# Πρόλογος για την ελληνική έκδοση

Το βιβλίο αυτό είναι η μετάφραση της 11ης έκδοσης του συγγράμματος *Elementary Linear Algebra*, του Howard Anton, εμπλουτισμένο με αντιπροσωπευτικές εφαρμογές που προέρχονται από διάφορα επιστημονικά πεδία, όπως διοίκηση επιχειρήσεων, οικονομικά, επιστήμες του μηχανικού, επιστήμη των υπολογιστών και θετικές επιστήμες.

Το σύγγραμμα αποτελεί μια άρτια δομημένη εισαγωγική παρουσίαση της Γραμμικής Άλγεβρας κατάλληλης για ένα πρώτο προπτυχιακό μάθημα. Οι συγγραφείς παρουσιάζουν με διαυγή και άμεσο τρόπο τις βασικές αρχές και αποδεικνύουν ότι η Γραμμική Άλγεβρα είναι αφενός ένα ενιαίο αντικείμενο και όχι απλώς μια συλλογή μεμονωμένων ορισμών και τεχνικών, και αφετέρου το απαραίτητο εργαλείο για την αντιμετώπιση προβλημάτων της πραγματικής ζωής.

Όπως αναφέρει ο Howard Anton στον πρόλογο του βιβλίου η πρόθεση του συγγραφέα είναι να παρουσιάσει σε ένα πρώτο προπτυχιακό μάθημα τις βασικές αρχές της Γραμμικής Άλγεβρας με τον διαυγέστερο δυνατό και ορθά παιδαγωγικό τρόπο. Το γεγονός ότι το βιβλίο χρησιμοποιείται ως το βασικό σύγγραμμα για το μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας σε πάρα πολλά πανεπιστήμια των ΗΠΑ και αλλού, καθώς και οι πολλαπλές εκδόσεις και οι μεταφράσεις του σε διάφορες γλώσσες όπως γερμανικά, γαλλικά, ινδονησιακά, ισπανικά, πορτογαλικά αποδεικνύουν ότι οι συγγραφείς έχουν πετύχει τον σκοπό τους.

Το βιβλίο παρουσιάζεται τώρα μεταφρασμένο και στο ελληνικό κοινό. Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζει τόσο ο μεταφραστής όσο και οι επιμελητές είναι η απόδοση κάποιων όρων στη γλώσσα μας, οι οποίοι είτε δεν είναι δόκιμοι είτε δεν είναι καθολικά αποδεκτοί και καθιερωμένοι. Έγινε προσπάθεια να διατηρήσουμε όπου ήταν επιτρεπτό τους καθολικά αποδεκτούς όρους. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ακόμα και το δεύτερο βασικό αντικείμενο που πραγματεύεται η Γραμμική Άλγεβρα, το πρώτο είναι το διάνυσμα, ο όρος matrix αποδίδεται στα περισσότερα συγγράμματα ως πίνακας. Η συγκεκριμένη απόδοση μοιάζει αυθαίρετη μιας και πέρα από μια εξωτερική ομοιότητα με το οικείο αντικείμενο πίνακας, το οποίο περιέχει δεδομένα σε κατάλληλες θέσεις, η λατινική λέξη matrix δεν έχει καμία σχέση με τη λέξη πίνακας. Ψάχνοντας στα λεξικά θα δούμε ότι matrix σημαίνει uterus, womb, δηλαδή μήτρα. Ανατρέχοντας επιπλέον στις πηγές θα δούμε ότι ο James Joseph Sylvester είναι μάλλον ο πρώτος που έδωσε σημασία σε μια «ορθογώνια διάταξη όρων με γραμμές και στήλες» και σε μια εργασία του το 1850 [1] αναφέρει:

> *For this purpose, we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of $m$ lines and $n$ columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of*

1. J. J. Sylvester: Additions to the articles "On a new class of theorems" and "On Pascal's Theorem", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 3, Volume 37, 1850, pp. 363-370.

*determinants by fixing upon a number p, and selecting at will p lines and p columns, the squares corresponding of pth order.* [2]

Αλλού [3] δε γράφει:

*I have (...) defined a Matrix as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent* [4] ...

Ο Sylvester, λοιπόν, χρησιμοποίησε τον όρο matrix με τη συμβατική του σημασία, ώστε να σημαίνει το «μέσο μέσα στο οποίο κάτι άλλο αναπτύσσεται ή από το οποίο κάτι άλλο προέρχεται ή γεννιέται». Έτσι επιλέξαμε να αποδώσουμε τον όρο matrix ως μήτρα. Αυτός ο όρος δεν χρησιμοποιείται πρώτη φορά, τον χρησιμοποιεί και ο Σ. Τραχανάς στα βιβλία του της Κβαντομηχανικής. Ένας εναλλακτικός όρος που έχει προταθεί από τους Ε. Γαλλόπουλο και Μ. Βραχάτη είναι το μητρώο. Παραπέμπουμε στον πρόλογο του Ε. Γαλλόπουλου [5] για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη χρήση των όρων μήτρα και μητρώο.

Για την Ιστορία να αναφέρουμε ότι ο Sylvester, ο οποίος ενδιαφερόταν κυρίως για τις ορίζουσες, χρησιμοποίησε το αντικείμενο matrix μάλλον τυπικά. Αργότερα ο Arthur Cayley, ο οποίος υπήρξε συνεργάτης του Sylvester, μελετώντας τους μετασχηματισμούς της γραμμικής κίνησης δηλαδή τους γραμμικούς μετασχηματισμούς στο επίπεδο συνειδητοποίησε ότι το αντικείμενο αυτό είναι μια αλγεβρική οντότητα και σε εργασίες του το 1855 και 1858 όρισε τη μήτρα καθώς και τις αλγεβρικές πράξεις μεταξύ των μητρών, με τον πολλαπλασιασμό να αντιστοιχεί στη σύνθεση δύο μετασχηματισμών θεμελιώνοντας έτσι την Άλγεβρα Μητρών.

Στη προσπάθεια της μεταφοράς του συγγράμματος στην ελληνική γλώσσα συμμετείχαν πολλοί συνάδελφοι τους οποίους θέλω να ευχαριστήσω. Αρχικά τον μεταφραστή Κωνσταντίνο Κυρίτση, καθώς και τον Αργύρη Δελή, τη Σοφία Δασκαλάκη, τον Γιώργο Σφήκα και τον Ευάγγελο Χατζηγεωργίου που επιμελήθηκαν διάφορα τμήματα του βιβλίου. Τέλος, ευχαριστώ τον εκδότη Κωνσταντίνο Δαρδανό για το ενδιαφέρον του να εμπλουτίσει την ελληνική πανεπιστημιακή βιβλιογραφία με το βιβλίο αυτό, τον Γιάννη Μαμάη για την άρτια και καλαίσθητη παρουσίαση του βιβλίου και τον Κωνσταντίνο Κουσουρή για τη μεταγραφή του κειμένου και των μαθηματικών τύπων σε LATEX.

*Ευάγγελος Στεφανόπουλος*
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Οκτώβριος 2021

2. «Για τον σκοπό αυτό, πρέπει να ξεκινήσουμε, όχι με μια τετραγωνική, αλλά με μια ορθογώνια διάταξη όρων που αποτελείται, υποθέτουμε, από $m$ γραμμές και $n$ στήλες. Αυτό καθαυτό δεν αντιπροσωπεύει μια ορίζουσα, αλλά είναι, σαν να λέμε, μια Μήτρα από την οποία μπορούμε να σχηματίσουμε διάφορα συστήματα οριζουσών καθορίζοντας έναν αριθμό $p$ και επιλέγοντας κατά βούληση $p$ γραμμές και $p$ στήλες, τα τετράγωνα που αντιστοιχούν σε τάξη $p$».

3. J. J. Sylvester: On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 4, Volume 1, 1851, pp. 295-305.

4. «Έχω [...] ορίσει μια Μήτρα ως μια ορθογώνια διάταξη όρων, από τους οποίους μπορεί να δημιουργηθούν διαφορετικά συστήματα οριζουσών όπως από τη μήτρα ενός κοινού γονέα [...]».

5. A. J. Laub: *Ανάλυση Μητρώων για Επιστήμονες και Μηχανικούς*, μετάφραση και επιμέλεια Ε. Γαλλόπουλος, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2010.

# Πρόλογος

Αυτό το βιβλίο είναι μια εκτεταμένη εκδοχή του βιβλίου *Elementary Linear Algebra*, ενδέκατη έκδοση, του Howard Anton. Τα εννέα πρώτα κεφάλαια αυτού του βιβλίου είναι ίδια με τα εννέα πρώτα κεφάλαια εκείνου του βιβλίου, ενώ το δέκατο κεφάλαιο αποτελείται από είκοσι εφαρμογές της γραμμικής άλγεβρας, οι οποίες αντλούνται από διάφορες περιοχές όπως τη διοίκηση επιχειρήσεων, τα οικονομικά, τις επιστήμες του μηχανικού, τη φυσική, την επιστήμη των υπολογιστών, τη θεωρία προσέγγισης, την οικολογία, τη δημογραφία και τη γενετική. Οι εφαρμογές είναι σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητες η μία από την άλλη και η καθεμία περιλαμβάνει μια λίστα μαθηματικών προαπαιτούμενων. Επομένως, ο/η κάθε διδάσκων/διδάσκουσα έχει την ευελιξία να επιλέξει εκείνες τις εφαρμογές που είναι κατάλληλες για το ακροατήριό του/της και να ενσωματώσει κάθε εφαρμογή οπουδήποτε στο μάθημα έχοντας πρώτα καλύψει τα μαθηματικά που απαιτούνται. Τα κεφάλαια 1–9 περιλαμβάνουν απλούστερες εκδοχές κάποιων από τις εφαρμογές που καλύπτονται σε μεγαλύτερο βάθος στο Κεφάλαιο 10.

Αυτή η έκδοση παρέχει μια εισαγωγική αντιμετώπιση της Γραμμικής Άλγεβρας που είναι κατάλληλη για ένα πρώτο προπτυχιακό μάθημα. Στόχος του συγγράμματος είναι να παρουσιάσει τις βασικές αρχές της Γραμμικής Άλγεβρας με τον διαυγέστερο δυνατό τρόπο —κύριο μέλημα είναι η ορθή παιδαγωγική. Παρόλο που γνώσεις Απειροστικού Λογισμού δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση, υπάρχει κάποιο προαιρετικό υλικό που επισημαίνεται με σαφήνεια για φοιτητές που έχουν τέτοιες γνώσεις. Αυτό το υλικό μπορεί να παραλειφθεί χωρίς απώλεια της συνέχειας.

## Σύνοψη των αλλαγών σε αυτήν την έκδοση

Πολλά μέρη του βιβλίου έχουν αναθεωρηθεί βάσει ενός εκτενούς συνόλου αξιολογήσεων. Οι κύριες αλλαγές είναι:

- **Νέες Ασκήσεις** Εκατοντάδες νέες ασκήσεις όλων των τύπων έχουν προστεθεί σε όλο το κείμενο.
- **Ασκήσεις για χρήση υπολογιστή** Ασκήσεις που απαιτούν τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και σχετικού λογισμικού, όπως το MATLAB, το *Mathematica* ή το Maple, έχουν προστεθεί και τα αντίστοιχα δεδομένα έχουν αναρτηθεί στους συνοδευτικούς ιστότοπους για αυτό το βιβλίο. Η χρήση της τεχνολογίας δεν είναι απαραίτητη και αυτές οι ασκήσεις μπορούν να παραλειφθούν χωρίς να επηρεαστεί η ροή του βιβλίου.
- **Αναδιοργανωμένες ομάδες ασκήσεων** Πολλές ασκήσεις με πολλαπλά ερωτήματα παλαιοτέρων εκδόσεων έχουν χωριστεί σε περισσότερες ώστε να υπάρξει μια καλύτερη ισορροπία μεταξύ περιττού και άρτιου πλήθους ασκήσεων. Για να διευκολυνθεί το έργο του διδάσκοντα στη δημιουργία εργασιών, οι ασκήσεις έχουν ομαδοποιηθεί σε σαφώς καθορισμένες κατηγορίες.
- **Αναθεωρημένο Παράρτημα Α** Το παράρτημα σχετικά με το πώς διαβάζονται και γράφονται αποδείξεις έχει επεκταθεί και αναθεωρηθεί για την καλύτερη υποστήριξη μαθημάτων που επικεντρώνονται στην απόδειξη θεωρημάτων.

- **Διαδικτυακό υλικό** Το συμπληρωματικό διαδικτυακό υλικό περιλαμβάνει τώρα διάφορες ενότητες εφαρμογών, τρεις ενότητες σε γραμμικό προγραμματισμό και μια εναλλακτική παρουσίαση των οριζουσών με βάση τις μεταθέσεις.

## Χαρακτηριστικά γνωρίσματα

- **Σχέσεις μεταξύ εννοιών** Ένας από τους κύριους παιδαγωγικούς μας στόχους είναι να μεταφέρουμε στον φοιτητή την ιδέα ότι η Γραμμική Άλγεβρα είναι ένα ενιαίο αντικείμενο και όχι απλά μια συλλογή μεμονωμένων ορισμών και τεχνικών. Ένας τρόπος όπου δείχνουμε ότι κάτι τέτοιο ισχύει είναι η χρήση μιας σειράς θεωρημάτων με ισοδύναμους ισχυρισμούς στα οποία επανεξετάζονται συνεχώς οι σχέσεις μεταξύ συστημάτων εξισώσεων, μητρών, οριζουσών, διανυσμάτων, γραμμικών μετασχηματισμών και ιδιοτιμών. Για να πάρετε μια γενική ιδέα για το πώς χρησιμοποιούμε αυτήν την τεχνική, δείτε, για παράδειγμα, τα Θεωρήματα 1.5.3, 1.6.4, 2.3.8, 4.8.8 και στη συνέχεια το Θεώρημα 5.1.5.
- **Ομαλή μετάβαση στο αφηρημένο** Επειδή για πολλούς φοιτητές η μετάβαση από τον σε γενικούς διανυσματικούς χώρους είναι δύσκολη καταβάλλεται προσπάθεια αφενός στο να εξηγηθεί ο σκοπός ή η ανάγκη αυτής της αφαίρεσης και αφετέρου στο να βοηθηθεί ο φοιτητής να «οπτικοποιήσει» αφηρημένες ιδέες, αντλώντας αναλογίες από γνωστές γεωμετρικές.
- **Μαθηματική ακρίβεια** Όπου είναι λογικά εφικτό, προσπαθούμε να είμαστε μαθηματικά ακριβείς. Παίρνοντας υπόψη το επίπεδο των φοιτητών, οι αποδείξεις παρουσιάζονται με τρόπο, κατάλληλο για αρχάριους.
- **Καταλληλότητα για διάφορα ακροατήρια** Αυτό το βιβλίο έχει σχεδιαστεί για να καλύψει τις ανάγκες φοιτητών σε τμήματα μηχανικών, επιστήμης των υπολογιστών, βιολογίας, φυσικής, διοίκησης επιχειρήσεων και οικονομικών, καθώς και εκείνων που σπουδάζουν μαθηματικά.

## Σχετικά με τις ασκήσεις

- **Διαβαθμισμένες ομάδες ασκήσεων** Κάθε ομάδα ασκήσεων στα εννέα πρώτα κεφάλαια ξεκινά με ασκήσεις ρουτίνας για εξάσκηση και προχωράει σταδιακά σε πιο ουσιώδη προβλήματα.
- **Ασκήσεις του τύπου σωστό-λάθος** Οι ασκήσεις αυτού του τύπου έχουν σχεδιαστεί για να ελέγξουν την κατανόηση των εννοιών και τη λογική συλλογιστική. Προκειμένου οι απαντήσεις να μην είναι απλές εικασίες οι φοιτητές καλούνται να αιτιολογήσουν με κάποιο τρόπο τις απαντήσεις τους.
- **Ασκήσεις για χρήση υπολογιστή** Οι ασκήσεις που απαιτούν τεχνολογικό εξοπλισμό έχουν επίσης ομαδοποιηθεί. Για να αποφευχθεί η επιβάρυνση του μαθητή με πληκτρολόγηση, τα σχετικά αρχεία δεδομένων έχουν αναρτηθεί στους ιστότοπους που συνοδεύουν αυτό το βιβλίο.

## Οδηγός για τον διδάσκοντα

Αν και τα μαθήματα γραμμικής άλγεβρας ποικίλλουν σε μεγάλο βαθμό ως προς το περιεχόμενο και τη φιλοσοφία, τα περισσότερα εμπίπτουν σε δύο κατηγορίες: εκείνα των περίπου 40 διαλέξεων και εκείνα των περίπου 30 διαλέξεων. Κατά συνέπεια, έχουμε δημιουργήσει αντίστοιχα πρότυπα ως προτάσεις για τη δημιουργία ενός περιγράμματος του μαθήματος. Φυσικά, αυτά είναι απλώς κατευθύνσεις και σίγουρα θα θέλετε να τα προσαρμόσετε, έτσι ώστε να ταιριάζουν στα δικά σας ενδιαφέροντα και στις δικές σας απαιτήσεις. Κανένα από αυτά τα ενδεικτικά πρότυπα δεν περιλαμβάνει εφαρμογές ή τις αριθμητικές μεθόδους από το Κεφάλαιο 9. Αυτά μπορούν να προστεθούν, εάν είναι επιθυμητό, και εφόσον το επιτρέπει ο χρόνος.

| | **Εκτεταμένο πρότυπο** | **Σύντομο πρότυπο** |
|---|---|---|
| **Κεφάλαιο 1**: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και μήτρες | 8 διαλέξεις | 6 διαλέξεις |
| **Κεφάλαιο 2**: Ορίζουσες | 3 διαλέξεις | 2 διαλέξεις |
| **Κεφάλαιο 3**: Ευκλείδιοι διανυσματικοί χώροι | 4 διαλέξεις | 3 διαλέξεις |
| **Κεφάλαιο 4**: Γενικοί διανυσματικοί χώροι | 10 διαλέξεις | 9 διαλέξεις |
| **Κεφάλαιο 5**: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα | 3 διαλέξεις | 3 διαλέξεις |
| **Κεφάλαιο 6**: Χώροι εσωτερικού γινομένου | 3 διαλέξεις | 1 διάλεξη |
| **Κεφάλαιο 7**: Διαγωνοποίηση και τετραγωνικές μορφές | 4 διαλέξεις | 3 διαλέξεις |
| **Κεφάλαιο 8**: Γραμμικοί μετασχηματισμοί | 4 διαλέξεις | 3 διαλέξεις |
| **Σύνολο**: | **39 διαλέξεις** | **30 διαλέξεις** |

## Επιμελητές

Οι παρακάτω ακαδημαϊκοί επιμελήθηκαν τα κείμενα αυτής της έκδοσης, έκριναν μεγάλο μέρος του περιεχομένου και έδωσαν καίριες παιδαγωγικές συμβουλές:

John Alongi, *Northwestern University*
Jiu Ding, *University of Southern Mississippi*
Eugene Don, *City University of New York at Queens*
John Gilbert, *University of Texas Austin*
Danrun Huang, *St. Cloud State University*
Craig Jensen, *University of New Orleans*
Steve Kahan, *City University of New York at Queens*
Harihar Khanal, *Embry-Riddle Aeronautical University*
Firooz Khosraviyani, *Texas A&M International University*
Y. George Lai, *Wilfred Laurier University*
Kouok Law, Georgia *Perimeter College*
Mark MacLean, *Seattle University*
Vasileios Maroulas, *University of Tennessee, Knoxville*
Daniel Reynolds, *Southern Methodist University*
Qin Sheng, *Baylor University*
Laura Smithies, *Kent State University*
Larry Susanka, *Bellevue College*
Cristina Tone, *University of Louisville*
Yvonne Yaz, *Milwaukee School of Engineering*
Ruhan Zhao, *State University of New York at Brockport*

## Συνεισφορά στις ασκήσεις

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλονται σε τέσσερα ταλαντούχα άτομα που επεξεργάστηκαν διάφορα θέματα του βιβλίου:

**Przemyslaw Bogacki**, *Old Dominion University* — ο οποίος έλυσε τις ασκήσεις και δημιούργησε τα εγχειρίδια λύσεων.

**Roger Lipsett**, *Brandeis University* — ο οποίος επιμελήθηκε το κείμενο και τις λύσεις των ασκήσεων όσον αφορά τη μαθηματική ακρίβεια.

**Daniel Solow**, *Case Western Reserve University* — συγγραφέας του "*How to Read and Do Proofs*", για την παροχή βίντεο σχετικά με τις τεχνικές απόδειξης και έναν κωδικό για τη χρήση αυτών των βίντεο σε συντονισμό με αυτό το κείμενο.

**Sky Pelletier Waterpeace** — ο οποίος είδε με κριτικό τρόπο τις ασκήσεις που απαιτούν χρήση υπολογιστή, πρότεινε βελτιώσεις και παρείχε τα σύνολα δεδομένων.

## Ειδικοί συνεργάτες

Θα ήθελα επίσης να εκφράσω [1] τη βαθιά μου εκτίμηση στα άτομα με τα οποία συνεργαζόμουν σε καθημερινή βάση:

**Anton Kaul** — ο οποίος συνεργάστηκε στενά μαζί μου σε κάθε στάδιο του έργου και με βοήθησε στη συγγραφή νέου υλικού τόσο για το κυρίως κείμενο όσο και για τις ασκήσεις. Στις πολλές περιπτώσεις που χρειαζόμουν μαθηματικές ή παιδαγωγικές συμβουλές, ήταν το άτομο στο οποίο απευθυνόμουν. Δεν μπορώ να τον ευχαριστήσω αρκετά για την καθοδήγηση και για τη συνεισφορά του σε αυτήν την έκδοση.

**David Dietz** — ο εκδότης μου, για την υπομονή, την ορθή κρίση και την αφοσίωσή του στην παραγωγή ενός ποιοτικού βιβλίου.

**Anne Scanlan-Rohrer** — από το *Two Ravens Editorial*, η οποία συγκέντρωσε όλο το υλικό και συντόνισε ολόκληρο το έργο.

**Jacqueline Sinacori** — η οποία επέβλεψε το περιεχόμενο και ήταν πάντα εκεί για να απαντήσει στις συχνά ασαφείς ερωτήσεις μου.

**Carol Sawyer** — από το *The Perfect Proof*, η οποία ασχολήθηκε με τις μυριάδες λεπτομέρειες κατά τη διαδικασία παραγωγής και βοήθησε στην επιμέλεια. **Maddy Lesure** — με την οποία έχω εργαστεί πολλά χρόνια και της οποίας η αισθητική άποψη στον σχεδιασμό είναι εμφανής στις σελίδες αυτού του βιβλίου.

**Mark Smith** — από το *Miami University of Ohio* που εντόπισε και επέλυσε διάφορα τεχνικά προβλήματα.

**Lilian Brady** — η επιμελήτριά μου για σχεδόν 25 χρόνια. Αισθάνομαι τυχερός που υπήρξα ο αποδέκτης των αξιοσημείωτων γνώσεών της στην τυπογραφία, στο ύφος, στη γραμματική και στα μαθηματικά.

**Pat Anton** — από το *Anton Textbooks, Inc.*, η οποία βοήθησε στη διεκπεραίωση σχετικά με την αντιγραφή, αποστολή, έλεγχο ακρίβειας και αναρίθμητα πολλές δουλειές για να τις αναφέρω.

**John Rogosich** — από το *Techsetters, Inc.*, που προγραμμάτισε τον σχεδιασμό, διαχειρίστηκε τη σύνθεση και επέλυσε πολλά δύσκολα τεχνικά ζητήματα.

**Brian Haughwout** — από το *Techsetters, Inc.*, για την προσεκτική και λεπτομερή εργασία του στα σχήματα και στις εικόνες.

**Josh Elkan** — για την παροχή πολύτιμης βοήθειας στον έλεγχο ακρίβειας.

*Howard Anton*
*Chris Rorres*

1. Στο τμήμα αυτό χρησιμοποιείται ο πρώτος ενικός και γράφεται μάλλον από τον κύριο συγγραφέα H. Anton.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και μήτρες

## Περιεχόμενα



## Εισαγωγή

Η πληροφορία στις επιστήμες, οικονομικές και μαθηματικά συχνά οργανώνεται σε γραμμές και στήλες ώστε να σχηματίζονται ορθογώνιες διατάξεις οι οποίες ονομάζονται «μήτρες» ή «πίνακες». Οι μήτρες πολύ συχνά εμφανίζονται ως πίνακες αριθμητικών δεδομένων, τα οποία προέρχονται από φυσικές παρατηρήσεις, αλλά εμφανίζονται και σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών. Για παράδειγμα, θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο ότι όλη η πληροφορία που απαιτείται για να επιλύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων, όπως το

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

περιέχεται στη μήτρα

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

και ότι η λύση του συστήματος μπορεί να βρεθεί εκτελώντας κατάλληλες πράξεις σε αυτή τη μήτρα. Αυτό είναι σημαντικό στην ανάπτυξη υπολογιστικών προγραμμάτων για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων, επειδή ο υπολογιστής είναι το κατάλληλο μέσο διαχείρισης διατάξεων με αριθμητική πληροφορία. Οι μήτρες ωστόσο δεν είναι απλά ένα συμβολικό εργαλείο για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων· μπορούν να ιδωθούν ως μαθηματικά αντικείμενα αυτά καθεαυτά και υπάρχει μια πλούσια και σημαντική θεωρία που συνδέεται με αυτές, η οποία έχει μια πληθώρα πρακτικών εφαρμογών. Η μελέτη των μητρών και των εννοιών που σχετίζονται με αυτές αποτελεί τον κλάδο των μαθηματικών που ονομάζουμε «Γραμμική Άλγεβρα». Σε αυτό το κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των μητρών.

## 1.1 Εισαγωγή στα συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων και οι λύσεις τους αποτελούν ένα από τα κύρια θέματα που θα μελετήσουμε σε αυτό το βιβλίο. Σε αυτή την πρώτη ενότητα θα εισαγάγουμε τη βασική ορολογία και θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο για την επίλυση τέτοιων συστημάτων.

## Γραμμικές εξισώσεις

Θυμηθείτε ότι στις δύο διαστάσεις μια ευθεία σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $xy$ μπορεί να παρασταθεί με μια εξίσωση της μορφής

$$ax + by = c \quad (a, b \text{ όχι και τα δύο } 0)$$

και ότι στις τρεις διαστάσεις ένα επίπεδο σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $xyz$ μπορεί να παρασταθεί με μια εξίσωση της μορφής

$$ax + by + cz = d \quad (a, b, c \text{ όχι όλα } 0)$$

Και οι δύο είναι παραδείγματα «γραμμικών εξισώσεων», με τη πρώτη να είναι μια γραμμική εξίσωση ως προς τις μεταβλητές $x$ και $y$ και τη δεύτερη να είναι μια γραμμική εξίσωση ως προς τις μεταβλητές $x$, $y$ και $z$. Πιο γενικά, ορίζουμε ως ***γραμμική εξίσωση*** ως προς τις $n$ μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ να είναι μια εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

όπου τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και το $b$ είναι σταθερές και τα $a$ δεν είναι όλα μηδέν. Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $n = 2$ ή $n = 3$, συχνά θα χρησιμοποιούμε μεταβλητές χωρίς δείκτες και θα γράφουμε τις γραμμικές εξισώσεις ως

$$a_1x + a_2y = b \quad (a_1, a_2 \text{ όχι και τα δύο } 0) \tag{2}$$

$$a_1x + a_2y + a_3z = b \quad (a_1, a_2, a_3 \text{ όχι όλα } 0) \tag{3}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $b = 0$, η Εξίσωση (1) έχει τη μορφή

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{4}$$

η οποία ονομάζεται ***ομογενής γραμμική εξίσωση*** ως προς τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Γραμμικές εξισώσεις**

Παρατηρήστε ότι μια γραμμική εξίσωση δεν περιλαμβάνει γινόμενα ή ρίζες των μεταβλητών. Όλες οι μεταβλητές εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και δεν εμφανίζονται, για παράδειγμα, ως ορίσματα τριγωνομετρικών, λογαριθμικών ή εκθετικών συναρτήσεων. Οι παρακάτω είναι γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} x + 3y = 7 & \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + 3z = -1 & \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \end{array}$$

Οι παρακάτω δεν είναι γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} x + 3y^2 = 4 & \qquad 3x + 2y - xy = 5 \\ \sin x + y = 0 & \qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1 \end{array}$$

---

Ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών εξισώσεων ονομάζεται ***σύστημα γραμμικών εξισώσεων*** ή, εν συντομία, ***γραμμικό σύστημα***. Οι μεταβλητές ονομάζονται ***άγνωστοι***. Για παράδειγμα, το σύστημα (5) που ακολουθεί έχει αγνώστους τα $x$ και $y$, ενώ το σύστημα (6) έχει αγνώστους τα $x_1$, $x_2$ και $x_3$.

$$\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned} \tag{5–6}$$

Ένα γενικό γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μπορεί να γραφτεί ως [1]

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \tag{7}$$

Μια ***λύση*** ενός γραμμικού συστήματος με $n$ αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι μια ακολουθία $n$ αριθμών $s_1, s_2, \ldots, s_n$ για την οποία η αντικατάσταση

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, \quad x_n = s_n$$

επαληθεύει την κάθε εξίσωση. Για παράδειγμα, το σύστημα στην (5) έχει τη λύση

$$x = 1, \quad y = -2$$

και το σύστημα στην (6) έχει τη λύση

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$$

Αυτές οι λύσεις μπορούν να γραφτούν πιο περιεκτικά ως

$$(1, -2) \quad \text{και} \quad (1, 2, -1)$$

στις οποίες παραλείπονται οι μεταβλητές. Αυτός ο συμβολισμός μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε αυτές τις λύσεις γεωμετρικά ως σημεία στον διδιάστατο και στον τριδιάστατο χώρο, αντίστοιχα. Πιο γενικά, μια λύση

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, \quad x_n = s_n$$

ενός γραμμικού συστήματος $n$ αγνώστων μπορεί να γραφτεί ως

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

η οποία ονομάζεται ***διατεταγμένη n-άδα***. Με αυτό τον συμβολισμό, υπονοείται ότι όλες οι μεταβλητές εμφανίζονται με την ίδια σειρά σε κάθε εξίσωση. Αν $n = 2$, τότε η $n$-άδα ονομάζεται ***διατεταγμένο ζεύγος***, ενώ αν $n = 3$, ονομάζεται ***διατεταγμένη τριάδα***.

## Γραμμικά συστήματα δύο και τριών αγνώστων

Γραμμικά συστήματα δύο αγνώστων προκύπτουν σε σχέση με την τομή ευθειών. Για παράδειγμα, θεωρήστε το γραμμικό σύστημα

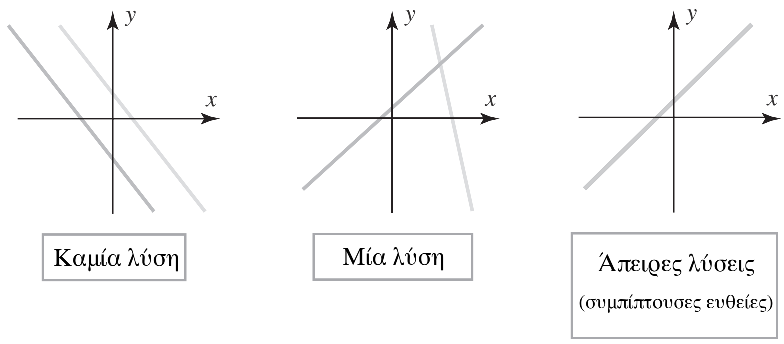
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

στο οποίο οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων είναι ευθείες γραμμές στο επίπεδο $xy$. Κάθε λύση $(x, y)$ αυτού του συστήματος αντιστοιχεί σε σημείο τομής των ευθειών, οπότε υπάρχουν τρία ενδεχόμενα (Σχήμα 1.1.1):

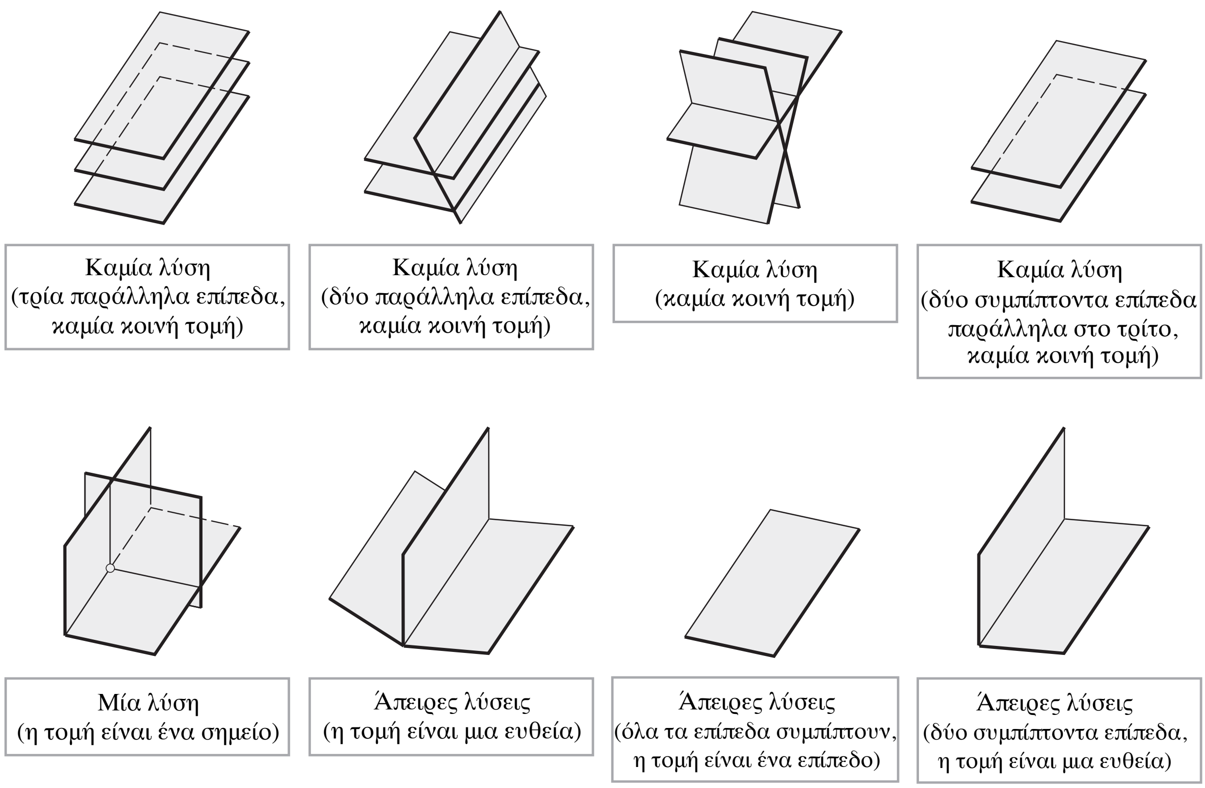
---

1. Οι διπλοί δείκτες στους συντελεστές $a_{ij}$ των αγνώστων δίνουν τη θέση τους στο σύστημα –ο πρώτος δείκτης δείχνει την εξίσωση στην οποία εμφανίζεται ο συντελεστής και ο δεύτερος δείχνει ποιον άγνωστο πολλαπλασιάζει. Επομένως ο $a_{12}$ βρίσκεται στην πρώτη εξίσωση και πολλαπλασιάζει τον $x_2$.

1. Οι ευθείες να είναι παράλληλες και διακριτές, στην οποία περίπτωση δεν υπάρχει τομή και κατά συνέπεια δεν υπάρχει λύση.
2. Οι ευθείες να τέμνονται σε ένα μόνο σημείο, στην οποία περίπτωση το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση.
3. Οι ευθείες να ταυτίζονται, στην οποία περίπτωση υπάρχουν άπειρα σημεία τομής (τα σημεία της κοινής ευθείας) και κατά συνέπεια υπάρχουν άπειρες λύσεις.




Σχήμα 1.1.1




Σχήμα 1.1.2

Γενικά, λέμε ότι ένα γραμμικό σύστημα είναι ***συμβιβαστό*** εάν έχει τουλάχιστον μία λύση και ***αδύνατο*** ή ***μη συμβιβαστό*** αν δεν έχει λύσεις. Επομένως, ένα συμβιβαστό γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είτε έχει μία λύση, είτε έχει άπειρες λύσεις –δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα. Το ίδιο ισχύει για ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

για το οποίο τα γραφήματα των εξισώσεων είναι επίπεδα. Οι λύσεις του συστήματος, αν υπάρχουν, αντιστοιχούν σε σημεία όπου τέμνονται και τα τρία επίπεδα, οπότε και πάλι βλέπουμε ότι υπάρχουν τρία μόνο ενδεχόμενα –καμία λύση, μία λύση, άπειρες λύσεις (Σχήμα 1.1.2).

Αργότερα θα αποδείξουμε ότι οι παρατηρήσεις μας σχετικά με το πλήθος των λύσεων των γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους στην πραγματικότητα ισχύουν για *όλα* τα γραμμικά συστήματα. Δηλαδή

*Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει μηδέν, μία ή άπειρες λύσεις. Δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα.*

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ένα γραμμικό σύστημα με μία λύση**

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

***Λύση*** Μπορούμε να απαλείψουμε το $x$ από τη δεύτερη εξίσωση προσθέτοντας $-2$ φορές την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη. Αυτό δίνει το απλούστερο σύστημα

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3y &= 4 \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $y = \frac{4}{3}$ και αντικαθιστώντας αυτή την τιμή στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = 1 + y = \frac{7}{3}$. Επομένως το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x = \tfrac{7}{3}, \quad y = \tfrac{4}{3}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες που παρίστανται από τις εξισώσεις του συστήματος τέμνονται στο μοναδικό σημείο $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Σας αφήνουμε να το ελέγξετε σχεδιάζοντας τις ευθείες.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ένα γραμμικό σύστημα δίχως λύση**

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + \phantom{3}y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

***Λύση*** Μπορούμε να απαλείψουμε το $x$ από τη δεύτερη εξίσωση προσθέτοντας $-3$ φορές την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη. Αυτό δίνει το απλούστερο σύστημα

$$\begin{aligned} x + y &= \phantom{-}4 \\ 0 &= -6 \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση είναι αντιφατική, οπότε το δοσμένο σύστημα δεν έχει λύση. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι οι δύο ευθείες που αντιστοιχούν στις εξισώσεις του αρχικού συστήματος είναι παράλληλες και διακριτές. Σας αφήνουμε να το ελέγξετε, είτε σχεδιάζοντας τις ευθείες, είτε δείχνοντας ότι έχουν την ίδια κλίση αλλά διαφορετικά σημεία τομής με τον άξονα $y$.

---

---

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ένα γραμμικό σύστημα με άπειρες λύσεις**

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

***Λύση*** Μπορούμε να απαλείψουμε το $x$ από τη δεύτερη εξίσωση προσθέτοντας $-4$ φορές την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη. Αυτό δίνει το απλούστερο σύστημα

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση δεν θέτει κάποιον περιορισμό στα $x$ και $y$ και άρα μπορεί να παραληφθεί. Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι εκείνες οι τιμές των $x$ και $y$ που ικανοποιούν τη μία εξίσωση

$$4x - 2y = 1 \tag{8}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες που αντιστοιχούν στις δύο εξισώσεις του αρχικού συστήματος συμπίπτουν. Ένας τρόπος να περιγράψουμε το σύνολο των λύσεων είναι να επιλύσουμε την εξίσωση εκφράζοντας το $x$ ως προς το $y$, ως $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y$ και κατόπιν να θέσουμε μια αυθαίρετη τιμή $t$ (η οποία ονομάζεται ***παράμετρος***) στο $y$.[2] Αυτό μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη λύση με το ζεύγος των εξισώσεων (οι οποίες ονομάζονται ***παραμετρικές εξισώσεις***)

$$x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}t, \quad y = t$$

Μπορούμε να πάρουμε συγκεκριμένες αριθμητικές λύσεις από αυτές τις δύο εξισώσεις δίνοντας αριθμητικές τιμές στην παράμετρο. Για παράδειγμα, η $t = 0$ δίνει τη λύση , η δίνει τη λύση $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και η $t = 1$ δίνει τη λύση $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$. Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι αυτά τα ζεύγη είναι λύσεις αντικαθιστώντας αυτές τις συντεταγμένες στις δοσμένες εξισώσεις.

---

2. Στο Παράδειγμα 4 θα μπορούσαμε επίσης να πάρουμε παραμετρικές εξισώσεις για τις λύσεις επιλύοντας στην (8) το $y$ ως προς το $x$ και θέτοντας $x = t$ να είναι πλέον η παράμετρος. Οι παραμετρικές εξισώσεις που θα προέκυπταν θα φαίνονταν διαφορετικές, όμως θα όριζαν το ίδιο σύνολο λύσεων.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ένα γραμμικό σύστημα με άπειρες λύσεις**

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x - \ \ y + 2z &= \ \ 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

***Λύση*** Αυτό το σύστημα μπορεί να επιλυθεί εποπτικά, αφού η δεύτερη και η τρίτη εξίσωση είναι πολλαπλάσια της πρώτης. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι τα τρία επίπεδα συμπίπτουν και ότι εκείνες οι τιμές των $x$, $y$ και $z$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x - y + 2z = 5 \tag{9}$$

ικανοποιούν αυτόματα και τις τρεις εξισώσεις. Επομένως, αρκεί να βρούμε τις λύσεις της (9). Αυτό γίνεται, επιλύοντας πρώτα το $x$ ως προς $y$ και $z$, θέτοντας κατόπιν αυθαίρετες τιμές $r$ και $s$ (παράμετροι) σε αυτές τις δύο μεταβλητές και στη συνέχεια εκφράζοντας τη λύση με τις τρεις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = 5 + r - 2s, \quad y = r, \quad z = s$$

Μπορούμε να πάρουμε συγκεκριμένες λύσεις επιλέγοντας αριθμητικές τιμές για τις παραμέτρους $r$ και $s$. Για παράδειγμα, θέτοντας $r = 1$ και $s = 0$ παίρνουμε τη λύση $(6, 1, 0)$.

## Επαυξημένες μήτρες και στοιχειώδεις πράξεις γραμμών

Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των εξισώσεων και των αγνώστων ενός γραμμικού συστήματος, το ίδιο συμβαίνει και με την πολυπλοκότητα της εμπλεκόμενης άλγεβρας για την εύρεση των λύσεων. Οι απαιτούμενοι υπολογισμοί μπορούν να καταστούν περισσότερο διαχειρίσιμοι απλοποιώντας τον συμβολισμό και τυποποιώντας τις διαδικασίες. Για παράδειγμα, διατηρώντας νοερά τη θέση των συμβόλων $+$, $x$ και $=$ στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 \ + \cdots + a_{1n}x_n \ &= b_1 \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 \ + \cdots + a_{2n}x_n \ &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

μπορούμε να συμπτύξουμε το σύστημα γράφοντας μόνο την ορθογώνια διάταξη αριθμών

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Αυτή ονομάζεται ***επαυξημένη μήτρα*** του συστήματος[3]. Για παράδειγμα, η επαυξημένη μήτρα του συστήματος των εξισώσεων

3. Όπως σημειώσαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, ο όρος «μήτρα» στα μαθηματικά χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια ορθογώνια διάταξη αριθμών. Σε επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε τις μήτρες λεπτομερώς, για την ώρα όμως θα μας απασχολήσουν μόνο οι επαυξημένες μήτρες για γραμμικά συστήματα.

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{4}x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{είναι η} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Η βασική μέθοδος επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος είναι να εκτελέσουμε αλγεβρικές πράξεις στο σύστημα οι οποίες να μην αλλοιώνουν το σύνολο λύσεων και οι οποίες δίνουν μια αλληλουχία ολοένα και απλούστερων συστημάτων, μέχρι να φτάσουμε στο σημείο όπου μπορούμε να αποφανθούμε αν το σύστημα είναι συμβιβαστό και αν ναι, ποια είναι η λύση του. Τυπικά, αυτές οι αλγεβρικές πράξεις είναι

1. Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με σταθερό αριθμό, διάφορο του μηδενός.
2. Εναλλαγή δύο εξισώσεων.
3. Πρόσθεση μιας εξίσωσης πολλαπλασιασμένης με σταθερό αριθμό σε άλλη εξίσωση.

Εφόσον οι γραμμές μιας επαυξημένης μήτρας αντιστοιχούν στις εξισώσεις του αντίστοιχου συστήματος, αυτές οι τρεις πράξεις αντιστοιχούν στις παρακάτω πράξεις στις γραμμές της επαυξημένης μήτρας:

1. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με σταθερό αριθμό, διάφορο του μηδενός.
2. Εναλλαγή δύο γραμμών.
3. Πρόσθεση μιας γραμμής πολλαπλασιασμένης με σταθερό αριθμό σε άλλη γραμμή.

Αυτές ονομάζονται ***στοιχειώδεις πράξεις*** γραμμών στη μήτρα.

Στο παρακάτω παράδειγμα θα δείξουμε πώς να χρησιμοποιούμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και την επαυξημένη μήτρα για να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τρεις αγνώστους. Στην επόμενη ενότητα θα αναπτύξουμε μια συστηματική διαδικασία για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, οπότε μη σας απασχολεί το πώς επιλέχτηκαν τα συγκεκριμένα βήματα στο παράδειγμα. Εδώ ο στόχος είναι απλά να κατανοήσετε τους υπολογισμούς.

---

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών**

Στην αριστερή στήλη επιλύουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων χειριζόμενοι τις εξισώσεις του συστήματος, ενώ στη δεξιά στήλη επιλύουμε το ίδιο σύστημα εκτελώντας πράξεις στις γραμμές της επαυξημένης μήτρας.

$$\begin{aligned} x + \phantom{4}y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέστε $-2$ φορές την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη για να πάρετε

Προσθέστε $-2$ φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη για να πάρετε

$$\begin{aligned} x + \phantom{4}y + 2z &= \phantom{-1}9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= \phantom{-1}0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέστε $-3$ φορές την πρώτη εξίσωση στην τρίτη για να πάρετε

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Προσθέστε $-3$ φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη για να πάρετε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάστε τη δεύτερη εξίσωση με $\frac{1}{2}$ για να πάρετε

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάστε τη δεύτερη γραμμή με $\frac{1}{2}$ για να πάρετε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Προσθέστε $-3$ φορές τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη για να πάρετε

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Προσθέστε $-3$ φορές τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη για να πάρετε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάστε την τρίτη εξίσωση με $-2$ για να πάρετε

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάστε την τρίτη γραμμή με $-2$ για να πάρετε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέστε $-1$ φορά τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη για να πάρετε

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Προσθέστε $-1$ φορά τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη για να πάρετε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέστε $-\frac{11}{2}$ φορές την τρίτη εξίσωση στην πρώτη και $\frac{7}{2}$ φορές την τρίτη εξίσωση στη δεύτερη για να πάρετε

$$\begin{aligned} x \qquad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Προσθέστε $-\frac{11}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην πρώτη και $\frac{7}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στη δεύτερη για να πάρετε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Η λύση $x = 1, y = 2, z = 3$ είναι πλέον προφανής.

**Ανασκόπηση εννοιών**

- Γραμμική εξίσωση
- Ομογενής γραμμική εξίσωση
- Σύστημα γραμμικών εξισώσεων
- Λύση γραμμικού συστήματος
- Διατεταγμένη $n$-άδα
- Συμβιβαστό γραμμικό σύστημα
- Αδύνατο ή μη συμβιβαστό γραμμικό σύστημα
- Παράμετρος
- Παραμετρικές εξισώσεις
- Επαυξημένη μήτρα
- Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών

**Δεξιότητες**

- Να προσδιορίζετε αν μια εξίσωση είναι γραμμική.
- Να προσδιορίζετε αν μια δοσμένη $n$-άδα είναι λύση ενός γραμμικού συστήματος.
- Να βρίσκετε την επαυξημένη μήτρα ενός γραμμικού συστήματος.
- Να βρίσκετε το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί σε δεδομένη επαυξημένη μήτρα.
- Να εκτελείτε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών σε γραμμικό σύστημα και στην επαυξημένη του μήτρα.
- Να προσδιορίζετε αν ένα γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό ή αδύνατο.
- Να βρίσκετε το σύνολο των λύσεων ενός συμβιβαστού γραμμικού συστήματος.

**Ασκήσεις τύπου σωστό-λάθος**

Στα ερωτήματα (α)–(θ) να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή λανθασμένος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Ένα γραμμικό σύστημα του οποίου όλες οι εξισώσεις είναι ομογενείς θα πρέπει να έχει μοναδική λύση.

(β) Ο πολλαπλασιασμός μιας γραμμικής εξίσωσης με μηδέν είναι επιτρεπτή στοιχειώδης πράξη γραμμών.

(γ) Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x - \phantom{2}y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση, ανεξαρτήτως της τιμής του $k$.

(δ) Μία μόνη γραμμική εξίσωση με δύο ή περισσότερους αγνώστους θα πρέπει πάντοτε να έχει άπειρες λύσεις.

(ε) Αν ο αριθμός των αγνώστων σε ένα γραμμικό σύστημα υπερβαίνει τον αριθμό των εξισώσεων, τότε το σύστημα θα πρέπει να είναι συμβιβαστό.

(στ) Αν κάθε εξίσωση σε ένα συμβιβαστό γραμμικό σύστημα πολλαπλασιαστεί με μια σταθερά $c$, τότε όλες οι λύσεις του νέου συστήματος μπορούν να ληφθούν πολλαπλασιάζοντας τις λύσεις του αρχικού με $c$.

(ζ) Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών επιτρέπουν την αφαίρεση κατά μέλη μιας εξίσωσης από μια άλλη.

(η) Το γραμμικό σύστημα με με την παρακάτω επαυξημένη μήτρα είναι συμβιβαστό.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## 1.2 Απαλοιφή Gauss

Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε μια συστηματική διαδικασία για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Η διαδικασία βασίζεται στην ιδέα εκτέλεσης συγκεκριμένων πράξεων στις γραμμές της επαυξημένης μήτρας, οι οποίες την απλοποιούν σε μορφή στην οποία η λύση του συστήματος να μπορεί να βρεθεί εποπτικά.

### Παρατηρήσεις για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

Όταν θεωρούμε μεθόδους επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, είναι σημαντικό να διακρίνουμε μεταξύ μεγάλων συστημάτων που θα πρέπει να επιλυθούν από υπολογιστή και μικρών συστημάτων τα οποία μπορούν να επιλυθούν με χαρτί και μολύβι. Για παράδειγμα, υπάρχουν πολλές εφαρμογές που οδηγούν σε γραμμικά συστήματα χιλιάδων ή ακόμα και εκατομμυρίων αγνώστων. Τα μεγάλα συστήματα απαιτούν ειδικές τεχνικές ώστε ν' αντιμετωπισθούν διάφορα τεχνικά ζητήματα, όπως μέγεθος μνήμης, σφάλματα στρογγυλοποίησης, χρόνος επίλυσης και ούτω καθεξής. Τέτοιες τεχνικές μελετώνται στον κλάδο της ***Αριθμητικής Ανάλυσης*** και σε αυτό το βιβλίο δεν θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα. Ωστόσο, σχεδόν όλες οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για μεγάλα συστήματα βασίζονται στις ιδέες που θ' αναπτύξουμε σε αυτή την ενότητα.

### Κλιμακωτές μορφές

Στο Παράδειγμα 6 της προηγούμενης ενότητας επιλύσαμε ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους $x$, $y$ και $z$ ανάγοντας την επαυξημένη μήτρα στη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

από την οποία η λύση $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ ήταν εμφανής. Αυτό είναι ένα παράδειγμα μιας μήτρας που βρίσκεται σε ***ανηγμένη κλιμακωτή μορφή κατά γραμμές*** (ή απλά ***ανηγμένη κλιμακωτή μορφή***). Για να βρίσκεται σε αυτή τη μορφή, η μήτρα θα πρέπει να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν μια γραμμή δεν αποτελείται εξολοκλήρου από μηδενικά, τότε ο πρώτος μη μηδενικός αριθμός στη γραμμή είναι 1. Αυτός ονομάζεται ***αρχικό 1***.
2. Αν υπάρχουν γραμμές που αποτελούνται εξολοκλήρου από μηδενικά, τότε είναι συγκεντρωμένες μαζί στο κάτω μέρος της μήτρας.
3. Σε οποιεσδήποτε δύο διαδοχικές γραμμές, οι οποίες δεν αποτελούνται εξολοκλήρου από μηδενικά, το αρχικό 1 στην κατώτερη γραμμή εμφανίζεται δεξιότερα του αρχικού 1 στην ανώτερη γραμμή.
4. Κάθε στήλη που περιέχει αρχικό 1 έχει μηδενικά οπουδήποτε αλλού σε αυτή τη στήλη.

Μια μήτρα που έχει τις τρεις πρώτες ιδιότητες λέμε ότι βρίσκεται σε ***κλιμακωτή μορφή κατά γραμμές*** ή απλά σε ***κλιμακωτή μορφή***. (Επομένως, μια μήτρα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή βρίσκεται απαραίτητα σε κλιμακωτή μορφή, όχι όμως και το αντίστροφο.)

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Κλιμακωτή μορφή και ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**

Οι παρακάτω μήτρες βρίσκονται σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι παρακάτω μήτρες βρίσκονται σε κλιμακωτή μορφή, αλλά όχι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Περισσότερα περί κλιμακωτής μορφής και ανηγμένης κλιμακωτής μορφής**

Όπως φάνηκε στο Παράδειγμα 1, μια μήτρα σε κλιμακωτή μορφή έχει μηδενικά κάτω από το αρχικό 1, ενώ μια μήτρα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχει μηδέν και κάτω *και πάνω* από κάθε αρχικό 1. Επομένως, με οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό στη θέση του $*$, όλες οι μήτρες των παρακάτω τύπων είναι σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Όλες οι μήτρες των παρακάτω τύπων βρίσκονται σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Αν, με μια ακολουθία στοιχειωδών πράξεων γραμμών, η επαυξημένη μήτρα ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων έρθει σε *ανηγμένη* κλιμακωτή μορφή, τότε το σύνολο λύσεων μπορεί να βρεθεί είτε εποπτικά, είτε μετατρέποντας συγκεκριμένες γραμμικές εξισώσεις σε παραμετρική μορφή. Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Μοναδική λύση**

Υποθέστε ότι η επαυξημένη μήτρα ενός γραμμικού συστήματος με αγνώστους $x_1$, $x_2$, $x_3$ και $x_4$ έχει αναχθεί με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στην

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Αυτή η μήτρα είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και αντιστοιχεί στις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad\qquad &= -1 \\ x_3 \qquad &= 0 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση, συγκεκριμένα την $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 5.$ [4]

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Γραμμικό σύστημα με τρεις αγνώστους**

Σε κάθε ερώτημα, υποθέστε ότι η επαυξημένη μήτρα για ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους $x$, $y$ και $z$ έχει αναχθεί με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στη δοσμένη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Να επιλύσετε το σύστημα.

$$\text{(α)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(β)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(γ)} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

***Λύση*** (α) Η εξίσωση που αντιστοιχεί στην τελευταία γραμμή της επαυξημένης μήτρας είναι η

$$0x + 0y + 0z = 1$$

Αφού για οποιεσδήποτε τιμές των $x$, $y$ και $z$, η εξίσωση δεν ικανοποιείται, το σύστημα είναι αδύνατο.

***Λύση*** (β) Η εξίσωση που αντιστοιχεί στην τελευταία γραμμή της επαυξημένης μήτρας είναι η

$$0x + 0y + 0z = 0$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να παραληφθεί αφού δεν επιβάλει κάποιον περιορισμό στα $x$, $y$ και $z$, άρα το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στην επαυξημένη μήτρα είναι το

$$\begin{aligned} x \qquad + 3z &= -1 \\ y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

Τα $x$ και $y$ που αντιστοιχούν στα αρχικά 1 στην επαυξημένη μήτρα, ονομάζονται ***βασικές μεταβλητές***. Οι εναπομένουσες μεταβλητές (εδώ το $z$) ονομάζονται ***ελεύθερες μεταβλητές***. Επιλύοντας τις βασικές μεταβλητές ως προς τις ελεύθερες μεταβλητές βρίσκουμε ότι

4. Θα μπορούσαμε, αν το επιθυμούσαμε, να εκφράσουμε τη λύση πιο περιεκτικά ως την 4-άδα $(3, -1, 0, 5)$.

$$
\begin{aligned}
x &= -1 - 3z \\
y &= 2 + 4z
\end{aligned}
$$

Από αυτές τις εξισώσεις βλέπουμε ότι η ελεύθερη μεταβλητή $z$ μπορεί να θεωρηθεί ως παράμετρος και να της δοθεί η τυχαία τιμή $t$, η οποία κατόπιν καθορίζει τις τιμές των $x$ και $y$. Επομένως, το σύνολο των λύσεων μπορεί να αναπαρασταθεί με τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = -1 - 3t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = t$$

Αντικαθιστώντας διάφορες τιμές στο $t$ σε αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να πάρουμε διάφορες λύσεις του συστήματος. Για παράδειγμα, θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε τη λύση

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = 0$$

νώ για $t = 1$ παίρνουμε τη λύση

$$x = -4, \quad y = 6, \quad z = 1$$

***Λύση*** (γ) Όπως εξηγήσαμε στο ερώτημα (β), μπορούμε να παραλείψουμε τις εξισώσεις που αντιστοιχούν σε μηδενικές γραμμές, στην οποία περίπτωση το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στην επαυξημένη μήτρα αποτελείται από τη μία εξίσωση

$$x - 5y + z = 4 \tag{1}$$

από την οποία βλέπουμε ότι το σύνολο των λύσεων είναι ένα επίπεδο στον τριδιάστατο χώρο. Παρόλο που η (1) εκφράζει το σύνολο των λύσεων, υπάρχουν πολλές εφαρμογές στις οποίες προτιμάμε να εκφράσουμε αυτό το σύνολο των λύσεων σε παραμετρική μορφή. Μπορούμε να μετατρέψουμε την (1) σε παραμετρική μορφή επιλύοντας τη βασική μεταβλητή $x$ ως προς τις ελεύθερες μεταβλητές $y$ και $z$ και να πάρουμε

$$x = 4 + 5y - z$$

Από αυτή την εξίσωση βλέπουμε ότι στις ελεύθερες μεταβλητές μπορούν να δοθούν τυχαίες τιμές, ας πούμε $y = s$ και $z = t$, οι οποίες στη συνέχεια προσδιορίζουν την τιμή του $x$. Επομένως, το σύνολο των λύσεων μπορεί να εκφραστεί παραμετρικά ως [5]

$$x = 4 + 5s - t, \quad y = s, \quad z = t \tag{2}$$

---

Τύποι όπως ο (2), οι οποίοι εκφράζουν το σύνολο λύσεων ενός γραμμικού συστήματος παραμετρικά, έχουν την αντίστοιχη ορολογία.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.** Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τότε ένα σύνολο παραμετρικών εξισώσεων, από τις οποίες προέρχονται όλες οι λύσεις θέτοντας αριθμητικές τιμές στις παραμέτρους, ονομάζεται ***γενική λύση*** του συστήματος.

5. Συνήθως θα παριστάνουμε τις παραμέτρους σε μια γενική λύση με τα γράμματα $r, s, t, \ldots$, ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν οποιαδήποτε γράμματα που δεν χρησιμοποιούνται για την ονομασία των αγνώστων. Για συστήματα με περισσότερους από τρεις αγνώστους, διευκολύνει η χρήση γραμμάτων με δείκτες, όπως τα $t_1, t_2, t_3, \ldots$.