενή περιγραφή της πολυσημίας του όρου που χρησιμοποιείται για την αίσθηση του αριθμού, βλ. Whitacre, Henning, & Atabaş, 2020).

Οι McIntosh et al. (1992), στη βάση της θεώρησης της Sowder (1992) σύμφωνα με την οποία η αίσθηση του αριθμού εμπεριέχει μια ολιστική προσέγγιση της ποσοτικής διαίσθησης, διαμόρφωσαν ένα μοντέλο με τα συστατικά της αίσθησης του αριθμού (βλ. Πίνακα 1.1). Τρεις

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

Τα συστατικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού
σύμφωνα με τους McIntosh, Reys και Reys (1992)

1. Γνώση και άνεση με τους αριθμούς	
Αίσθηση της τακτικότητας των αριθμών	Θεσιακή αξία
	Σχέση μεταξύ των αριθμών
	Διάταξη αριθμών διαφορετικού είδους
Πολλαπλές αναπαραστάσεις των αριθμών	Διαγράμματα/Σύμβολα
	Ισοδύναμοι αριθμητικοί τύποι (σύνθεση/αναδόμηση)
	Σύγκριση με σημεία αναφοράς
Αίσθηση του σχετικού και απόλυτου μεγέθους των αριθμών	Σύγκριση με υλικό αντικείμενο
	Σύγκριση με μαθηματικό αντικείμενο
Σύστημα αναφοράς	Μαθηματικό
	Προσωπικό
2. Γνώση και άνεση με τις αριθμητικές πράξεις	
Κατανόηση της επίδρασης των αριθμητικών πράξεων	Πράξεις με φυσικούς αριθμούς
	Πράξεις με κλάσματα/δεκαδικούς αριθμούς
Κατανόηση των μαθηματικών ιδιοτήτων	Αντιμεταθετική ιδιότητα
	Προσεταιριστική ιδιότητα
	Επιμεριστική ιδιότητα
	Ιδιότητες
	Αντιστροφή
Κατανόηση της σχέσης μεταξύ των αριθμητικών πράξεων	Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός
	Αφαίρεση/Διαίρεση
	Πρόσθεση/Αφαίρεση
	Πολλαπλασιασμός/Διαίρεση
3. Εφαρμογή της γνώσης και της άνεσης με τους αριθμούς και τις αριθμητικές πράξεις σε υπολογιστικά περιβάλλοντα	
Κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στο πλαίσιο του προβλήματος και τον απαραίτητο υπολογισμό	Αναγνώριση των δεδομένων με ακρίβεια ή κατά προσέγγιση
	Επίγνωση της δυνατότητας να υπάρχουν ακριβείς ή προσεγγιστικές λύσεις