

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Το βιβλίο αυτό προσφέρει μια ιδανική ισορροπία μεταξύ της τυπικής ακρίβειας και εννοιολογικής εστίασης βοηθώντας τους φοιτητές να δημιουργήσουν ισχυρές υπολογιστικές δεξιότητες ενώ συνεχώς ενισχύει τη σχέση του Λογισμού με τις μελλοντικές σπουδές τους και τη ζωή τους.

ΕΣΤΙΑΣΗ ΣΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Εμβάθυνση στα σχήματα Το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7 έχει μια γεωμετρική εξήγηση. Μια διανυσματική παραμέτρηση $\mathbf{r}(t)$ αποτελούμενη από διανύσματα σταθερού μέτρου R ιχνηλατεί μια καμπύλη στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας R με κέντρο στην αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 6). Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}'(t)$ είναι εφαπτόμενο στη σφαίρα. Αλλά οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη σε μια σφαίρα σε ένα σημείο της P είναι κάθετη προς το ακτινικό διάνυσμα που καταλήγει στο P . Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{r}'(t)$ πρέπει να είναι ορθογώνια.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ Είναι σύντομες χρονογραφίες οι οποίες τοποθετούν ρηξικέλευθες ανακαλύψεις και σημαντικές προόδους στο ιστορικό τους πλαίσιο. Δίνουν στους φοιτητές μια θεώρηση πάνω σε ορισμένα επιτεύγματα μεγάλων μαθηματικών καθώς και εκτίμηση για τη σημασία τους.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ Ενθαρρύνει τους φοιτητές προκειμένου να αναπτύξουν μια εννοιολογική κατανόηση του Λογισμού εξηγώντας σημαντικές ιδέες καθαρά αλλά μη τυπικά.

ΕΜΒΑΘΥΝΣΗ ΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Ενισχύουν την οπτική κατανόηση των φοιτητών δημιουργώντας κρίσιμες συνδέσεις μεταξύ γραφικών ιδιοτήτων και των εννοιών που επισημαίνονται.

Ιστορικό σημείωμα Οι αστρονόμοι της αρχαιότητας (στη Βαβυλώνα, την Αίγυπτο και την Ελλάδα) απεικόνισαν τον νυχτερινό ουρανό με αξιοθαύμαστη ακρίβεια, αλλά τα μοντέλα που χρησιμοποιούσαν για να περιγράψουν τις κινήσεις των πλανητών βασίζονταν στη λανθασμένη υπόθεση της περιφοράς των πλανητών γύρω από τη Γη. Αν και ο Αρίσταρχος (310-230 π.Χ.) είχε προτείνει την ιδέα ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο, η συγκεκριμένη πρόταση απορρίφθηκε και στη συνέχεια ξεχάστηκε για σχεδόν 18 αιώνες, μέχρι την εποχή που ο Πολωνός αστρονόμος Nicolaus Copernicus (1473-1543) εισήγαγε μια σειρά από επαναστατικές ιδέες σχετικά με το Ηλιακό μας σύστημα, συμπεριλαμβανομένης και της υπόθεσης ότι οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο. Ο Copernicus άνοιξε τον δρόμο για την επόμενη γενιά αστρονόμων, μεταξύ των οποίων οι πιο γνωστοί ήταν ο Tycho

Εναλλακτική Οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης του Παραδείγματος 5 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξηγηθεί μια βασική διαφορά μεταξύ της διαδρομής (τροχιάς) $c(t)$ και της υποκειμένης καμπύλης C . Η καμπύλη C είναι μια έλλειψη στο επίπεδο ενώ η $c(t)$ περιγράφει μια συγκεκριμένη κίνηση, που γίνεται αντι-ωρολογιακά, ενός σωματιδίου πάνω σε αυτή την έλλειψη. Αν επιτρέψουμε στο t να πάρει τις τιμές μεταξύ 0 και 4π , τότε το σωματίδιο θα διαγράψει την έλλειψη δύο φορές.

Ένα σημείο κλειδί της παραμέτρησης των καμπυλών είναι το γεγονός ότι αυτές δεν είναι μοναδικές. Στην πραγματικότητα, κάθε καμπύλη μπορεί να παραμετρηθεί με μια απειρία από διαφορετικούς τρόπους. Έτσι, για παράδειγμα, η παραβολή $y = x^2$ δεν παραμετράζεται μόνο από την (t, t^2) αλλά επίσης από την (t^3, t^6) ή την (t^5, t^{10}) κ.ο.κ.

ΕΣΤΙΑΣΗ ΣΕ ΣΑΦΗ, ΠΡΟΣΒΑΣΙΜΗ ΠΑΡΑΘΕΣΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ

που προβλέπει και αντιμετωπίζει τις δυσκολίες των φοιτητών

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ Είναι σημειώσεις περιθωρίου που συνδέουν την τρέχουσα θεώρηση με σημαντικές έννοιες που εισήχθησαν νωρίτερα στο κείμενο για να δώσουν στους φοιτητές μια σύντομη ανασκόπηση και να κάνουν συνδέσεις με σχετικές ιδέες.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Όπως επισημάνθηκε προηγουμένως, με τις παραμετρήσεις ουσιαστικά αντιμετωπίζουμε την καμπύλη ως έναν δρόμο πάνω στον οποίο «ταξιδεύει» η παραμέτρηση και την τροχιά ως ένα συγκεκριμένο ταξίδι πάνω σε αυτόν τον δρόμο.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΧΗΣ

Προειδοποιούν τους φοιτητές για συχνές παγίδες που ενδέχεται να αντιμετωπίσουν στην κατανόηση του υλικού.

ΠΡΟΣΟΧΗ Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσει κανείς τον κανόνα παραγωγής πηλίκου για να υπολογίσει τη μερική παράγωγο της Εξίσωσης (1). Καθώς ο παρονομαστής δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή y , μπορούμε να τον αντιμετωπίσουμε ως μια σταθερά όταν παραγωγίζουμε ως προς την y .

ΠΕΡΙΛΗΨΕΙΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

Συνοψίζουν τα σημαντικά σημεία μιας ενότητας με συνοπτικό και περιεκτικό τρόπο και δίνουν έμφαση στο τι είναι σημαντικό σε κάθε ενότητα.

ΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΣΗΜΑΣΙΑ

Χρησιμοποιούν σύντομες εξηγήσεις και καλά επιλεγμένα παραδείγματα για να βοηθήσουν τους φοιτητές προκειμένου να εκτιμήσουν την αξία των υποθέσεων στα θεωρήματα.

47. Η σημασία των υποθέσεων Έστω η συνάρτηση

$$g(x, y) = 2xy(x + y)x^2 + y^2$$

η οποία ορίζεται για $(x, y) \neq 0$, ενώ $g(0, 0) = 0$. Στην άσκηση αυτή μπορείτε να αποδείξετε ότι αν και η $g(x, y)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$ και οι μερικές παράγωγοι $g_x(0, 0)$ και $g_y(0, 0)$ υπάρχουν, η $g(x, y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

- Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, ότι η $g(x, y)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- Να χρησιμοποιήσετε τους ορισμούς με βάση το όριο για να δείξετε ότι οι $g_x(0, 0)$ και $g_y(0, 0)$ υπάρχουν και είναι ίσες με το μηδέν.
- Δείξτε ότι η γραμμικοποίηση της $g(x, y)$ στο $(0, 0)$ είναι η $L(x, y) = 0$.
- Δείξτε ότι αν η $g(x, y)$ ήταν διαφορίσιμη στο $(0, 0)$, τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, h)}{h} = 0$$

Στη συνέχεια, παρατηρήστε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει καθώς $g(h, h) = 2h$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $g(x, y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

11.5 Περίληψη

- Μια έλλειψη, με εστίες τα σημεία F_1 και F_2 , απαρτίζεται από το σύνολο των σημείων P για τα οποία ισχύει $PF_1 + PF_2 = K$, όπου K μια σταθερά τέτοια ώστε να ισχύει $K > F_1F_2$. Η εξίσωση μιας έλλειψης στην κανονική της θέση είναι η

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Οι κορυφές της έλλειψης είναι τα σημεία $(\pm a, 0)$ και $(0, \pm b)$. Εκκεντρότητα: $e = \frac{c}{a}$, με $(0 \leq e < 1)$. Διευθετούσα: $x = \frac{a}{e}$ (αν $a > b$).

ΕΣΤΙΑΣΗ ΣΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Τα ΣΥΝΟΛΑ ΜΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ προσφέρουν ένα περιεκτικό σύνολο ασκήσεων στενά συνδεδεμένων με τη θεωρία. Αυτές οι ασκήσεις ποικίλλουν σε δυσκολία από ασκήσεις ρουτίνας, σε μέτριες και σε πιο δύσκολες. Επίσης, περιλαμβάνονται εικόνες οι οποίες δείχνουν προβλήματα τα οποία απαιτούν από τον φοιτητή να δώσει μία γραπτή απάντηση ή απαιτούν τη χρήση τεχνολογίας.

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις

1. Ποια από τις ακόλουθες μπορεί να αποτελεί πιθανή τιμή για την κλίση f μιας συνάρτησης $f(x, y)$ δύο μεταβλητών;
α) 5 β) $\langle 3, 4 \rangle$ γ) $\langle 3, 4, 5 \rangle$.
2. Η ακόλουθη πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Μια διαφορίσιμη συνάρτηση αυξάνεται με ρυθμό $\|\nabla f_P\|$ στην κατεύθυνση του ∇f_P .
3. Να περιγράψετε τις δύο βασικές γεωμετρικές ιδιότητες του διανύσματος της κλίσης ∇f .

γ) Αφού γράψετε τον τύπο της σύνθεσης $f(\mathbf{r}(t))$ ως συνάρτηση του t , να προχωρήσετε στην παραγωγή του, να ελέγξετε αν το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξατε συμφωνεί με το αποτέλεσμα του ερωτήματος β).

3. Στο Σχήμα 14 απεικονίζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες μιας συνάρτησης $f(x, y)$ καθώς και μια τροχιά $\mathbf{r}(t)$ η οποία διανύεται στην κατεύθυνση που υποδεικνύεται. Να ελέγξετε αν η παράγωγος $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))$ είναι θετική, αρνητική ή ίση με το μηδέν στα σημεία $A-D$.

Κάθε ενότητα προσφέρει

ΠΡΟΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

οι οποίες ελέγχουν την κατανόηση του φοιτητή.

Ένα κεντρικό σύνολο **ΑΣΚΗΣΕΩΝ** διδάσκει βασικές δεξιότητες καθώς και τεχνικές επίλυσης προβλημάτων, ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση και παρακινεί κάποιον να μάθει Λογισμό μέσω ενδιαφέρουσων εφαρμογών.

Ασκήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 y^3 + z^4$ και $x = s^2$, $y = st^2$ και $z = s^2 t$.
α) Υπολογίστε τις πρωτεύουσες παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.
β) Υπολογίστε τις παραγώγους $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$.

ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΜΒΑΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ αναπτύσσουν επιπλέον τις γνώσεις και προκαλούν τους φοιτητές να αναπτύξουν ακόμα περισσότερες δεξιότητές τους.

Ασκήσεις πρόκλησης

58. Ένα γενικευμένο πολλαπλό ολοκλήρωμα
Να αποδείξετε ότι το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-2}$ σε όλο τον χώρο $\mathbf{R}^3$ είναι ίσο με π^2 . Το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο, επομένως ολοκληρώστε πρώτα για $\rho \leq R$ και στη συνέχεια θεωρήστε ότι $R \rightarrow \infty$.

59. Αποδείξτε τη σχέση

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln r \, dA = -\frac{\pi}{2}$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\mathcal{D}$ ο μοναδιαίος δίσκος $x^2 + y^2 \leq 1$. Πρόκειται για ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα, αφού η συνάρτηση $\ln r$ δεν ορίζεται στο $(0, 0)$, επομένως θα πρέπει να ολοκληρώσετε πρώτα στον δακτύλιο $a \leq r \leq 1$, όπου $0 < a < 1$ και στη συνέχεια να υποθέσετε ότι $a \rightarrow 0$.

60. Θυμηθείτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^{-a} dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a < 1$. Για ποιες τιμές του a συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathcal{D}} r^{-a} dA$, αν $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\mathcal{D}$ είναι ο μοναδιαίος δίσκος $x^2 + y^2 \leq 1$;

ΠΛΟΥΣΙΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ όπως αυτό το μοντέλο για τη μεταβολή των πληθυσμών θηρευτή-θηράματος (παρακάτω) και αυτό το παράδειγμα που περιγράφει την θερμοκρασία του Ρεύματος του Κόλπου (αριστερά) ενισχύουν τη συνάφεια του Λογισμού με τις ζωές των φοιτητών και αποδεικνύουν τη σημασία του λογισμού στην επιστημονική έρευνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Υποθέστε ότι το Ρεύμα του Κόλπου έχει πλάτος 100 km και η θερμοκρασία του μεταβάλλεται ξεκινώντας από 15°C στα εξωτερικά του όρια μέχρι 20°C στο κέντρο του. Θα περιγράψουμε τη θερμοκρασία σε σχέση με το πλάτος του ρεύματος με τη συνάρτηση $T(x, y) = 15 + 0.2x - 0.002x^2$. Επιπλέον, θα υποθέσουμε ότι το βάθος του ρεύματος είναι 1 km, ενώ το μέτρο της ταχύτητάς του μεταβάλλεται καθώς μεταφερόμαστε από το κάτω προς το επάνω μέρος του σύμφωνα με τη συνάρτηση $s(x, y) = 0.5 + 1.5y$ m/s. Προσδιορίστε τον ρυθμό μεταφοράς θερμότητας μέσω μιας ορθογώνιας διατομής του Ρεύματος του Κόλπου με διαστάσεις 100 km επί 1 km.

Λύση Θα υπολογίσουμε τον ζητούμενο ρυθμό H μέσω του ολοκληρώματος:

$$\begin{aligned} H &= \iint_{\mathcal{R}} \rho c T(x, y) s(x, y) dA = \rho c \int_{x=0}^{100} \left(\int_{y=0}^1 (15 + 0.2x - 0.002x^2)(0.5 + 1.5y) dy \right) dx \\ &= \rho c \int_{x=0}^{100} (15 + 0.2x - 0.002x^2) \left(\int_{y=0}^1 (0.5 + 1.5y) dy \right) dx \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Ένα μοντέλο μεταβολής πληθυσμών θηρευτή-θηράματος Έστω ότι οι $p(t)$ και $q(t)$ αναπαριστούν τους μεταβαλλόμενους (με το χρόνο t) πληθυσμούς ενός θηρευτή και ενός θηράματος αντίστοιχως. Αν συνδυάσουμε αυτές τις δύο συναρτήσεις ($q(t)$, $p(t)$) θα έχουμε την παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης στο επίπεδο qp . Η καμπύλη του Σχήματος 10 αναπαριστά ένα απλό μοντέλο του τρόπου με τον οποίο μπορούν να μεταβάλλονται οι πληθυσμοί αυτών των δύο ζωικών ειδών με το πέρασμα του χρόνου. Αναλύστε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι δύο αυτοί πληθυσμοί, καθώς αυξάνεται ο χρόνος, στα σημεία A και B της καμπύλης. Προσδιορίστε αν η καμπύλη διαγράφεται με ωρολογιακή ή αντι-ωρολογιακή φορά καθώς ο χρόνος t αυξάνεται.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Προσφέρουν ένα περιεκτικό σύνολο ασκήσεων στενά συνδεδεμένων με το υλικό του κεφαλαίου για να παρέχουν επιπλέον προβλήματα για προσωπική μελέτη ή εργασίες.

Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου

- Προσδιορίστε τα πεδία ορισμού των ακόλουθων διανυσματικών συναρτήσεων.
 - $\mathbf{r}_1(t) = \langle t^{-1}, (t+1)^{-1}, \sin^{-1} t \rangle$
 - $\mathbf{r}_2(t) = \langle \sqrt{8-t^3}, \ln t, e^{\sqrt{t}} \rangle$
- Σχεδιάστε τα γραφήματα των $\mathbf{r}_1(\theta) = \langle \theta, \cos \theta \rangle$ και $\mathbf{r}_2(\theta) = \langle \cos \theta, \theta \rangle$ στο επίπεδο xy .
- Βρείτε μια διανυσματική παραμέτρηση για την τομή των επιφανειών $x^2 + y^4 + 2z^3 = 6$ και $x = y^2$ στον $\mathbf{R}^3$.
- Προσδιορίστε μια διανυσματική παραμέτρηση χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές συναρτήσεις για την τομή του επιπέδου $x + y + z = 1$ και του ελλειπτικού κυλίνδρου $(\frac{y}{3})^2 + (\frac{z}{8})^2 = 1$ στον $\mathbf{R}^3$.
- έχοντας ταχύτητα $\mathbf{v}(t) = \langle 1, t, 2t^2 \rangle$. Βρείτε τη θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2$.
- Προσδιορίστε τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ στο $\mathbf{R}^2$ που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{r}(t)$ με αρχικές συνθήκες $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 2 \rangle$.
- Προσδιορίστε την $\mathbf{r}(t)$ υποθέτοντας ότι

$$\mathbf{r}''(t) = \langle 4 - 16t, 12t^2 - t \rangle$$

$$\mathbf{r}'(0) = \langle 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{r}(0) = \langle 0, 1 \rangle$$
- Επλύστε την $\mathbf{r}''(t) = \langle t^2 - 1, t + 1, t^3 \rangle$ με $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$ και $\mathbf{r}'(0) = \langle -1, 1, 0 \rangle$.
- Υπολογίστε το μήκος της τροχιάς

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sin 2t, \cos 2t, 3t - 1 \rangle \quad \text{για } 1 \leq t \leq 3$$

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Είμαστε ευγνώμονες στους πολλούς εκπαιδευτικούς από τις Ηνωμένες Πολιτείες και τον Καναδά οι οποίοι πρόσφεραν σχόλια στην κατεύθυνση της εξέλιξης και της τελικής μορφής αυτού του βιβλίου. Αυτές συνεισφορές τους περιλαμβάνουν δοκιμασίες στην τάξη, ανασκόπηση χειρογράφων και ασκήσεων, καθώς και συμμετοχή σε έρευνες σχετικά με το βιβλίο και γενικές ανάγκες μαθημάτων.

ALABAMA Tammy Potter, *Gadsden State Community College*; David Dempsey, *Jacksonville State University*; Edwin Smith, *Jacksonville State University*; Jeff Dodd, *Jacksonville State University*; Douglas Bailer, *Northeast Alabama Community College*; Michael Hicks, *Shelton State Community College*; Patricia C. Eiland, *Troy University, Montgomery Campus*; Chadia Affane Aji, *Tuskegee University*; James L. Wang, *The University of Alabama*; Stephen Brick, *University of South Alabama*; Joerg Feldvoss, *University of South Alabama*; Ulrich Albrecht, *Auburn University* **ALASKA** Mark A. Fitch, *University of Alaska Anchorage*; Kamal Narang, *University of Alaska Anchorage*; Alexei Rybkin, *University of Alaska Fairbanks*; Martin Getz, *University of Alaska Fairbanks* **ARIZONA** Stefania Tracogna, *Arizona State University*; Bruno Welfert, *Arizona State University*; Light Bryant, *Arizona Western College*; Daniel Russow, *Arizona Western College*; Jennifer Jameson, *Coconino College*; George Cole, *Mesa Community College*; David Schultz, *Mesa Community College*; Michael Bezusko, *Pima Community College, Desert Vista Campus*; Garry Carpenter, *Pima Community College, Northwest Campus*; Paul Flasch, *Pima County Community College*; Jessica Knapp, *Pima Community College, Northwest Campus*; Roger Werbylo, *Pima County Community College*; Katie Louchart, *Northern Arizona University*; Janet McShane, *Northern Arizona University*; Donna M. Krawczyk, *The University of Arizona* **ARKANSAS** Deborah Parker, *Arkansas Northeastern College*; J. Michael Hall, *Arkansas State University*; Kevin Cornelius, *Ouachita Baptist University*; Hyungkoo Mark Park, *Southern Arkansas University*; Katherine Pinzon, *University of Arkansas at Fort Smith*; Denise LeGrand, *University of Arkansas at Little Rock*; John Annulis, *University of Arkansas at Monticello*; Erin Haller, *University of Arkansas, Fayetteville*; Shannon Dingman, *University of Arkansas, Fayetteville*; Daniel J. Arrigo, *University of Central Arkansas* **CALIFORNIA** Michael S. Gagliardo, *California Lutheran University*; Harvey Green-

wald, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Charles Hale, *California Polytechnic State University*; John Hagen, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Donald Hartig, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Colleen Margarita Kirk, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Lawrence Sze, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Raymond Terry, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; James R. McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*; Robin Wilson, *California State Polytechnic University, Pomona*; Charles Lam, *California State University, Bakersfield*; David McKay, *California State University, Long Beach*; Melvin Lax, *California State University, Long Beach*; Wallace A. Etterbeek, *California State University, Sacramento*; Mohamed Allali, *Chapman University*; George Rhys, *College of the Canyons*; Janice Hector, *DeAnza College*; Isabelle Saber, *Glendale Community College*; Peter Stathis, *Glendale Community College*; Douglas B. Lloyd, *Golden West College*; Thomas Scardina, *Golden West College*; Kristin Hartford, *Long Beach City College*; Eduardo Arismendi-Pardi, *Orange Coast College*; Mitchell Alves, *Orange Coast College*; Yenkanh Vu, *Orange Coast College*; Yan Tian, *Palomar College*; Donna E. Nordstrom, *Pasadena City College*; Don L. Hancock, *Pepperdine University*; Kevin Iga, *Pepperdine University*; Adolfo J. Rumbos, *Pomona College*; Virginia May, *Sacramento City College*; Carlos de la Lama, *San Diego City College*; Matthias Beck, *San Francisco State University*; Arek Goetz, *San Francisco State University*; Nick Bykov, *San Joaquin Delta College*; Eleanor Lang Kendrick, *San Jose City College*; Elizabeth Hodes, *Santa Barbara City College*; William Konya, *Santa Monica College*; John Kennedy, *Santa Monica College*; Peter Lee, *Santa Monica College*; Richard Salome, *Scotts Valley High School*; Norman Feldman, *Sonoma State University*; Elaine McDonald, *Sonoma State University*; John D. Eggers, *University of California, San Diego*; Adam Bowers, *University of California, San*

Diego; Bruno Nachtergaele, *University of California, Davis*; Boumediene Hamzi, *University of California, Davis*; Olga Radko, *University of California, Los Angeles*; Richard Leborne, *University of California, San Diego*; Peter Steinhagen, *University of California, San Diego*; Jeffrey Stopple, *University of California, Santa Barbara*; Guofang Wei, *University of California, Santa Barbara*; Rick A. Simon, *University of La Verne*; Alexander E. Koonce, *University of Redlands*; Mohamad A. Alwash, *West Los Angeles College*; Calder Daenzer, *University of California, Berkeley*; Jude Thaddeus Socrates, *Pasadena City College*; Cheuk Ying Lam, *California State University Bakersfield*; Borislava Gutarts, *California State University, Los Angeles*; Daniel Rogalski, *University of California, San Diego*; Don Hartig, *California Polytechnic State University*; Anne Voth, *Palomar College*; Jay Wiestling, *Palomar College*; Lindsey Bramlett-Smith, *Santa Barbara City College*; Dennis Morrow, *College of the Canyons*; Sydney Shanks, *College of the Canyons*; Bob-Tolar, *College of the Canyons*; Gene W. Majors, *Fullerton College*; Robert Diaz, *Fullerton College*; Gregory Nguyen, *Fullerton College*; Paul Sjoberg, *Fullerton College*; Deborah Ritchie, *Moorpark College*; Maya Rahnamaie, *Moorpark College*; Kathy Fink, *Moorpark College*; Christine Cole, *Moorpark College*; K. Di Passero, *Moorpark College*; Sid Kolpas, *Glendale Community College*; Miriam Castrconde, *Irvine Valley College*; Ilkner Erbas-White, *Irvine Valley College*; Corey Manchester, *Grossmont College*; Donald Murray, *Santa Monica College*; Barbara McGee, *Cuesta College*; Marie Larsen, *Cuesta College*; Joe Vasta, *Cuesta College*; Mike Kinter, *Cuesta College*; Mark Turner, *Cuesta College*; G. Lewis, *Cuesta College*; Daniel Kleinfelter, *College of the Desert*; Esmeralda Medrano, *Citrus College*; James Swatzel, *Citrus College*; Mark Littrell, *Rio Hondo College*; Rich Zucker, *Irvine Valley College*; Cindy Torigison, *Palomar College*; Craig Chamberline, *Palomar College*; Lindsey Lang, *Diablo Valley College*; Sam Needham, *Diablo Valley College*; Dan Bach, *Diablo Valley College*; Ted Nirgiotis, *Diablo Valley College*; Monte Collazo, *Diablo Valley College*; Tina Levy, *Diablo Valley College*; Mona Panchal, *East Los Angeles College*; Ron Sandvick, *San Diego Mesa College*; Larry Handa, *West Valley College*; Frederick Utter, *Santa Rose Junior College*; Farshod Mosh, *DeAnza College*; Doli Bambhania, *DeAnza College*; Charles Klein, *DeAnza College*; Tammi Marshall, *Cauyamac College*; Inwon Leu, *Cauyamac College*; Michael Moretti, *Bakersfield College*; Janet Tarjan, *Bakersfield College*; Hoat Le, *San Diego City College*; Richard Fielding, *Southwestern College*; Shannon Gracey, *Southwestern College*; Janet Mazzarella, *Southwestern College*; Christina Soderlund, *California Lutheran University*; Rudy Gonzalez, *Citrus College*; Robert Crise, *Crafton Hills College*; Joseph Kazimir, *East Los Angeles College*; Randall Rogers, *Fullerton College*; Peter Bouzar, *Golden West College*; Linda Ternes, *Golden West College*; Hsiao-Ling Liu, *Los An-*

geles Trade Tech Community College; Yu-Chung Chang-Hou, *Pasadena City College*; Guillermo Alvarez, *San Diego City College*; Ken Kuniyuki, *San Diego Mesa College*; Laleh Howard, *San Diego Mesa College*; Sharareh Masooman, *Santa Barbara City College*; Jared Hersh, *Santa Barbara City College*; Betty Wong, *Santa Monica College*; Brian Rodas, *Santa Monica College*; Veasna Chiek, *Riverside City College*; Kenn Huber, *University of California, Irvine*; Berit Givens, *California State Polytechnic University, Pomona*; Will Murray, *California State University, Long Beach*; Alain Bourget, *California State University, Fullerton* **COLORADO** Tony Weathers, *Adams State College*; Erica Johnson, *Arapahoe Community College*; Karen Walters, *Arapahoe Community College*; Joshua D. Lai-son, *Colorado College*; G. Gustave Greivel, *Colorado School of Mines*; Holly Eklund, *Colorado School of the Mines*; Mike Nicholas, *Colorado School of the Mines*; Jim Thomas, *Colorado State University*; Eleanor Storey, *Front Range Community College*; Larry Johnson, *Metropolitan State College of Denver*; Carol Kuper, *Morgan Community College*; Larry A. Pontaski, *Pueblo Community College*; Terry Chen Reeves, *Red Rocks Community College*; Debra S. Carney, *Colorado School of the Mines*; Louis A. Talman, *Metropolitan State College of Denver*; Mary A. Nelson, *University of Colorado at Boulder*; J. Kyle Pula, *University of Denver*; Jon Von Stroh, *University of Denver*; Sharon Butz, *University of Denver*; Daniel Daly, *University of Denver*; Tracy Lawrence, *Arapahoe Community College*; Shawna Mahan, *University of Colorado Denver*; Adam Norris, *University of Colorado at Boulder*; Anca Radulescu, *University of Colorado at Boulder*; Mike Kawai, *University of Colorado Denver*; Janet Barnett, *Colorado State University–Pueblo*; Byron Hurley, *Colorado State University–Pueblo*; Jonathan Portiz, *Colorado State University–Pueblo*; Bill Emerson, *Metropolitan State College of Denver*; Suzanne Caulk, *Regis University*; Anton Dzhamay, *University of Northern Colorado*; Stephen Pankavich, *Colorado School of Mines*; Murray Cox, *University of Colorado at Boulder*; Anton Betten, *Colorado State University* **CONNECTICUT** Jeffrey McGowan, *Central Connecticut State University*; Ivan Gotchev, *Central Connecticut State University*; Charles Waiveris, *Central Connecticut State University*; Christopher Hammond, *Connecticut College*; Anthony Y. Aidoo, *Eastern Connecticut State University*; Kim Ward, *Eastern Connecticut State University*; Joan W. Weiss, *Fairfield University*; Theresa M. Sandifer, *Southern Connecticut State University*; Cristian Rios, *Trinity College*; Melanie Stein, *Trinity College*; Steven Orszag, *Yale University* **DELAWARE** Patrick F. Mwerinde, *University of Delaware* **DISTRICT OF COLUMBIA** Jeffrey Hakim, *American University*; Joshua M. Lansky, *American University*; James A. Nickerson, *Gallaudet University* **FLORIDA** Gregory Spradlin, *Embry-Riddle University at Daytona Beach*; Daniela Popova, *Florida Atlantic University*; Abbas Zadegan, *Florida Inter-*

national University; Gerardo Aladro, *Florida International University*; Gregory Henderson, *Hillsborough Community College*; Pam Crawford, *Jacksonville University*; Penny Morris, *Polk Community College*; George Schultz, *St. Petersburg College*; Jimmy Chang, *St. Petersburg College*; Carolyn Kistner, *St. Petersburg College*; Aida Kadic-Galeb, *The University of Tampa*; Constance Schober, *University of Central Florida*; S. Roy Choudhury, *University of Central Florida*; Kurt Overhiser, *Valencia Community College*; Jiongmin Yong, *University of Central Florida*; Giray Okten, *The Florida State University*; Frederick Hoffman, *Florida Atlantic University*; Thomas Beatty, *Florida Gulf Coast University*; Witny Librun, *Palm Beach Community College North*; Joe Castillo, *Broward County College*; Joann Lewin, *Edison College*; Donald Ransford, *Edison College*; Scott Berthiaume, *Edison College*; Alexander Ambrioso, *Hillsborough Community College*; Jane Golden, *Hillsborough Community College*; Susan Hiatt, *Polk Community College—Lakeland Campus*; Li Zhou, *Polk Community College—Winter Haven Campus*; Heather Edwards, *Seminole Community College*; Benjamin Landon, *Daytona State College*; Tony Malaret, *Seminole Community College*; Lane Vosbury, *Seminole Community College*; William Rickman, *Seminole Community College*; Cheryl Cantwell, *Seminole Community College*; Michael Schramm, *Indian River State College*; Janette Campbell, *Palm Beach Community College—Lake Worth*; KwaiLee Chui, *University of Florida*; Shu-Jen Huang, *University of Florida*; Sidra Van De Car, *Valencia College* **GEORGIA** Christian Barrientos, *Clayton State University*; Thomas T. Morley, *Georgia Institute of Technology*; Doron Lubinsky, *Georgia Institute of Technology*; Ralph Wildy, *Georgia Military College*; Shahram Nazari, *Georgia Perimeter College*; Alice Eiko Pierce, *Georgia Perimeter College, Clarkson Campus*; Susan Nelson, *Georgia Perimeter College, Clarkson Campus*; Laurene Fausett, *Georgia Southern University*; Scott N. Kersey, *Georgia Southern University*; Jimmy L. Solomon, *Georgia Southern University*; Allen G. Fuller, *Gordon College*; Marwan Zabdawi, *Gordon College*; Carolyn A. Yackel, *Mercer University*; Blane Hollingsworth, *Middle Georgia State College*; Shahryar Heydari, *Piedmont College*; Dan Kannan, *The University of Georgia*; June Jones, *Middle Georgia State College*; Abdelkrim Brania, *Morehouse College*; Ying Wang, *Augusta State University*; James M. Benedict, *Augusta State University*; Kouong Law, *Georgia Perimeter College*; Rob Williams, *Georgia Perimeter College*; Alvina Atkinson, *Georgia Gwinnett College*; Amy Erickson, *Georgia Gwinnett College* **HAWAII** Shuguang Li, *University of Hawaii at Hilo*; Raina B. Ivanova, *University of Hawaii at Hilo* **IDAHO** Uwe Kaiser, *Boise State University*; Charles Kerr, *Boise State University*; Zach Teitler, *Boise State University*; Otis Kenny, *Boise State University*; Alex Feldman, *Boise State University*; Doug Bullock, *Boise State University*; Brian Dietel, *Lewis-Clark State College*; Ed Korntved,

Northwest Nazarene University; Cynthia Piez, *University of Idaho* **ILLINOIS** Chris Morin, *Blackburn College*; Alberto L. Delgado, *Bradley University*; John Haverhals, *Bradley University*; Herbert E. Kasube, *Bradley University*; Marvin Doubet, *Lake Forest College*; Marvin A. Gordon, *Lake Forest Graduate School of Management*; Richard J. Maher, *Loyola University Chicago*; Joseph H. Mayne, *Loyola University Chicago*; Marian Gidea, *Northeastern Illinois University*; John M. Alongi, *Northwestern University*; Miguel Angel Lerma, *Northwestern University*; Mehmet Dik, *Rockford College*; Tammy Voepel, *Southern Illinois University Edwardsville*; Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*; Thomas Smith, *University of Chicago*; Laura DeMarco, *University of Illinois*; Evangelos Kobotis, *University of Illinois at Chicago*; Jennifer Mc-Neilly, *University of Illinois at Urbana-Champaign*; Timur Oikhberg, *University of Illinois at Urbana-Champaign*; Manouchehr Azad, *Harper College*; Minhua Liu, *Harper College*; Mary Hill, *College of DuPage*; Arthur N. DiVito, *Harold Washington College* **INDIANA** Vania Mascioni, *Ball State University*; Julie A. Killingbeck, *Ball State University*; Kathie Freed, *Butler University*; Zhixin Wu, *DePauw University*; John P. Boardman, *Franklin College*; Robert N. Talbert, *Franklin College*; Robin Symonds, *Indiana University Kokomo*; Henry L. Wyzinski, *Indiana University Northwest*; Melvin Royer, *Indiana Wesleyan University*; Gail P. Greene, *Indiana Wesleyan University*; David L. Finn, *Rose-Hulman Institute of Technology*; Chong Keat Arthur Lim, *University of Notre Dame* **IOWA** Nasser Dastrange, *Buena Vista University*; Mark A. Mills, *Central College*; Karen Ernst, *Hawkeye Community College*; Richard Mason, *Indian Hills Community College*; Robert S. Keller, *Loras College*; Eric Robert Westlund, *Luther College*; Weimin Han, *The University of Iowa*; Man Basnet, *Iowa State University* **KANSAS** Timothy W. Flood, *Pittsburg State University*; Sarah Cook, *Washburn University*; Kevin E. Charlwood, *Washburn University*; Conrad Uwe, *Cowley County Community College*; David N. Yetter, *Kansas State University*; Matthew Johnson, *University of Kansas* **KENTUCKY** Alex M. Mc-Allister, *Center College*; Sandy Spears, *Jefferson Community & Technical College*; Leanne Faulkner, *Kentucky Wesleyan College*; Donald O. Clayton, *Madisonville Community College*; Thomas Riedel, *University of Louisville*; Manabendra Das, *University of Louisville*; Lee Larson, *University of Louisville*; Jens E. Harlander, *Western Kentucky University*; Philip Mc-Cartney, *Northern Kentucky University*; Andy Long, *Northern Kentucky University*; Omer Yayenie, *Murray State University*; Donald Krug, *Northern Kentucky University*; David Royster, *University of Kentucky* **LOUISIANA** William Forrest, *Baton Rouge Community College*; Paul Wayne Britt, *Louisiana State University*; Galen Turner, *Louisiana Tech University*; Randall Wills, *Southeastern Louisiana University*; Kent Neuerburg, *Southeastern Louisiana University*; Guoli Ding, *Louisiana State*

University; Julia Ledet, *Louisiana State University*; Brent Strunk, *University of Louisiana at Monroe*; Michael Tom, *Louisiana State University* **MAINE** Andrew Knightly, *The University of Maine*; Sergey Lvin, *The University of Maine*; Joel W. Irish, *University of Southern Maine*; Laurie Woodman, *University of Southern Maine*; David M. Bradley, *The University of Maine*; William O. Bray, *The University of Maine* **MARYLAND** Leonid Stern, *Towson University*; Jacob Kogan, *University of Maryland Baltimore County*; Mark E. Williams, *University of Maryland Eastern Shore*; Austin A. Lobo, *Washington College*; Supawan Lertsakrai, *Harford Community College*; Fary Sami, *Harford Community College*; Andrew Bulleri, *Howard Community College* **MASSACHUSETTS** Sean McGrath, *Algonquin Regional High School*; Norton Starr, *Amherst College*; Renato Mirollo, *Boston College*; Emma Previato, *Boston University*; Laura K Gross, *Bridgewater State University*; Richard H. Stout, *Gordon College*; Matthew P. Leingang, *Harvard University*; Suellen Robinson, *North Shore Community College*; Walter Stone, *North Shore Community College*; Barbara Loud, *Regis College*; Andrew B. Perry, *Springfield College*; Tawanda Gwena, *Tufts University*; Gary Simundza, *Wentworth Institute of Technology*; Mikhail Chkhenkeli, *Western New England College*; David Daniels, *Western New England College*; Alan Gorfin, *Western New England College*; Saeed Ghahramani, *Western New England College*; Julian Fleron, *Westfield State College*; Maria Fung, *Worcester State University*; Brigitte Servatius, *Worcester Polytechnic Institute*; John Goulet, *Worcester Polytechnic Institute*; Alexander Martsinkovsky, *Northeastern University*; Marie Clote, *Boston College*; Alexander Kastner, *Williams College*; Margaret Peard, *Williams College*; Mihai Stoiciu, *Williams College*; Maciej Szczesny, *Boston University* **MICHIGAN** Mark E. Bollman, *Albion College*; Jim Chesla, *Grand Rapids Community College*; Jeanne Wald, *Michigan State University*; Allan A. Struthers, *Michigan Technological University*; Debra Pharo, *Northwestern Michigan College*; Anna Maria Spagnuolo, *Oakland University*; Diana Faoro, *Romeo Senior High School*; Andrew Strowe, *University of Michigan–Dearborn*; Daniel Stephen Drucker, *Wayne State University*; Christopher Cartwright, *Lawrence Technological University*; Jay Treiman, *Western Michigan University* **MINNESOTA** Bruce Bordwell, *Anoka-Ramsey Community College*; Robert Dobrow, *Carleton College*; Jessie K. Lenarz, *Concordia College–Moorhead Minnesota*; Bill Tomhave, *Concordia College*; David L. Frank, *University of Minnesota*; Steven I. Sperber, *University of Minnesota*; Jeffrey T. Mc-Lean, *University of St. Thomas*; Chehrzad Shakiban, *University of St. Thomas*; Melissa Loe, *University of St. Thomas*; Nick Christopher Fiala, *St. Cloud State University*; Victor Padron, *Normandale Community College*; Mark Ahrens, *Normandale Community College*; Gerry Naughton, *Century Community College*; Carrie Naughton, *Inver Hills Community College* **MISSISSIPPI** Vivi-

en G. Miller, *Mississippi State University*; Ted Dobson, *Mississippi State University*; Len Miller, *Mississippi State University*; Tristan Denley, *The University of Mississippi* **MISSOURI** Robert Robertson, *Drury University*; Gregory A. Mitchell, *Metropolitan Community College–Penn Valley*; Charles N. Curtis, *Missouri Southern State University*; Vivek Narayanan, *Moberly Area Community College*; Russell Blyth, *Saint Louis University*; Julianne Rainbolt, *Saint Louis University*; Blake Thornton, *Saint Louis University*; Kevin W. Hopkins, *Southwest Baptist University*; Joe Howe, *St. Charles Community College*; Wanda Long, *St. Charles Community College*; Andrew Stephan, *St. Charles Community College* **MONTANA** Kelly Cline, *Carroll College*; Veronica Baker, *Montana State University, Bozeman*; Richard C. Swanson, *Montana State University*; Thomas Hayes-McGoff, *Montana State University*; Nikolaus Vonessen, *The University of Montana*; Corinne Casolaro, *Montana State University, Bozeman* **NEBRASKA** Edward G. Reinke Jr., *Concordia University*; Judith Downey, *University of Nebraska at Omaha* **NEVADA** Jennifer Gorman, *College of Southern Nevada*; Jonathan Pearsall, *College of Southern Nevada*; Rohan Dalpatadu, *University of Nevada, Las Vegas*; Paul Aizley, *University of Nevada, Las Vegas*; Charlie Nazemian, *University of Nevada, Reno* **NEW HAMPSHIRE** Richard Jardine, *Keene State College*; Michael Cullinane, *Keene State College*; Roberta Kieronksi, *University of New Hampshire at Manchester*; Erik Van Erp, *Dartmouth College* **NEW JERSEY** Paul S. Rossi, *College of Saint Elizabeth*; Mark Galit, *Essex County College*; Katarzyna Potocka, *Ramapo College of New Jersey*; Nora S. Thornber, *Raritan Valley Community College*; Abdulkadir Hassen, *Rowan University*; Olcay Ilicasu, *Rowan University*; Avraham Soffer, *Rutgers, The State University of New Jersey*; Chengwen Wang, *Rutgers, The State University of New Jersey*; Shabnam Beheshti, *Rutgers University, The State University of New Jersey*; Stephen J. Greenfield, *Rutgers, The State University of New Jersey*; John T. Saccoman, *Seton Hall University*; Lawrence E. Levine, *Stevens Institute of Technology*; Jana Gevertz, *The College of New Jersey*; Barry Burd, *Drew University*; Penny Luczak, *Camden County College*; John Climent, *Cecil Community College*; Kristyanna Erickson, *Cecil Community College*; Eric Compton, *Brookdale Community College*; John Atsu-Swanzy, *Atlantic Cape Community College*; Paul Laumakis, *Rowan University*; Norman Beil, *Rowan University* **NEW MEXICO** Kevin Leith, *Central New Mexico Community College*; David Blankenbaker, *Central New Mexico Community College*; Joseph Lakey, *New Mexico State University*; Kees Onneweer, *University of New Mexico*; Jurg Bolli, *The University of New Mexico*; Amal Mostafa, *New Mexico State University*; Christopher Stuart, *New Mexico State University* **NEW YORK** Robert C. Williams, *Alfred University*; Timmy G. Bremer, *Broome Community College State University of New York*; Joaquin O. Carbonara, *Buffalo State*

College; Robin Sue Sanders, *Buffalo State College*; Daniel Cunningham, *Buffalo State College*; Rose Marie Castner, *Canisius College*; Sharon L. Sullivan, *Catawba College*; Fabio Nironi, *Columbia University*; Camil Muscalu, *Cornell University*; Maria S. Terrell, *Cornell University*; Margaret Mulligan, *Dominican College of Blauvelt*; Robert Andersen, *Farmingdale State University of New York*; Leonard Nissim, *Fordham University*; Jennifer Roche, *Hobart and William Smith Colleges*; James E. Carpenter, *Iona College*; Peter Shenkin, *John Jay College of Criminal Justice/CUNY*; Gordon Crandall, *LaGuardia Community College/CUNY*; Gilbert Traub, *Maritime College, State University of New York*; Paul E. Seeburger, *Monroe Community College Brighton Campus*; Abraham S. Mantell, *Nassau Community College*; Daniel D. Birmajer, *Nazareth College*; Sybil G. Shaver, *Pace University*; Margaret Kiehl, *Rensselaer Polytechnic Institute*; Carl V. Lutzer, *Rochester Institute of Technology*; Michael A. Radin, *Rochester Institute of Technology*; Hossein Shahmohamad, *Rochester Institute of Technology*; Thomas Rousseau, *Siena College*; Jason Hofstein, *Siena College*; Leon E. Gerber, *St. Johns University*; Christopher Bishop, *Stony Brook University*; James Fulton, *Suffolk County Community College*; John G. Michaels, *SUNY Brockport*; Howard J. Skogman, *SUNY Brockport*; Cristina Bacuta, *SUNY Cortland*; Jean Harper, *SUNY Fredonia*; David Hobby, *SUNY New Paltz*; Kelly Black, *Union College*; Thomas W. Cusick, *University at Buffalo/The State University of New York*; Gino Biondini, *University at Buffalo/The State University of New York*; Robert Koehler, *University at Buffalo/The State University of New York*; Donald Larson, *University of Rochester*; Robert Thompson, *Hunter College*; Ed Grossman, *The City College of New York*; David Hemmer, *University at Buffalo/The State University of New York* **NORTH CAROLINA** Jeffrey Clark, *Elon University*; William L. Burgin, *Gaston College*; Manouchehr H. Misaghian, *Johnson C. Smith University*; Legunchim L. Emmanwori, *North Carolina A&T State University*; Drew Pasteur, *North Carolina State University*; Demetrio Labate, *North Carolina State University*; Mohammad Kazemi, *The University of North Carolina at Charlotte*; Richard Carmichael, *Wake Forest University*; Gretchen Wilke Whipple, *Warren Wilson College*; John Russell Taylor, *University of North Carolina at Charlotte*; Mark Ellis, *Piedmont Community College* **NORTH DAKOTA** Jim Coykendall, *North Dakota State University*; Anthony J. Bevelacqua, *The University of North Dakota*; Richard P. Millspaugh, *The University of North Dakota*; Thomas Gilsdorf, *The University of North Dakota*; Michele Iiams, *The University of North Dakota*; Mohammad Khavanin, *University of North Dakota*; Jessica Striker, *North Dakota State University*; Benton Duncan, *North Dakota State University* **OHIO** Christopher Butler, *Case Western Reserve University*; Pamela Pierce, *The College of Wooster*; Barbara H. Margolius, *Cleveland State University*; Tzu-Yi Alan Yang, *Columbus State*

Community College; Greg S. Goodhart, *Columbus State Community College*; Kelly C. Stady, *Cuyahoga Community College*; Brian T. Van Pelt, *Cuyahoga Community College*; David Robert Ericson, *Miami University*; Frederick S. Gass, *Miami University*; Thomas Stacklin, *Ohio Dominican University*; Vitaly Bergelson, *The Ohio State University*; Robert Knight, *Ohio University*; John R. Pather, *Ohio University, Eastern Campus*; Teresa Contenza, *Otterbein College*; Ali Hajjafar, *The University of Akron*; Jianping Zhu, *The University of Akron*; Ian Clough, *University of Cincinnati Clermont College*; Atif Abueida, *University of Dayton*; Judith McCrory, *The University at Findlay*; Thomas Smotzer, *Youngstown State University*; Angela Spalsbury, *Youngstown State University*; James Osterburg, *The University of Cincinnati*; Mihaela A. Poplicher, *University of Cincinnati*; Frederick Thulin, *University of Illinois at Chicago*; Weimin Han, *The Ohio State University*; Crichton Ogle, *The Ohio State University*; Jackie Miller, *The Ohio State University*; Walter Mackey, *Owens Community College*; Jonathan Baker, *Columbus State Community College*; Vincent Graziano, *Case Western Reserve University*; Sailai Sally, *Cleveland State University* **OKLAHOMA** Christopher Francisco, *Oklahoma State University*; Michael McClendon, *University of Central Oklahoma*; Teri Jo Murphy, *The University of Oklahoma*; Kimberly Adams, *University of Tulsa*; Shirley Pomeranz, *University of Tulsa* **OREGON** Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*; Angela Martinek, *Linn-Benton Community College*; Filix Maisch, *Oregon State University*; Tevian Dray, *Oregon State University*; Mark Ferguson, *Chemeketa Community College*; Andrew Flight, *Portland State University*; Austina Fong, *Portland State University*; Jeanette R. Palmiter, *Portland State University*; Jean Nganou, *University of Oregon*; Juan Restrepo, *Oregon State University* **PENNSYLVANIA** John B. Polhill, *Bloomsburg University of Pennsylvania*; Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*; Jon A. Beal, *Clarion University of Pennsylvania*; Kathleen Kane, *Community College of Allegheny County*; David A. Santos, *Community College of Philadelphia*; David S. Richeson, *Dickinson College*; Christine Marie Cedzo, *Gannon University*; Monica Pierri-Galvao, *Gannon University*; John H. Ellison, *Grove City College*; Gary L. Thompson, *Grove City College*; Dale McIntyre, *Grove City College*; Dennis Benchoff, *Harrisburg Area Community College*; William A. Drumin, *King's College*; Denise Reboli, *King's College*; Chawne Kimber, *Lafayette College*; Elizabeth McMahon, *Lafayette College*; Lorenzo Traldi, *Lafayette College*; David L. Johnson, *Lehigh University*; Matthew Hyatt, *Lehigh University*; Zia Uddin, *Lock Haven University of Pennsylvania*; Donna A. Dietz, *Mansfield University of Pennsylvania*; Samuel Wilcock, *Messiah College*; Richard R. Kern, *Montgomery County Community College*; Michael Fraboni, *Moravian College*; Neena T. Chopra, *The Pennsylvania State University*; Boris A. Datskovsky, *Temple University*; Den-

nis M. DeTurck, *University of Pennsylvania*; Jacob Burbea, *University of Pittsburgh*; Mohammed Yahdi, *Ursinus College*; Timothy Feeman, *Villanova University*; Douglas Norton, *Villanova University*; Robert Styer, *Villanova University*; Michael J. Fisher, *West Chester University of Pennsylvania*; Peter Brooksbank, *Bucknell University*; Larry Friesen, *Butler County Community College*; Lisa Angelo, *Bucks County College*; Elaine Fitt, *Bucks County College*; Pauline Chow, *Harrisburg Area Community College*; Diane Benner, *Harrisburg Area Community College*; Erica Chauvet, *Waynesburg University*; Mark McKibben, *West Chester University*; Constance Ziemian, *Bucknell University*; Jeffrey Wheeler, *University of Pittsburgh*; Jason Aran, *Drexel University*; Nakia Rimmer, *University of Pennsylvania*; Nathan Ryan, *Bucknell University*; Bharath Narayanan, *Pennsylvania State University* **RHODE ISLAND** Thomas F. Banchoff, *Brown University*; Yajni Warnapala-Yehiya, *Roger Williams University*; Carol Gibbons, *Salve Regina University*; Joe Allen, *Community College of Rhode Island*; Michael Latina, *Community College of Rhode Island* **SOUTH CAROLINA** Stanley O. Perrine, *Charleston Southern University*; Joan Hoffacker, *Clemson University*; Constance C. Edwards, *Coastal Carolina University*; Thomas L. Fitzkee, *Francis Marion University*; Richard West, *Francis Marion University*; John Harris, *Furman University*; Douglas B. Meade, *University of South Carolina*; George Androulakis, *University of South Carolina*; Art Mark, *University of South Carolina Aiken*; Sherry Biggers, *Clemson University*; Mary Zachary Krohn, *Clemson University*; Andrew Incognito, *Coastal Carolina University*; Deanna Caveny, *College of Charleston* **SOUTH DAKOTA** Dan Kemp, *South Dakota State University* **TENNESSEE** Andrew Miller, *Belmont University*; Arthur A. Yanushka, *Christian Brothers University*; Laurie Plunk Dishman, *Cumberland University*; Maria Siopsis, *Maryville College*; Beth Long, *Pellissippi State Technical Community College*; Judith Fethe, *Pellissippi State Technical Community College*; Andrzej Gutek, *Tennessee Technological University*; Sabine Le Borne, *Tennessee Technological University*; Richard Le Borne, *Tennessee Technological University*; Maria F. Bothelho, *University of Memphis*; Roberto Triggiani, *University of Memphis*; Jim Conant, *The University of Tennessee*; Pavlos Tzermias, *The University of Tennessee*; Luis Renato Abib Finotti, *University of Tennessee, Knoxville*; Jennifer Fowler, *University of Tennessee, Knoxville*; Jo Ann W. Staples, *Vanderbilt University*; Dave Vinson, *Pellissippi State Community College*; Jonathan Lamb, *Pellissippi State Community College*; Stella Thistlewaite, *University of Tennessee, Knoxville* **TEXAS** Sally Haas, *Angelina College*; Karl Havlak, *Angelo State University*; Michael Huff, *Austin Community College*; John M. Davis, *Baylor University*; Scott Wilde, *Baylor University and The University of Texas at Arlington*; Rob Eby, *Blinn College*; Tim Sever, *Houston Community College—Central*; Ernest Lowery, *Houston Community College—Northwest*; Brian Loft, *Sam Houston State University*; Jianzhong Wang, *Sam Houston State University*; Shirley Davis, *South Plains College*; Todd M. Steckler, *South Texas College*; Mary E. Wagner-Krankel, *St. Mary's University*; Elise Z. Price, *Tarrant County College, Southeast Campus*; David Price, *Tarrant County College, Southeast Campus*; Runchang Lin, *Texas A&M University*; Michael Stecher, *Texas A&M University*; Philip B. Yasskin, *Texas A&M University*; Brock Williams, *Texas Tech University*; I. Wayne Lewis, *Texas Tech University*; Robert E. Byerly, *Texas Tech University*; Ellina Grigorieva, *Texas Woman's University*; Abraham Haje, *Tomball College*; Scott Chapman, *Trinity University*; Elias Y. Deebea, *University of Houston Downtown*; Jianping Zhu, *The University of Texas at Arlington*; Tuncay Aktosun, *The University of Texas at Arlington*; John E. Gilbert, *The University of Texas at Austin*; Jorge R. Viramontes-Olivias, *The University of Texas at El Paso*; Fengxin Chen, *University of Texas at San Antonio*; Melanie Ledwig, *The Victoria College*; Gary L. Walls, *West Texas A&M University*; William Heierman, *Wharton County Junior College*; Lisa Rezac, *University of St. Thomas*; Raymond J. Cannon, *Baylor University*; Kathryn Flores, *McMurry University*; Jacqueline A. Jensen, *Sam Houston State University*; James Galloway, *Collin County College*; Raja Khoury, *Collin County College*; Annette Benbow, *Tarrant County College—Northwest*; Greta Harland, *Tarrant County College—Northeast*; Doug Smith, *Tarrant County College—Northeast*; Marcus McGuff, *Austin Community College*; Clarence McGuff, *Austin Community College*; Steve Rodi, *Austin Community College*; Vicki Payne, *Austin Community College*; Anne Pradera, *Austin Community College*; Christy Babu, *Laredo Community College*; Deborah Hewitt, *McLennan Community College*; W. Duncan, *McLennan Community College*; Hugh Griffith, *Mt. San Antonio College*; Qin Sheng, *Baylor University*; My Linh Nguyen, *University of Texas at Dallas*; Lorenzo Sadun, *University of Texas at Austin* **UTAH** Ruth Trygstad, *Salt Lake City Community College* **VIRGINIA** Verne E. Leininger, *Bridgewater College*; Brian Bradie, *Christopher Newport University*; Hongwei Chen, *Christopher Newport University*; John J. Avioli, *Christopher Newport University*; James H. Martin, *Christopher Newport University*; David Walnut, *George Mason University*; Mike Shirazi, *Germanna Community College*; Julie Clark, *Hollins University*; Ramon A. Mata-Toledo, *James Madison University*; Adrian Riskin, *Mary Baldwin College*; Josephine Letts, *Ocean Lakes High School*; Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*; Deborah Denvir, *Randolph-Macon Woman's College*; Linda Powers, *Virginia Tech*; Gregory Dresden, *Washington and Lee University*; Jacob A. Siehler, *Washington and Lee University*; Yuan-Jen Chiang, *University of Mary Washington*; Nicholas Hamblet, *University of Virginia*; Bernard Fulgham, *University of Virginia*; Manouchehr “Mike” Mohajeri, *University of Virginia*; Lester Frank Caudill, *Universi-*

ty of Richmond **VERMONT** David Dorman, *Middlebury College*; Rachel Repstad, *Vermont Technical College* **WASHINGTON** Jennifer Laveglia, *Bellevue Community College*; David Whittaker, *Cascadia Community College*; Sharon Saxton, *Cascadia Community College*; Aaron Montgomery, *Central Washington University*; Patrick Averbeck, *Edmonds Community College*; Tana Knudson, *Heritage University*; Kelly Brooks, *Pierce College*; Shana P. Calaway, *Shoreline Community College*; Abel Gage, *Skagit Valley College*; Scott MacDonald, *Tacoma Community College*; Jason Preszler, *University of Puget Sound*; Martha A. Gady, *Whitworth College*; Wayne L. Neidhardt, *Edmonds Community College*; Simrat Ghuman, *Bellevue College*; Jeff Eldridge, *Edmonds Community College*; Kris Kissel, *Green River Community College*; Laura Moore-Mueller, *Green River Community College*; David Stacy, *Bellevue College*; Eric Schultz, *Walla Walla Community College*; Julianne Sachs, *Walla Walla Community College* **WEST VIRGINIA** David Cusick, *Marshall University*; Ralph Oberste-Vorth, *Marshall University*; Suda Kunyosying, *Shepard University*; Nicholas Martin, *Shepherd University*; Rajeev Rajaram, *Shepherd University*; Xiaohong Zhang, *West Virginia State University*; Sam B. Nadler, *West Virginia University* **WYOMING** Claudia Stewart, *Casper College*; Pete Wildman, *Casper College*; Charles Newberg, *Western Wyoming Community College*; Lynne Ipin, *University of Wyoming*; John Spitler, *University of Wyoming* **WISCONSIN** Erik R. Tou, *Carthage College*; Paul Bankston, *Marquette University*; Jane Nichols, *Milwaukee School of Engi-*

neering; Yvonne Yaz, *Milwaukee School of Engineering*; Simei Tong, *University of Wisconsin–Eau Claire*; Terry Nyman, *University of Wisconsin–Fox Valley*; Robert L. Wilson, *University of Wisconsin–Madison*; Dietrich A. Uhlenbrock, *University of Wisconsin–Madison*; Paul Milewski, *University of Wisconsin–Madison*; Donald Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*; Kandasamy Muthuvel, *University of Wisconsin–Oshkosh*; Sheryl Wills, *University of Wisconsin–Platteville*; Kathy A. Tomlinson, *University of Wisconsin–River Falls*; Cynthia L. McCabe, *University of Wisconsin–Stevens Point*; Matthew Welz, *University of Wisconsin–Stevens Point*; Joy Becker, *University of Wisconsin–Stout*; Jeganathan Sriskandarajah, *Madison Area Tech College*; Wayne Sigelko, *Madison Area Tech College*; James Walker, *University of Wisconsin–Eau Claire* **CANADA** Don St. Jean, *George Brown College*; Robert Dawson, *St. Mary's University*; Len Bos, *University of Calgary*; Tony Ware, *University of Calgary*; Peter David Papez, *University of Calgary*; John O'Conner, *Grant MacEwan University*; Michael P. Lamoureux, *University of Calgary*; Yousry Elsabrouty, *University of Calgary*; Darja Kalajdziewska, *University of Manitoba*; Andrew Skelton, *University of Guelph*; Douglas Farenick, *University of Regina*; Daniela Silvesan, *Memorial University of Newfoundland*; Beth Ann Austin, *Memorial University*; Brenda Davison, *Simon Fraser University*; Robert Steacy, *University of Victoria*; Dan Kucеровsky, *University of New Brunswick*; Bernardo GalvaoSousa, *University of Toronto*; Hadi Zibaenejad, *University of Waterloo*

Η δημιουργία αυτής της έκδοσης δεν θα είχε γίνει χωρίς τη βοήθεια πολλών ανθρώπων. Αρχικά, θέλουμε να ευχαριστήσουμε τα πρώτα άτομα με τα οποία είχαμε δουλέψει πάνω στην πορεία του έργου. Οι Katrina Mangold, Michele Mangelli και Nikki Miller Dworsky ήταν οι βασικοί άνθρωποι οι οποίοι διαχειρίστηκαν τη ροή της εργασίας, κάνοντας ό,τι μπορούσαν για να ρυθμίσουν τα πάντα με λογικό προγραμματισμό και διευθέτησαν αποτελεσματικά τις διάφορες εισροές βιβλιογραφικών ανασκοπήσεων οι οποίες συνέβαλαν στην άρτια ενημέρωση του έργου. Η δουλειά τους ήταν εξαιρετική και αυτή η τελειότητα στη διαχείριση του έργου βοήθησε στο να έρθει εις πέρας αυτή η έκδοση. Η εμπειρία του Tony με το βιβλίο από το ξεκίνημά του βοήθησε στο να διατηρηθεί η γραφή και η εστίαση εναρμονισμένη με την αρχική δομή και οπτική του βιβλίου. Η ματιά του πάνω στη λεπτομέρεια και η γνώση του αντικειμένου βοήθησαν ώστε το κείμενο να περάσει το μήνυμά του όσο το δυνατόν πιο καθαρά και αποτελεσματικά.

Ο Kerry O'Shaughnessy συνέβαλε σημαντικά ώστε η διαδικασία παραγωγής να προχωρεί εύρυθμα. Ευχαριστίες στον Ron Weickart του Network Graphics για τη δεξιοτεχνική και δημιουργική εκτέλεση του γραφιστικού προγράμματος. Οι Sarah Wales-McGrath (επεξεργασία αντιγραφής) και Cristine Sabooni (διορθώτρια τυπογραφικών δοκιμίων) παρείχαν εξειδικευμένη ανατροφοδότηση. Οι ευχαριστίες μας επίσης στην εκπληκτική ομάδα παραγωγής της Macmillan Learning: Janice Donnola, Sheena Goldstein, Alexis Gargin και Paul Rohloff.

Θέλουμε ιδιαιτέρως να ευχαριστήσουμε τα μέλη του συμβουλευτικού συμβουλίου οι οποίοι έδωσαν αξιόλογες απαντήσεις σε πολύ συγκεκριμένες ερωτήσεις σχετικά με την προσέγγιση και παρουσίαση πολλών σημαντικών θεμάτων: John Davis (Baylor University), Judy Fethe (Mississippi State Community College), Chris Francisco (Oklahoma State University) και Berit Givens (California State Polytechnic University, Pomona). Οι ελεγκτές για τη μαθηματική ακρίβεια του Math Made Visible βοήθησαν ώστε να έρθει η τελική έκδοση στη μορφή που εμφανίζεται τώρα.

Επίσης, θέλουμε να ευχαριστήσουμε τους συναδέλφους μας στα τμήματα που εργαζόμαστε. Είμαστε τυχεροί που δουλεύουμε σε τμήματα πολύ δραστήρια πάνω στα μαθηματικά, όπου λαμβάνουν χώρα πολλά ενδιαφέροντα προγράμματα και αναπτύσσονται και συζητούνται έξυπνες παιδαγωγικές ιδέες. Επιπλέον, θέλουμε να ευχαριστήσουμε τους φοιτητές μας οι οποίοι μας έδωσαν ενέργεια, ενδιαφέρον και ενθουσιασμό που κάνει τη διδασκαλία ανταποδοτική.

Ο Colin θα ήθελε να ευχαριστήσει τα δύο του παιδιά, Alexa και Colton. Ο Bob θα ήθελε να ευχαριστήσει την οικογένειά του. Αυτοί είναι που μας κρατούν καλά προσγειωμένους στον πραγματικό κόσμο, ειδικά όταν τα μαθηματικά προσπαθούν να μας διευθύνουν αλλιώς. Αυτό το βιβλίο αφιερώνεται σε εκείνους.

Bob και Colin

1 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Ο Λογισμός θεμελιώνεται πάνω στην άλγεβρα, την αναλυτική γεωμετρία και την τριγωνομετρία. Ως εκ τούτου, σε αυτό το κεφάλαιο θα θυμηθούμε κάποιες προκαταρκτικές έννοιες, δεδομένα και τύπους που χρησιμοποιούνται στα επόμενα κεφάλαια. Στην τελευταία ενότητα εξετάζουμε τρόπους με τους οποίους η τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ενισχύσει την οπτική κατανόηση των συναρτήσεων και των ιδιοτήτων τους.

Φαινόμενα ταλάντωσης, όπως οι ακραίες παλίρροιας στον όρμο του Fundy στον Ατλαντικό Καναδά, περιγράφονται με ημιτονοειδείς συναρτήσεις από την τριγωνομετρία.



1.1 Πραγματικοί αριθμοί, συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

Ξεκινάμε με μια σύντομη θεώρηση των πραγματικών αριθμών. Αυτό μας δίνει την ευκαιρία να υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες και καθιερωμένους συμβολισμούς.

Ένας **πραγματικός αριθμός** είναι ένας αριθμός ο οποίος παριστάνεται με έναν δεκαδικό αριθμό ή με ένα «δεκαδικό ανάπτυγμα». Υπάρχουν τρεις τύποι δεκαδικών αναπτυγμάτων: πεπερασμένα, άπειρα επαναλαμβανόμενα και άπειρα μη επαναλαμβανόμενα. Για παράδειγμα

$$\frac{3}{8} = 0.375, \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857 \dots = 0.\overline{142857} \quad \pi = 3.141592653589793 \dots$$

Ο αριθμός $\frac{3}{8}$ παριστάνεται με έναν πεπερασμένο δεκαδικό αριθμό, ενώ ο $\frac{1}{7}$ παριστάνεται με έναν άπειρο επαναλαμβανόμενο δεκαδικό. Η γραμμή πάνω από το 142857 υποδηλώνει ότι αυτή η ακολουθία επαναλαμβάνεται απείρως. Το δεκαδικό ανάπτυγμα του π είναι άπειρο αλλά μη επαναλαμβανόμενο.

Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με ένα έντονο **R**. Για να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, αναφερόμαστε σε έναν πραγματικό αριθμό πιο απλά ως έναν *αριθμό*. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\in$ για την έκφραση «ανήκει». Άρα

$$a \in \mathbf{R} \quad \text{διαβάζεται} \quad \text{«το } a \text{ ανήκει στο } \mathbf{R}\text{»}$$

Το σύνολο των ακεραίων συνήθως συμβολίζεται με το γράμμα **Z**.¹ Άρα, $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Ένας **φυσικός αριθμός** είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, δηλαδή ένας από τους αριθμούς 0, 1, 2, ...

Ένας πραγματικός αριθμός ονομάζεται **ρητός** αν μπορεί να παρασταθεί με ένα κλάσμα p/q , όπου p και q είναι ακέραιοι με $q \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με **Q**.² Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, όπως ο π και ο $\sqrt{2}$, ονομάζονται **άρρητοι**.

1. Αυτή η επιλογή προέρχεται από τη γερμανική λέξη *Zahl* που σημαίνει «αριθμός».

2. Από τη λέξη «quotient» που σημαίνει λόγος.

Μπορούμε να καταλάβουμε αν ένας αριθμός είναι ρητός από το δεκαδικό του ανάπτυγμα: Οι ρητοί αριθμοί έχουν πεπερασμένο ή άπειρο επαναλαμβανόμενο δεκαδικό ανάπτυγμα. Επιπλέον, το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού είναι μοναδικό, εκτός από την ακόλουθη εξαίρεση: Κάθε πεπερασμένος δεκαδικός είναι ίσος με έναν άπειρο δεκαδικό στον οποίο το ψηφίο 9 επαναλαμβάνεται. Για παράδειγμα, $1/2 = 0.5 = 0.499999\dots$

Δύο αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών είναι η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης $a + b = b + a$ και η επιμεριστική ιδιότητα του γινομένου επί του αθροίσματος $a(b + c) = ab + ac$. Μπορείτε να βρείτε έναν κατάλογο με περαιτέρω ιδιότητες στο Παράρτημα Β. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των εκθετών τις οποίες χρησιμοποιούμε τακτικά όταν δουλεύουμε με εκθετικές εκφράσεις και συναρτήσεις.

	Κανόνας	Παράδειγμα
Μηδενικός εκθέτης	$b^0 = 1$	$5^0 = 1$
Γινόμενα	$b^x b^y = b^{x+y}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$
Πηλίκα	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$	$\frac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5$
Αρνητικοί εκθέτες	$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$	$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$
Δύναμη σε δύναμη	$(b^x)^y = b^{xy}$	$(3^2)^4 = 3^{2(4)} = 3^8$
Ρίζες	$b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$	$5^{1/2} = \sqrt{5}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Να ξαναγράψετε τους παρακάτω αριθμούς ως φυσικό αριθμό ή κλάσμα.

α) $16^{-1/2}$

β) $27^{2/3}$

γ) $4^{16} \cdot 4^{-18}$

δ) $\frac{9^3}{3^7}$

Λύση

α) $16^{-1/2} = \frac{1}{16^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

β) $27^{2/3} = (27^{1/3})^2 = 3^2 = 9$

γ) $4^{16} \cdot 4^{-18} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

δ) $\frac{9^3}{3^7} = \frac{(3^2)^3}{3^7} = \frac{3^6}{3^7} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

Άλλη μία σημαντική αλγεβρική σχέση είναι το διωνυμικό ανάπτυγμα του $(a + b)^n$. Αποδεικνύεται στο Παράρτημα Γ και χρειάζεται στην απόδειξη του κανόνα της δύναμης για τις παραγώγους στην Ενότητα 3.2. Αναπτύσσοντας το $(a + b)^n$ για $n = 2, 3, 4$ παίρνουμε

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + a^4$

Προσέξτε ότι υπάρχουν μερικά μοτίβα που εμφανίζονται εδώ. Σε κάθε περίπτωση ο πρώτος και ο δεύτερος όρος είναι a^n και $na^{n-1}b$, ενώ οι δύο τελευταίοι όροι είναι nab^{n-1} και b^n . Υπάρχει ένας γενικός τύπος για το ανάπτυγμα που ονομάζεται **τύπος διωνυμικού αναπτύγματος**. Εκφράζεται χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό αθροίσματος ως εξής:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{(n-p)!p!} a^{n-p} b^p$$

Εισάγουμε τον τύπο του αθροίσματος στην Ενότητα 5.1. Προς το παρόν, μπορούμε να καταλάβουμε τον τύπο λέγοντας ότι $(a+b)^n$ είναι ένα άθροισμα με όρους $\frac{n!}{(n-p)!p!} a^{n-p} b^p$ με έναν όρο για κάθε p από το 0 έως το n . Έτσι, για παράδειγμα, στο $(a+b)^8$ οι πρώτοι τέσσερις όροι είναι: $\frac{8!}{8!0!} a^8 = a^8$, $\frac{8!}{7!1!} a^7 b = 8a^7 b$, $\frac{8!}{6!2!} a^6 b^2 = 28a^6 b^2$ και $\frac{8!}{5!3!} a^5 b^3 = 56a^5 b^3$. Εκτελώντας τις πράξεις με τους υπόλοιπους όρους βρίσκουμε ότι

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7 b + 28a^6 b^2 + 56a^5 b^3 + 70a^4 b^4 + 56a^3 b^5 + 28a^2 b^6 + 8ab^7 + a^8$$

Απεικονίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς ως σημεία σε μία ευθεία (Σχήμα 1) και αναφερόμαστε σε αυτή την ευθεία ως **πραγματική ευθεία**. Για αυτόν τον λόγο οι πραγματικοί αριθμοί συχνά ονομάζονται **σημεία**. Το σημείο που αντιστοιχεί στο 0 ονομάζεται **αρχή**.

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι διατεταγμένοι και μπορούμε να το δούμε αυτό διατάσσοντας ως προς τη θέση στην πραγματική ευθεία: ο p είναι **μεγαλύτερος από τον** q , γράφοντας $p > q$, αν ο p είναι δεξιά του q στην ευθεία των αριθμών. Ο p είναι **μικρότερος από τον** q , γράφοντας $p < q$, αν ο p είναι αριστερά του q στην ευθεία των αριθμών.

Ένας πραγματικός αριθμός x καλείται **θετικός** αν $x > 0$, **αρνητικός** αν $x < 0$, **μη θετικός** αν $x \leq 0$ και **μη αρνητικός** αν $x \geq 0$.

Δύο άλλοι σημαντικοί όροι που χρησιμοποιούμε και σχετίζονται με τη θέση τους στην πραγματική ευθεία είναι «μεγάλος» και «μικρός». Λέμε ότι ο p είναι **μεγάλος** αν είναι απομακρυσμένος από την αρχή και ότι ο p είναι **μικρός** αν βρίσκεται κοντά στην αρχή. Ενώ αυτοί οι ορισμοί είναι κάπως ασαφείς, η έννοια πρέπει να είναι σαφής στο πλαίσιο που αυτοί χρησιμοποιούνται.

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται ως (Σχήμα 2):

$$|a| = \text{απόσταση από την αρχή} = \begin{cases} a & \text{αν } a \geq 0 \\ -a & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Για παράδειγμα, $|1.2| = 1.2$ και $|-8.35| = -(-8.35) = 8.35$. Η απόλυτη τιμή έχει τις ιδιότητες:

$$|a| = |-a|, \quad |ab| = |a||b|$$

Η **απόσταση** μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a και b είναι $|b-a|$, η οποία είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα a και b (Σχήμα 3).

Δύο πραγματικοί αριθμοί a και b είναι κοντά μεταξύ τους αν η απόσταση $|b-a|$ είναι μικρή και αυτό συμβαίνει αν το δεκαδικό τους ανάπτυγμα ταυτίζεται σε πολλές θέσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν το δεκαδικό ανάπτυγμα των a και b ταυτίζεται σε k θέσεις (στα δεξιά της υποδιαστολής), τότε η απόσταση $|b-a|$ είναι το πολύ 10^{-k} . Άρα η απόσταση μεταξύ $a = 3.1415$ και $b = 3.1478$ είναι το πολύ 10^{-2} επειδή τα a και b ταυτίζονται σε δύο θέσεις. Στην πραγματικότητα, η απόσταση είναι ακριβώς $|3.1478 - 3.1415| = 0.0063$.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ n παραγοντικό είναι ο αριθμός

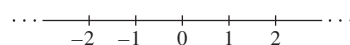
$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots (2)(1)$$

Άρα,

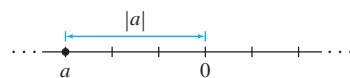
$$1! = 1, \quad 2! = (2)(1) = 2$$

$$3! = (3)(2)(1) = 6$$

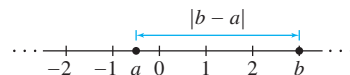
Κατά σύμβαση $0! = 1$.



Σχήμα 1 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών παριστάνεται ως μία ευθεία



Σχήμα 2 $|a|$ είναι η απόσταση από το a έως την αρχή των αξόνων

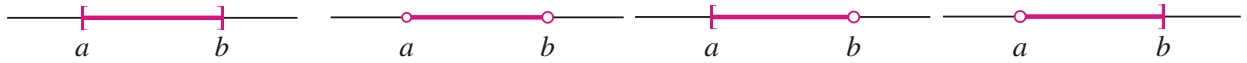


Σχήμα 3 Η απόσταση μεταξύ a και b είναι $|b-a|$

Προσέξτε ότι το $|a + b|$ δεν είναι ίσο με $|a| + |b|$ εκτός και αν τα a και b έχουν το ίδιο πρόσημο ή τουλάχιστον ένας από τους a και b είναι μηδέν. Αν έχουν αντίθετα πρόσημα, τότε γίνεται απλοποίηση στο άθροισμα $a + b$ και $|a + b| < |a| + |b|$. Για παράδειγμα, $|2 + 5| = |2| + |5|$ αλλά $|-2 + 5| = 3$ το οποίο είναι μικρότερο από $|-2| + |5| = 7$. Σε κάθε περίπτωση, το $|a + b|$ δεν είναι ποτέ μεγαλύτερο από $|a| + |b|$ και αυτό μας δίνει την απλή αλλά σημαντική **τριγωνική ανισότητα**:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (1)$$

Για τα διαστήματα χρησιμοποιούμε καθορισμένο συμβολισμό. Δοθέντων των πραγματικών αριθμών a, b με $a < b$ υπάρχουν τέσσερα διαστήματα με άκρα τα a και b (Σχήμα 4). Όλα έχουν μήκος $b - a$ αλλά διαφέρουν σχετικά με τα άκρα που περιλαμβάνουν.



Κλειστό διάστημα $[a, b]$ (τα άκρα περιλαμβάνονται) Ανοικτό διάστημα (a, b) (τα άκρα εξαιρούνται) Ημιανοικτό διάστημα $[a, b)$ Ημιανοικτό διάστημα $(a, b]$

Σχήμα 4 Τα τέσσερα διαστήματα με άκρα τα a και b

Το **κλειστό διάστημα** $[a, b]$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x με $a \leq x \leq b$:

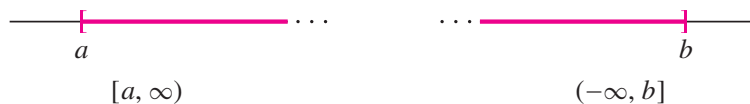
$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$$

Συνήθως το γράφουμε πιο απλά ως $\{x : a \leq x \leq b\}$ εννοώντας ότι το x ανήκει στο $\mathbf{R}$. Το **ανοικτό** και το **ημιανοικτό** διάστημα είναι τα σύνολα

$$\underbrace{(a, b) = \{x : a < x < b\}}_{\text{Ανοικτό διάστημα (τα άκρα εξαιρούνται)}}, \quad \underbrace{[a, b) = \{x : a \leq x < b\}}_{\text{Ημιανοικτό διάστημα}}, \quad \underbrace{(a, b] = \{x : a < x \leq b\}}_{\text{Ημιανοικτό διάστημα}}$$

Το **άπειρο διάστημα** $(-\infty, \infty)$ είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία $\mathbf{R}$. Ένα **ημιάπειρο διάστημα** είναι κλειστό αν περιέχει το πεπερασμένο άκρο του και είναι ανοικτό από την αντίθετη κατεύθυνση (Σχήμα 5).

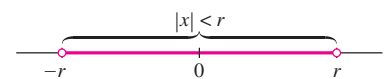
$$[a, \infty) = \{x : x \geq a\}, \quad (-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$$



Σχήμα 5 Κλειστό ημιάπειρο διάστημα

Τα ανοικτά και τα κλειστά διαστήματα μπορούν να περιγραφούν από ανισότητες απόλυτης τιμής. Για παράδειγμα, το διάστημα $(-r, r)$ περιγράφεται από την ανισότητα $|x| < r$ (Σχήμα 6):

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in (-r, r) \quad (2)$$



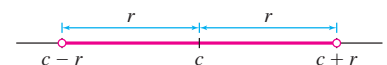
Σχήμα 6 Το διάστημα $(-r, r) = \{x : |x| < r\}$

Πιο γενικά, για ένα διάστημα συμμετρικό γύρω από την τιμή c (Σχήμα 7):

$$|x - c| < r \Leftrightarrow c - r < x < c + r \Leftrightarrow x \in (c - r, c + r) \quad (3)$$

Το σύμβολο $\Leftrightarrow$ διαβάζεται «είναι ισοδύναμο με» και το σύμβολο $\Rightarrow$ που επίσης χρησιμοποιούμε διαβάζεται ως «συνεπάγεται».

Όμοια μπορούν να παρασταθούν τα κλειστά διαστήματα, με το $<$ να αντικαθίσταται με $\leq$. Αναφερόμαστε στο r ως την **ακτίνα** και στο c ως το **μέσο** ή **κέντρο** των διαστημάτων $(c - r, c + r)$ και $[c - r, c + r]$. Τα διαστήματα (a, b) έχουν μέσο $c = \frac{1}{2}(a + b)$ και ακτίνα $r = \frac{1}{2}(b - a)$ (Σχήμα 7).

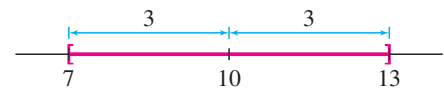


Σχήμα 7 $(a, b) = (c - r, c + r)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Να περιγράψετε το $[7, 13]$ χρησιμοποιώντας μια ανισότητα απόλυτης τιμής.

Λύση Το μέσο του διαστήματος $[7, 13]$ είναι $c = \frac{1}{2}(7 + 13) = 10$ και η ακτίνα του $r = \frac{1}{2}(13 - 7) = 3$ (Σχήμα 8). Επομένως:

$$[7, 13] = \{x \in \mathbf{R} : |x - 10| \leq 3\}$$



Σχήμα 8 Το διάστημα $[7, 13]$ περιγράφεται ως $|x - 10| \leq 3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Περιγράψτε το σύνολο $S = \{x : |\frac{1}{2}x - 3| > 4\}$ με όρους διαστημάτων.

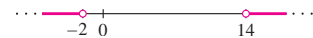
Λύση Είναι ευκολότερο να θεωρήσουμε πρώτα την αντίθετη ανισότητα: $|\frac{1}{2}x - 3| \leq 4$. Από τη Σχέση (2) έχουμε:

$$\left|\frac{1}{2}x - 3\right| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \frac{1}{2}x - 3 \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{1}{2}x \leq 7 \quad (\text{Προσθέτουμε } 3)$$

$$-2 \leq x \leq 14 \quad (\text{Πολλαπλασιάζουμε με } 2)$$

Στο Παράδειγμα 3 χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\cup$ που σημαίνει «ένωση»: Η ένωση $A \cup B$ των συνόλων A και B αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο A είτε στο B (ή και στα δύο).



Σχήμα 9 Το σύνολο $S = \{x : |\frac{1}{2}x - 3| > 4\}$

Αρα, η $|\frac{1}{2}x - 3| \leq 4$ ικανοποιείται όταν το x ανήκει στο $[-2, 14]$. Το σύνολο S είναι το **συμπλήρωμα**, το οποίο αποτελείται από όλους τους αριθμούς x οι οποίοι **δεν ανήκουν** στο $[-2, 14]$. Μπορούμε να περιγράψουμε το S ως την ένωση δύο διαστημάτων: $S = (-\infty, -2) \cup (14, \infty)$ (Σχήμα 9).

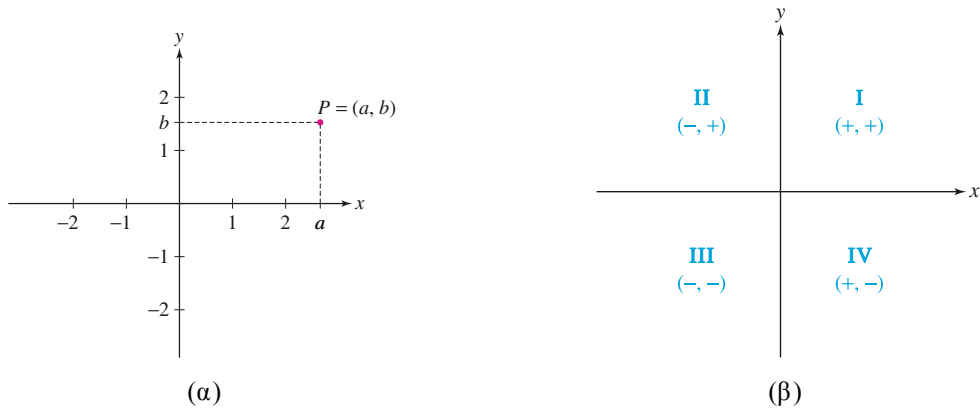
Σχεδίαση

Η σχεδίαση είναι ένα βασικό εργαλείο στον Λογισμό, όπως είναι στην άλγεβρα και στην τριγωνομετρία. Να θυμηθούμε ξανά ότι οι ορθογώνιες (ή καρτεσιανές³) συντεταγμένες στο επίπεδο ορίζονται επιλέγοντας δύο κάθετους άξονες, τον άξονα x και τον άξονα y . Σε ένα ζεύγος αριθμών (a, b) συσχετίζουμε το σημείο P που βρίσκεται στην τομή της κάθετης ευθείας στον άξονα x στο a και της κάθετης ευθείας στον άξονα y στο b (Σχήμα 10α). Οι αριθμοί a και b είναι οι x και y **συντεταγμένες** του P . Η συντεταγμένη x μερικές φορές καλείται **τετμημένη** και η συντεταγμένη y καλείται **τεταγμένη**. Η **αρχή** των αξόνων είναι το σημείο με συντεταγμένες $(0, 0)$.

Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια με την ένδειξη I-IV, τα οποία προσδιορίζονται από τα πρόσημα των συντεταγμένων (Σχήμα 10β). Για παράδειγμα, το τεταρτημόριο III αποτελείται από τα σημεία (x, y) τέτοια ώστε $x < 0$ και $y < 0$.

Ο συμβολισμός (a, b) θα μπορούσε να σημαίνει το ανοικτό διάστημα το οποίο είναι ίσο με το σύνολο των σημείων $\{x : a < x < b\}$ ή θα μπορούσε να σημαίνει το σημείο στο επίπεδο xy με $x = a$ και $y = b$. Γενικά, η ερμηνεία γίνεται εμφανής από το περιεχόμενο του κειμένου.

3. Ο όρος «καρτεσιανό» αναφέρεται στον Γάλλο φιλόσοφο και μαθηματικό René Descartes (1596-1650) του οποίου το λατινικό όνομα ήταν Cartesius. Του πιστώνεται (μαζί με τον Pierre de Fermat) η ανακάλυψη της αναλυτικής γεωμετρίας. Στο σπουδαίο του έργο *La Géométrie* ο Descartes χρησιμοποίησε τα γράμματα x, y, z για αγνώστους και a, b, c για σταθερές, μια σύμβαση που ακολουθείται έως σήμερα.

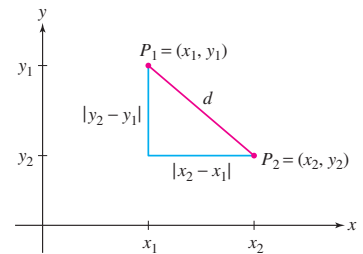


Σχήμα 10 Το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (α) και τα τέσσερα τεταρτημόρια (β)

Η απόσταση d μεταξύ δύο σημείων $P_1 = (x_1, y_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα. Στο Σχήμα 11 βλέπουμε ότι το $\overline{P_1 P_2}$ είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές $a = |x_2 - x_1|$ και $b = |y_2 - y_1|$. Ως εκ τούτου

$$d^2 = a^2 + b^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Ο τύπος της απόστασης προκύπτει παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες.



Σχήμα 11 Η απόσταση d δίνεται από τον τύπο της απόστασης

Τύπος της απόστασης Η απόσταση μεταξύ των σημείων $P_1 = (x_1, y_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2)$ είναι

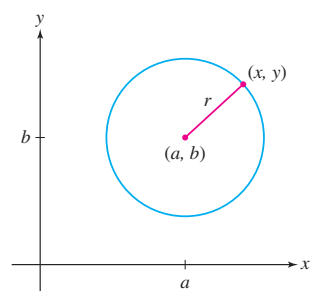
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Αφού έχουμε τον τύπο της απόστασης, μπορούμε να εξάγουμε την εξίσωση του κύκλου με ακτίνα r και κέντρο (a, b) (Σχήμα 12). Ένα σημείο (x, y) ανήκει σε αυτόν τον κύκλο αν η απόσταση από το (x, y) έως το (a, b) είναι r :

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Τετραγωνίζοντας και τα δύο μέλη προκύπτει η καθιερωμένη εξίσωση κύκλου ακτίνας r με κέντρο (a, b) :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Σχήμα 12 Κύκλος με εξίσωση $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Θα θυμηθούμε τώρα κάποιους ορισμούς και συμβολισμούς που αφορούν τις συναρτήσεις.

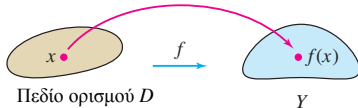
ΟΡΙΣΜΟΣ Μια **συνάρτηση** f από ένα σύνολο D σε ένα σύνολο Y είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο x στο D ένα μοναδικό στοιχείο $y = f(x)$ στο Y . Γράφουμε

$$f : D \rightarrow Y$$

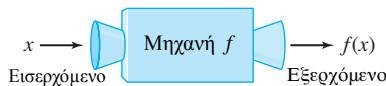
Το σύνολο D ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και αποτελεί το σύνολο των «επιτρεπόμενων ορισμάτων». Για κάποιο x στο D το $f(x)$ ονομάζεται **τιμή** της f στο x (Σχήμα 13). Το **πεδίο τιμών** R της συνάρτησης f είναι το υποσύνολο του Y που αποτελείται από όλες τις τιμές $f(x)$:

$$R = \{y \in Y : f(x) = y \text{ για κάποιο } x \in D\}$$

Ανεπίσημα, σκεφτόμαστε τη συνάρτηση f ως μια «μηχανή» η οποία παράγει ένα εξαγόμενο y για κάθε εισαγόμενο x στο πεδίο ορισμού D (Σχήμα 14).



Σχήμα 13 Μια συνάρτηση αντιπροσωπεύει ένα στοιχείο $f(x)$ στο Y σε κάθε $x \in D$



Σχήμα 14 Σκεφτείτε την f ως μια «μηχανή» που παίρνει το εισαγόμενο x και παράγει το εξαγόμενο $f(x)$

Μια συνάρτηση $f : D \rightarrow Y$ ονομάζεται επίσης **απεικόνιση**. Τα σύνολα D και Y μπορεί να είναι αυθαίρετα. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε μία απεικόνιση από το σύνολο των ζωντανών ανθρώπων στο σύνολο των φυσικών αριθμών αντιστοιχίζοντας κάθε άτομο στο έτος γεννήσεώς του. Το πεδίο τιμών αυτής της απεικόνισης είναι το σύνολο των ετών γέννησης των ζωντανών ατόμων. Στον Λογισμό πολλών μεταβλητών το πεδίο ορισμού θα μπορούσε να είναι ένα σύνολο σημείων στο διδιάστατο επίπεδο και το πεδίο τιμών ένα σύνολο αριθμών, σημείων ή διανυσμάτων.

Γράφοντας $y = f(x)$ για μια συνάρτηση f αναφερόμαστε στο x ως την **ανεξάρτητη μεταβλητή** και στο y ως την **εξαρτημένη μεταβλητή** (γιατί η τιμή της εξαρτάται από την επιλογή του x).

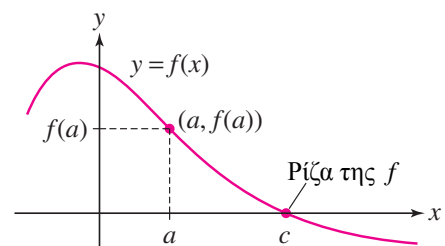
Το πρώτο μέρος αυτού του κειμένου ασχολείται με συναρτήσεις f όπου το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι σύνολα πραγματικών αριθμών. Όταν η f ορίζεται από έναν τύπο, το φυσικό πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x για τους οποίους ο τύπος έχει νόημα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9 - x}$ έχει πεδίο ορισμού $D = \{x : x \leq 9\}$ επειδή ορίζεται αν $9 - x \geq 0$.

Παρακάτω δίνονται κάποια άλλα παραδείγματα πεδίων ορισμού και συνόλων τιμών:

$f(x)$	Πεδίο ορισμού D	Σύνολο τιμών R
x^2	$\mathbf{R}$	$\{y : y \geq 0\}$
$\cos x$	$\mathbf{R}$	$\{y : -1 \leq y \leq 1\}$
$\frac{1}{x+1}$	$\{x : x \neq -1\}$	$\{y : y \neq 0\}$

Η **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης $y = f(x)$ προκύπτει σχεδιάζοντας τα σημεία $(a, f(a))$ για a στο πεδίο ορισμού D (Σχήμα 15). Αν ξεκινήσετε από $x = a$ στον άξονα x και μετακινηθείτε προς τα επάνω στη γραφική παράσταση και έπειτα προς τον άξονα y φθάνετε στην τιμή $f(a)$.

Το **σημείο μηδενισμού** ή η **ρίζα** μιας συνάρτησης είναι ένας αριθμός c τέτοιος ώστε $f(c) = 0$. Τα σημεία μηδενισμού είναι οι τιμές του x όπου η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x .



Σχήμα 15

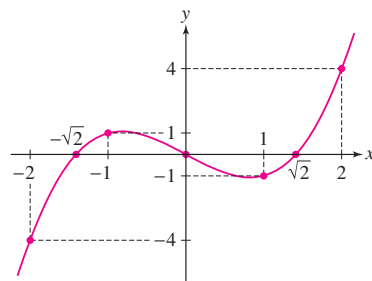
Στο Κεφάλαιο 4 θα χρησιμοποιήσουμε τον Λογισμό για να σχεδιάζουμε και να αναλύουμε γραφικές παραστάσεις. Σε αυτό το στάδιο, για να σχεδιάσουμε μια γραφική παράσταση με το χέρι μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν πίνακα με τιμές της συνάρτησης σχεδιάζοντας τα αντίστοιχα σημεία (συμπεριλαμβάνοντας τα σημεία μηδενισμού) και ενώνοντάς τα με μια ομαλή καμπύλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Να βρείτε τις ρίζες και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 2x$.

Λύση Αρχικά λύνουμε την εξίσωση $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0$. Οι ρίζες της f είναι $x = 0$ και $x = \pm\sqrt{2}$. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση, σχεδιάζουμε τις ρίζες και μερικές τιμές από τον Πίνακα 1 και τις ενώνουμε με μια καμπύλη (Σχήμα 16).

Πίνακας 1

x	$x^3 - 2x$
-2	-4
-1	1
0	0
1	-1
2	4



Σχήμα 16 Γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - 2x$

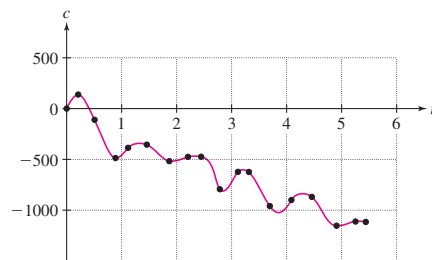
Οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στις εφαρμογές δεν δίνονται πάντα από τύπους. Τα δεδομένα που συλλέγονται από την παρατήρηση ή το πείραμα ορίζουν συναρτήσεις για τις οποίες ίσως να μην υπάρχει ακριβής τύπος. Τέτοιες συναρτήσεις μπορούν να εμφανιστούν είτε γραφικά είτε από έναν πίνακα τιμών. Για παράδειγμα, θεωρούμε τη μάζα του φύλλου πάγου της Γροιλανδίας (Σχήμα 17) το οποίο καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος του νησιού της Γροιλανδίας. Τα δεδομένα στον Πίνακα 2 και στο Σχήμα 18 συλλέχθηκαν από τον δορυφόρο GRACE (Global Recovery and Climate Experiment) της NASA και δείχνουν την αλλαγή στη μάζα του πάγου C ως συνάρτηση του χρόνου t από τις αρχές του 2012. (Σημειώστε, για παράδειγμα, ότι $t = 1.46$ σημαίνει 0.46 χρόνια μέσα στο 2013.) Για να σχεδιάσουμε αυτή τη συνάρτηση σχεδιάζουμε τα δεδομένα από τον πίνακα και ενώνουμε τα σημεία με μία ομαλή καμπύλη. Θα δούμε ότι πολλά από τα εργαλεία του Λογισμού μπορούν να εφαρμοστούν στις συναρτήσεις που δημιουργούνται από δεδομένα με αυτόν τον τρόπο.



Σχήμα 17 Το φύλλο πάγου της Γροιλανδίας

Πίνακας 2

Χρόνος (έτη από 1η Ιαν. 2012)	Μεταβολή της μάζας από 1η Ιαν. 2012 (σε gigatonnes)	Χρόνος (έτη από 1η Ιαν. 2012)	Μεταβολή της μάζας από 1η Ιαν. 2012 (σε gigatonnes)
0	0	2.79	-794.51
0.21	138.53	3.12	-623.4
0.54	-139.14	3.32	-624.41
0.89	-487.05	3.70	-960.08
1.12	-386.78	4.12	-899.86
1.46	-355.26	4.46	-869.46
1.87	-518.52	4.91	-1153.08
2.21	-475.14	5.25	-1110.29
2.45	-474.96	5.44	-1115.94



Σχήμα 18 Μεταβολή της μάζας του φύλλου πάγου της Γροιλανδίας