



Πρόλογος

Η 14Η ΕΚΔΟΣΗ του βιβλίου *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences* (IMA) συνεχίζει να προσφέρει τις μαθηματικές βάσεις για τους φοιτητές σε πολλούς τομείς και επίπεδα σπουδών, όπως φαίνεται από τον τίτλο του. Πώς ξεκίνησε στην 13η έκδοσή του, το βιβλίο περιλαμβάνει τρία μέρη: την Κολεγιακή Άλγεβρα (Κεφάλαια 0-4), τα Πεπερασμένα Μαθηματικά (Κεφάλαια 5-9) και τον Διαφορικό Λογισμό (Κεφάλαια 10-17).

Οι Σχολές που έχουν δύο ακαδημαϊκά εξάμηνα κάθε χρόνο έχουν την τάση να παρέχουν στους φοιτητές της Διοίκησης Επιχειρήσεων μία σειρά μαθημάτων που αφορούν τα Πεπερασμένα Μαθηματικά και μία σειρά μαθημάτων αφιερωμένη στον Διαφορικό Λογισμό. Γι' αυτές τις Σχολές προτείνουμε τα Κεφάλαια 0 έως 9 για την πρώτη σειρά μαθημάτων, αρχίζοντας όποτε το επιτρέπει η προετοιμασία των φοιτητών και τα Κεφάλαια 10 έως 17 για τη δεύτερη σειρά μαθημάτων, που περιλαμβάνει όσο επιτρέπει το υπόβαθρο των φοιτητών και όσο υπαγορεύουν οι ανάγκες τους.

Για τις Σχολές με τρία ακαδημαϊκά τρίμηνα ή τρία τετράμηνα κατ' έτος υπάρχουν μία σειρά από πιθανές χρήσεις αυτού του βιβλίου. Αν το πρόγραμμά τους επιτρέπει τρία τετράμηνα Μαθηματικά, η καλή προετοιμασία των φοιτητών της Διοίκησης επιχειρήσεων μπορεί να ξεκινήσει με μία πρώτη σειρά μαθημάτων σχετικά με τα Πεπερασμένα Μαθηματικά με το Κεφάλαιο 1 και να προχωρήσει με θέματα ενδιαφέροντος μέχρι το Κεφάλαιο 9. Σε αυτό το σενάριο μία δεύτερη σειρά μαθημάτων γύρω από τον Διαφορικό Λογισμό μπορεί να αρχίσει με το Κεφάλαιο 10 που αναφέρεται στα Όρια και τη Συνέχεια, και να ακολουθήσουν τρία Κεφάλαια παραγωγής, από το 11 μέχρι το 13 συμπεριλαμβανομένων. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να παραλειφθεί η Μέθοδος του Newton στην παράγραφο 12.6 χωρίς να χαθεί η συνέχεια, ενώ μερικοί καθηγητές μπορεί να προτιμούν να κάνουν επανάληψη στο Κεφάλαιο 4 που αφορά τις εκθετικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις πριν ασχοληθούν με τη μελέτη τους ως παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Τέλος, μία τρίτη σειρά μαθημάτων μπορεί να περιλαμβάνει τα Κεφάλαια 14 έως 17 που αφορά τον Ολοκληρωτικό Λογισμό με μία εισαγωγή στον Πολυμεταβλητό Διαφορικό Λογισμό. Υπόψη ότι το Κεφάλαιο 16 σίγουρα δεν είναι απαραίτητο για το Κεφάλαιο 17 και η Ενότητα 15.8 σχετικά με τα Γενικευμένα Ολοκληρώματα μπορεί χωρίς συνέπειες να παραλειφθεί αν δεν διδάχτεί το Κεφάλαιο 16.

Η μέθοδος

Το *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences* (IMA), *Εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση, για φοιτητές διοίκησης επιχειρήσεων*,

κοινωνικών και ανθρωπιστικών επιστημών, ακολουθεί μία μοναδική μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων. Όπως έγινε σε προηγούμενες εκδόσεις του βιβλίου αυτού, δίνουμε έμφαση στους αλγεβρικούς υπολογισμούς που κάνει το βιβλίο αυτό να ξεχωρίζει από άλλα εισαγωγικά βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Η διαδικασία υπολογισμού με μεταβλητές αυξάνει τις δεξιότητες στην κατασκευή μαθηματικών μοντέλων και ανοίγει τον δρόμο για να χρησιμοποιήσουν οι φοιτητές τον διαφορικό λογισμό. Ο αναγνώστης δεν θα συναντήσει την μέθοδο 'ορισμός, θεώρημα, απόδειξη' αλλά γίνεται μία επίμονη προσπάθεια να μεταδοθεί μία γνήσια μαθηματική αντιμετώπιση των εφαρμοσμένων προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, η προσέγγιση που ακολουθούμε μας οδηγεί να συμπεριλάβουμε ανεπίσημες αποδείξεις και γενικούς υπολογισμούς που διαφωτίζουν τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι αντίστοιχοι υπολογισμοί στα εφαρμοσμένα προβλήματα. Η έμφαση στην ανάπτυξη των αλγεβρικών δεξιοτήτων επεκτείνεται στις ασκήσεις πολλές από τις οποίες, ακόμη κι εκείνες που είναι βασικές, δίνονται με γενικό τρόπο παρά με αριθμητικούς συντελεστές.

Έχουμε βελτιώσει την οργάνωση του βιβλίου μας μετά από τόσες πολλές εκδόσεις ώστε να παρουσιάζουμε το περιεχόμενο με πολύ εύχρηστες ενότητες για άριστη διδασκαλία και μάθηση. Αναπόφευκτα η διαδικασία αυτή τείνει να δίνει 'βαρύτητα' σε ένα βιβλίο και η παρούσα έκδοση κάνει μία πολύ φιλότιμη προσπάθεια για να βελτιώσει το βιβλίο σε ένα βαθμό και σε σχέση με τα χαρακτηριστικά της σχεδίασης –γεγονός που κάνει πιο σαφή την προσέγγιση– και σε σχέση με το περιεχόμενο, αναγνωρίζοντας τις μεταβαλλόμενες παιδαγωγικές ανάγκες.

Αλλαγές στην 14η έκδοση

Συνεχίζουμε να κάνουμε τις στοιχειώδεις έννοιες των πρώτων Κεφαλαίων να ανοίγουν τον δρόμο για τη χρήση τους σε πιο ανώτερα θέματα. Για παράδειγμα, ενώ συζητάμε για την παραγοντοποίηση, ένα θέμα που πολλοί φοιτητές θεωρούν κάπως στρυφνό, τονίζουμε ότι η αρχή ' $ab = 0$ συνεπάγεται $a = 0$ ή $b = 0$ ', μαζί με την παραγοντοποίηση, μας δίνεται η δυνατότητα να χωρίσουμε κάποιες περίπλοκες εξισώσεις σε πολλές απλούστερες. Επισημαίνουμε ότι τα ποσοστά είναι απλώς αριθμοί με άλλη κλίμακα μέσω της 'ισότητας' $p\% = p/100$ έτσι ώστε στον Διαφορικό Λογισμό 'ο σχετικό ρυθμός μεταβολής' και 'ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής' να σχετίζονται με την 'ισότητα' $r = r \cdot 100\%$. Θεωρούμε ότι αυτή τη φορά, όταν θα συζητήσουμε τα αρνητικά επιτόκια, ακόμη κι αν σπάνια εφαρμοστεί. Είναι προτιμότερο να είμαστε απόλυτα ακριβείς σχετικά με απλές

έννοιες οι οποίες συχνά θεωρούνται δεδομένες. Στην πραγματικότητα, στα Χρηματοοικονομικά, στο Κεφάλαιο 5, συζητάμε ξεκάθαρα τα αρνητικά επιτόκια και θέτουμε το ρητορικό σε κάποιο βαθμό ερώτημα, γιατί οι τράπεζες δεν χρησιμοποιούν συνεχή ανατοκισμό (δεδομένου ότι για πολύ καιρό τώρα ο συνεχής ανατοκισμός μπορεί να απλουστεύσει στην πράξη τους υπολογισμούς αλλά και στη θεωρία).

Όποτε αυτό είναι δυνατό, έχουμε επιχειρήσει να εντάξουμε τις επιπλέον ιδέες που βρίσκονταν στο 'Διερευνώ και επεκτείνω' που έκλεινε τα Κεφάλαια στο κυρίως σώμα του κειμένου. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις για τον φορολογικό συντελεστή $t(i)$ και τον καταβληθέντα φόρο $T(i)$ εισοδήματος i , θεωρούνται αυτό που πραγματικά είναι: καθημερινά παραδείγματα ειδικά οριζόμενων συναρτήσεων. Θεωρούμε ότι στη διαδικασία της μάθησης των πολυωνύμων είναι χρήσιμο να συμπεριλάβουμε τη μέθοδο Homer για τον υπολογισμό τους, αφού ακόμη και με μία απλή αριθμομηχανή ο υπολογισμός γίνεται πολύ πιο γρήγορα. Ενώ ασχολούμαστε με τον γραμμικό προγραμματισμό, μερικές φορές μας βοηθάει να σκεφτούμε γραμμές και επίπεδα, κ.λπ. ως συντεταγμένες μόνο, και γι' αυτό συμπεριλαμβάνουμε μία άσκηση για να δείξουμε ότι αν μία γραμμή έχει (μη μηδενικές) συντεταγμένες x_0 και y_0 , τότε η εξίσωσή της δίνεται από την

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

και, επιπλέον, (για θετικές x_0 και y_0) αναζητούμε μία γεωμετρική ερμηνεία της ισοδύναμης εξίσωσης $y_0x + x_0y = x_0y_0$.

Όμως, επανερχόμενοι στην 'προσαρμογή' της προηγούμενης έκδοσης, ας αρχίσουμε με τον Γραμμικό Προγραμματισμό. Αυτό είναι σίγουρα ένα από τα πιο σημαντικά θέματα του βιβλίου για τους φοιτητές της Διοίκησης Επιχειρήσεων, Θεωρούμε τώρα ότι ενώ οι φοιτητές πρέπει να γνωρίζουν για την πιθανότητα των *Πολλών Βέλτιστων Λύσεων* και την *εκφύλιση* και τις *μη φραγμένες λύσεις*, δεν έχουν αρκετό χρόνο για να αφιερώσουν σε μία ολόκληρη, αν και μικρή, ενότητα σε κάθε μία από αυτές τις έννοιες. Οι υπόλοιπες ενότητες του Κεφαλαίου 7 είναι ήδη απαιτητικές και τώρα περιοριζόμαστε να παρέχουμε απλές επισημάνσεις σε αυτά τα ενδεχόμενα που εύκολα τα βλέπουμε με γεωμετρικό τρόπο. (Οι διαγραφείσες ενότητες έφεραν πάντα την ένδειξη 'προς παράλειψη').

Θεωρούμε, επίσης, ότι στον Ολοκληρωτικό Λογισμό, είναι πολύ πιο σημαντικό για τους φοιτητές των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών να είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση πινάκων για να υπολογίσουν ολοκληρώματα από ό,τι το να γνωρίζουν την *Ολοκλήρωση κατά μέρη* και τα *Μερικά Κλάσματα*. Στην ουσία αυτά τα θέματα, που προσφέρουν ατέλειωτη ευχαρίστηση σε μερικούς ως ψυχαγωγικά προβλήματα, δεν φαίνεται να ταιριάζουν ικανοποιητικά στο γενικό πλαίσιο της επίλυσης σοβαρών προβλημάτων. Είναι γεγονός ότι μία βασική λειτουργία (με την τεχνική έννοια) μπορεί εύκολα να μην έχει μια στοιχειώδη αντιπαράγωγο και μας δίνεται η εντύπωση ότι η Ολοκλήρωση κατά Μέρη δεν προχωρεί σε αρκετό βάθος για

να διασώσει αυτή τη δυσκολία ώστε να εγγυηθεί τον σημαντικό χρόνο που χρειάζεται για να μάθει κάποιος καλά αυτή την τεχνική. Δεδομένου ότι τα *Μερικά Κλάσματα* οδηγούν τελικά σε στοιχειώδεις αντιπαράγωγος για όλες τις *ρητές* συναρτήσεις, αποτελούν μέρος της επίλυσης ενός σοβαρού προβλήματος και μπορεί να αποτελέσει πειστικό επιχείρημα για να συμπεριληφθούν σε ένα εφαρμοσμένο εγχειρίδιο. Όμως, είναι άσκοπο να συμβεί αυτό χωρίς την συνάρτηση της αντίστροφης εφαπτομένης, με βάση μία παλιά σιωπηρή συμφωνία, ότι τα βιβλία εφαρμοσμένου διαφορικού λογισμού δεν πρέπει να μπαίνουν στα εδάφη της Τριγωνομετρίας.

Μετά την διαγραφή των εννοιών που αναφέραμε πιο πάνω, αναδιαρθρώσαμε την υπόλοιπη ύλη των 'κεφαλαίων της ολοκλήρωσης', του 14 και του 15, για να την ισορροπήσουμε πάλι. Το πρώτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού, ενώ το δεύτερο 'εφαρμόζεται' με πιο σωστό τρόπο. Θεωρούμε ότι το επίπονο Κεφάλαιο 17 έχει ωφεληθεί από την κατάργηση της *Σιωπηρής Μερικής Παραγωγής*, του *Αλυσιδωτού Κανόνα* για τη μερική παραγωγή και τις *Γραμμές Παλινδρόμησης*. Δεδομένου ότι ο *Πολυμεταβλητός Διαφορικός Λογισμός* είναι πάρα πολύ σημαντικός για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, ελπίζουμε ότι αυτό το πιο εύκολα διαχειρίσιμο Κεφάλαιο θα ενθαρρύνει τους διδάσκοντες να το συμπεριλάβουν στο διδακτικό οπλοστάσιό τους.

Παραδείγματα και ασκήσεις

Οι περισσότεροι διδάσκοντες και οι φοιτητές θα συμφωνήσουν ότι το κλειδί για ένα αποτελεσματικό εγχειρίδιο βρίσκεται στην ποιότητα και στην ποσότητα των παραδειγμάτων και των ομάδων ασκήσεων. Για τον σκοπό αυτό αναλύονται διεξοδικά περισσότερα από 850 παραδείγματα. Μερικά από αυτά τα παραδείγματα περιλαμβάνουν μία στρατηγική που λέγει σχεδιαστεί Να καθοδηγήσει τους φοιτητές διαμέσου των γενικών βημάτων της λύσης πριν από την εξεύρεση της συγκεκριμένης λύσης. (Βλέπε, για παράδειγμα, την Ενότητα 14.3 Παράδειγμα 4). Επιπλέον, παραθέτουμε ένα πολύ μεγάλο αριθμό διαγραμμάτων (περίπου 500) και ασκήσεων (πάνω από 5.000). Από τις ασκήσεις, το 20% περίπου έχουν επικαιροποιηθεί ή γραφτεί εξ ολοκλήρου από την αρχή. Σε κάθε ομάδα ασκήσεων δίνονται συνήθως ομαδοποιημένα προβλήματα κατά αύξουσα σειρά δυσκολίας. Στις περισσότερες ομάδες ασκήσεων τα προβλήματα κινούνται από τα βασικά μηχανικά εκπαιδευτικά προς τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα που υποκινούν τη σκέψη. Οι ασκήσεις που φέρουν χρωματιστή αριθμηση σχετίζονται με την εντολή 'Λύστε τώρα το Πρόβλημα N' και το παράδειγμα που αναφέρεται στην Ενότητα.

Με βάση την ανατροφοδότηση που έχουμε λάβει από αναγνώστες αυτού του βιβλίου, η πολυχρωμία των εφαρμογών που παρέχεται στις ομάδες ασκήσεων και στα παραδείγματα είναι σαφέστατα ένα θετικό στοιχείο αυτού του βιβλίου. Συμπεριλαμβάνονται πολλά πραγματικά εφαρμοσμένα προ-

βλήματα με ακριβή δεδομένα. Οι φοιτητές δεν χρειάζεται να προσπαθήσουν πολύ για να καταλάβουν πώς τα Μαθηματικά που μαθαίνουν εφαρμόζονται στην καθημερινή ζωή ή σε καταστάσεις που σχετίζονται με την δουλειά τους. Έχουν καταβληθεί πολλές προσπάθειες για την εξασφάλιση μιας σωστής ισορροπίας ανάμεσα στις εκπαιδευτικού χαρακτήρα ασκήσεις και τα προβλήματα που απαιτούν την ένταξη και την εφαρμογή των εννοιών που οι φοιτητές διδάχτηκαν.

Παιδαγωγικά και 'πρωτότυπα' χαρακτηριστικά

- **Εφαρμογές:** Σε ολόκληρο το βιβλίο υπάρχουν άφθονες και ποικίλες εφαρμογές για το στοχευόμενο ακροατήριο έτσι ώστε οι φοιτητές να βλέπουν συχνά πώς μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα Μαθηματικά που μαθαίνουν. Αυτές οι εφαρμογές καλύπτουν τόσο πολλούς τομείς όπως η Διοίκηση Επιχειρήσεων, τα Οικονομικά, η Βιολογία, η Ιατρική, η Κοινωνιολογία, η Ψυχολογία, η Οικολογία, η Στατιστική, η Γεωλογία και η Αρχαιολογία. Πολλές από αυτές τις εφαρμογές προκύπτουν από βιβλιογραφία και είναι τεκμηριωμένες αναφορές που προέρχονται μερικές φορές από το Διαδίκτυο. Σε μερικές εφαρμογές το υπόβαθρο και το πλαίσιο δίνονται για να τονωθεί το ενδιαφέρον. Όμως, το κείμενο είναι αυτόνομο υπό την έννοια ότι δεν υποθέτει καμία προηγούμενη επαφή με τις έννοιες στις οποίες βασίζονται οι εφαρμογές. (Βλέπε, για παράδειγμα, Κεφάλαιο 15, Ενότητα 7, Παράδειγμα 2).
- **Λύστε τώρα το Πρόβλημα N:** Σε ολόκληρο το βιβλίο έχουμε διατηρήσει το δημοφιλές 'Λύστε τώρα το Πρόβλημα N'. Το σκεπτικό έχει ως εξής: μετά από ένα λυμένο παράδειγμα, οι φοιτητές κατευθύνονται προς ένα πρόβλημα στο τέλος της Ενότητας (που φέρει χρωματιστό αριθμό άσκησης) όπου εμπεδώνονται οι ιδέες από το λυμένο παράδειγμα. Αυτό δίνει στους φοιτητές μία ευκαιρία να εξασκηθούν σε ό,τι έμαθαν πριν λίγο. Επειδή οι περισσότερες από αυτές τις ασκήσεις φέρουν περιττό αριθμό, οι φοιτητές μπορούν άμεσα να ελέγξουν την απάντησή τους στο τέλος του βιβλίου για να αξιολογήσουν τον βαθμό της κατανόησής τους. Οι πλήρεις λύσεις στις ασκήσεις με περιττή αριθμηση υπάρχουν στο Εγχειρίδιο Λύσεων για τον Φοιτητή.
- **Επισημάνσεις:** Οι επισημάνσεις παρουσιάζονται λίγο πολύ με τον ίδιο τρόπο που ένας καθηγητής θα προειδοποιούσε τους φοιτητές του μέσα στην αίθουσα σχετικά με τα λάθη που γίνονται συχνά. Αυτές εμφανίζονται στο περιθώριο μαζί με άλλες ερμηνευτικές σημειώσεις και σημεία έμφασης.
- **Ορισμοί, βασικές έννοιες και σημαντικοί κανόνες και μαθηματικοί τύποι:** Αυτά διατυπώνονται με σαφήνεια και παρουσιάζονται ως ένας τρόπος για να γίνει η περιήγηση στο βιβλίο πολύ πιο εύκολη για τον φοιτητή. (Βλέπε, για παράδειγμα, τον Ορισμό της παραγώγου στην Ενότητα 11.1).
- **Υλη για επανάληψη:** Κάθε Κεφάλαιο έχει μία Ενότητα επανάληψης στην οποία αναφέρεται ένας κατάλογος με σημαντικούς όρους και σύμβολα, μία περίληψη Κεφαλαίου

και πολλά επαναληπτικά προβλήματα. Επιπλέον, παρατίθενται βασικά παραδείγματα μαζί με κάθε ομάδα από σημαντικούς όρους και σύμβολα.

- **Ανισότητες και χαλαρές μεταβλητές:** Στην Ενότητα 1.2 όταν έγινε εισαγωγή στις ανισότητες, επισημάνσαμε ότι η $a \leq b$ είναι ισοδύναμη με τη φράση 'υπάρχει ένας μη αρνητικός αριθμός, s , για τον οποίο ισχύει $a + s = b$ '. Η ιδέα δεν είναι μία 'κρίσιμη', αλλά το παιδαγωγικό νόημα είναι ότι η *χαλαρή μεταβλητή*, που έχει κεντρικό ρόλο για την εφαρμογή του αλγορίθμου simplex στο Κεφάλαιο 7, πρέπει να είναι οικεία και να μην αποσπά την προσοχή από την μάλλον τεχνική ύλη στον γραμμικό προγραμματισμό.
- **Απόλυτη τιμή:** Συνηθίζεται να γράφουμε ότι $|a - b|$ παρέχει την απόσταση από το a μέχρι το b . Στο Παράδειγμα 4ε της Ενότητας 1.4 επισημαίνουμε ότι 'η x είναι μικρότερη από σ μονάδες από το μ ' μεταφράζεται ως $|x - \mu|$. Στην Ενότητα 1.4 αυτό είναι μία εφαρμογή του συμβόλου, όπως θα έπρεπε, αλλά η ουσία εδώ είναι ότι αργότερα (στο Κεφάλαιο 9) το μ θα είναι ο μέσος και το σ η τυπική απόκλιση μιας τυχαίας μεταβλητής. Επίσης έχουμε διαχωρίσει εκ των προτέρων μία απλή ιδέα από μία πιο προχωρημένη. Φυσικά το Πρόβλημα 12 από τα Προβλήματα 1.4 που ζητάει από τον φοιτητή να δημιουργήσει $|f(x) - L| < \epsilon$, έχει μια παρόμοια αποστολή στο Κεφάλαιο 19 που αναφέρεται στα όρια.
- **Γρήγορη χρήση του συμβόλου του αθροίσματος:** Το θέμα αυτό είναι απαραίτητο για τη μελέτη του ορισμένου ολοκληρώματος στο Κεφάλαιο 4, αλλά είναι *χρήσιμο* πολύ νωρίτερα. Επειδή είναι ένα σύμβολο που είναι τελείως καινούργιο για τους περισσότερους φοιτητές σε αυτή τη βαθμίδα, αλλά δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα σύμβολο, το παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 1. Χρησιμοποιώντας το όταν μας εξυπηρετεί, *πριν ασχοληθούμε με το ορισμένο ολοκλήρωμα*, δεν μας αποσπά την προσοχή από μία έννοια ουσίας.
- **Ενότητα 1.6 για τις ακολουθίες:** Αυτή η Ενότητα παρέχει πολλά παιδαγωγικά πλεονεκτήματα. Ο ορισμός διατυπώνεται με τρόπο που ανοίγει τον δρόμο για τον πιο σημαντικό και τον πιο βασικό ορισμό της συνάρτησης στο Κεφάλαιο 2. Αθροίζοντας τους όρους μιας ακολουθίας είμαστε σε θέση να εξασκηθούμε στη χρήση των συμβόλων αθροίσματος που εισαγάγαμε στην προηγούμενη Ενότητα. Το πλέον προφανές πλεονέκτημα όμως είναι ότι οι 'ακολουθίες' μας επιτρέπουν μία καλύτερη οργάνωση στην Ενότητα για τις ισόποσες καταβολές στο Κεφάλαιο 5. Και η παρούσα και η μελλοντική τιμή μιας ισόποσης καταβολής προκύπτουν με άθροιση (πεπερασμένων) γεωμετρικών ακολουθιών. Αργότερα στο κείμενο του βιβλίου οι ακολουθίες εμφανίζονται στον ορισμό του αριθμού e στο Κεφάλαιο 4, στις αλυσίδες Markov στο Κεφάλαιο 9 και στη μέθοδο του Newton στο Κεφάλαιο 12 έτσι ώστε να προκύψει μία χρήσιμη ενοποιητική αναφορά.

- **Άθροισμα μιας πεπερασμένης ακολουθίας:** Στην πορεία της άθροισης των όρων μιας πεπερασμένης ακολουθίας, είναι φυσικό να προκύψει η πιθανότητα άθροισης των όρων μιας άπειρης ακολουθίας. Αυτό είναι ένα περιβάλλον καθόλου απειλητικό στο οποίο να κάνουμε ένα πρώτο βήμα στον κόσμο των ορίων. Απλώς εξηγούμε πώς ορισμένες άπειρες γεωμετρικές ακολουθίες έχουν καλώς οριζόμενα αθροίσματα και διατυπώνουμε τα αποτελέσματα με ένα τρόπο που δημιουργεί ένα προθάλαμο για την εισαγωγή στα όρια στο Κεφάλαιο 10. Αυτά τα συγκεκριμένα άπειρα αθροίσματα μας επιτρέπουν να εισάγουμε την ιδέα του διηγετικού, πρώτα ανεπίσημα στην ενότητα για τις ακολουθίες και ύστερα με πιο αναλυτικό τρόπο σε μία χωριστή ενότητα στο Κεφάλαιο 5.
- **Ενότητα 2.8, Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών:** Η εισαγωγή σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών εμφανίζεται στο Κεφάλαιο 2 επειδή είναι ένα θέμα που θα έπρεπε να εμφανιστεί πολύ πριν τον Διαφορικό Λογισμό. Από τη στιγμή που θα έχουμε ασχοληθεί σε κάποιο βαθμό με τον Διαφορικό Λογισμό, υπάρχουν ιδιαίτεροι τρόποι να χρησιμοποιήσουμε τον Διαφορικό Λογισμό στη μελέτη των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, αλλά οι πτυχές αυτές δεν πρέπει να συγχέονται με τα βασικά που χρησιμοποιούμε σε ολόκληρο το βιβλίο. Για παράδειγμα, ένα “a-sub-n-angle-r” και “s-sub-nangle-r” που εξετάζουμε στα Μαθηματικά της Χρηματοοικονομικής στο Κεφάλαιο 5, είναι τέλειες συναρτήσεις δύο μεταβλητών και ο Γραμμικός Προγραμματισμός επιχειρεί να βελτιστοποιήσει γραμμικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως προς γραμμικούς περιορισμούς.
- **Ανάλυση εισροών-εκροών του Leontief στην Ενότητα 6.7:** Σε αυτή την Ενότητα έχουμε διαχωρίσει διάφορες πτυχές του ολικού προβλήματος. Αρχίζουμε περιγράφοντας αυτό που ονομάζουμε πίνακα A του Leontief ως μία κωδικοποίηση των σχέσεων εισροών και εκροών ανάμεσα σε τομείς της οικονομίας. Επειδή αυτός ο πίνακας συχνά μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι σταθερός για ένα σημαντικό χρονικό διάστημα, αρχίζουμε υποθέτοντας ότι ο A είναι δεδομένος. Το απλούστερο πρόβλημα είναι στη συνέχεια να προσδιορίσουμε την παραγωγή X που πρέπει να ικανοποιεί μία εξωτερική ζήτηση, D , για μία οικονομία της οποίας ο πίνακας Leontief είναι A . Παρέχουμε μία προσεκτική παρουσίαση αυτού ως την λύση της $(I-A)X = D$. Επειδή ο A μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι σταθερός ενώ ερευνάμε πολλές ζητήσεις, D , υπάρχει κάποια δικαιολογία για να υπολογίσουμε τον $(I-A)^{-1}$ έτσι ώστε να πάρουμε $X = (I-A)^{-1}D$. Όμως, η χρήση ενός ανεστραμμένου πίνακα δεν πρέπει να θεωρείται βασικό μέρος της λύσης. Τέλος, εξηγούμε πώς ο πίνακας Leontief μπορεί να προκύψει από ένα πίνακα δεδομένων που θα μπορούσε να έχει στη διάθεσή του ένας αρμόδιος σχεδιασμού.
- **Πιθανότητα γέννησης στην Ενότητα 8.4:** Αυτή είναι μία αντιμετώπιση του κλασικού προβλήματος του προσ-

διορισμού της πιθανότητας δύο τουλάχιστον άνθρωποι από n συνολικά να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα. Αν και αυτό το πρόβλημα δίνεται ως ένα παράδειγμα σε πολλά εγχειρίδια. Ο αναδρομικός μαθηματικός τύπος που δίνουμε για τον υπολογισμό της πιθανότητας ως συνάρτηση του n δεν είναι κοινό χαρακτηριστικό. Είναι λογικό να το συμπεριλάβουμε σε αυτό το βιβλίο επειδή οι αναδρομικά οριζόμενες ακολουθίες εμφανίζονται ρητώς στην Ενότητα 1.6.

- **Αλυσίδες Markov:** Παρατηρήσαμε ότι σημαντικά απλουστεύεται το πρόβλημα της εύρεσης των διανυσμάτων σταθερής κατάστασης αν γράψουμε τα διανύσματα κατάστασης ως στήλες παρά ως γραμμές. Αυτό καθιστά απαραίτητο ένας μεταβατικός πίνακας $T = [t_{ij}]$ να έχει ‘η πιθανότητα η επόμενη κατάσταση να είναι i δεδομένου ότι η τρέχουσα κατάσταση είναι j ’, αλλά αποφεύγει πολλές τεχνικές αναστροφές (transpositions).
- **Πίνακες προσήμου για μία συνάρτηση στο Κεφάλαιο 10:** Οι πίνακες προσήμου που παρουσιάσαμε στην 12η έκδοση τώρα εμφανίζονται στο Κεφάλαιο 10. Ένα σημείο που πρέπει να τονίσουμε είναι ότι οι πίνακες αυτοί μπορούν να κατασκευαστούν για οποιαδήποτε συνάρτηση με πραγματικές τιμές μιας πραγματικής μεταβλητής και η βοήθειά τους στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αρχίζει πριν την εισαγωγή των παραγώγων. Φυσικά συνεχίζουμε να εκμεταλλευόμαστε τη χρήση τους στο Κεφάλαιο 13, ‘Κατασκευή γραφικής παράστασης μιας καμπύλης’ όπου για κάθε συνάρτηση f προτείνουμε την κατάρτιση ενός πίνακα προσήμου για την f , την f' και την f'' , που ερμηνεύεται για την f . Όταν αυτό είναι δυνατό να συμβεί, η γραφική παράσταση της συνάρτησης γίνεται σχεδόν αυταπόδεικτη. Εύκολα αναγνωρίζουμε ότι αυτή είναι μία τεχνική του μαυροπίνακα που χρησιμοποιούν πολλοί καθηγητές, αλλά εμφανίζεται πολύ σπάνια στα εγχειρίδια.

Συμπληρώματα

- **MyLab Math Online Course** (απαιτείται κωδικός πρόσβασης): Το κορυφαίο σε πωλήσεις πρόγραμμα MyLab™ Math, που έχει δημιουργηθεί πάνω σε βάσεις του Οίκου Pearson είναι ένα διαδικτυακό πρόγραμμα μελέτης κατ'οίκον, διδασκαλίας και βαθμολόγησης είναι ένα πρόγραμμα που σχεδιάστηκε για τη συνεργασία με αυτό το βιβλίο για να βοηθήσει τους φοιτητές και να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους. Το πρόγραμμα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία σε οποιοδήποτε περιβάλλον διδασκαλίας, όπως το περιβάλλον σεμιναρίου, το υβριδικό, το πλήρως διαδικτυακό ή το παραδοσιακό. Καλύπτοντας τις ανάγκες του καθηγητή και του φοιτητή το πρόγραμμα αυτό βελτιώνει την μάθηση του φοιτητή. Χρησιμοποιείται παγκοσμίως από περισσότερα από 37 εκατομμύρια φοιτητές και παρέχει συστηματικά, μετρήσιμα οφέλη στην μάθηση των φοιτητών, στην διατήρηση γνώσεων και στην επιτυχία τους σε μετέπειτα μαθήματα. Για περισσότερες πληροφορίες επισκεφθείτε τη διεύθυνση www.mymathlab.com/results.

- Το **Student Solutions Manual** περιλαμβάνει λύσεις για όλα τα προβλήματα με περιττή αρίθμηση, ISBN 0-134-77040-4 / 978-0-134-77040-6

Αυτά τα συμπληρώματα καθηγητών είναι διαθέσιμα για ‘κατέβασμα’ από μία ενότητα προστατευόμενη με κωδικό του διαδικτυακού καταλόγου του Οίκου Pearson Canada (catalogue.pearsoned.ca). Επισκεφθείτε την σελίδα καταλόγου του βιβλίου σας για να δείτε ένα κατάλογο των διαθέσιμων συμπληρωμάτων. Επικοινωνήστε με τον εκπρόσωπο πωλήσεων της Pearson στην περιοχή σας για λεπτομέρειες και πρόσβαση.

- Το **Instructor’s Solution Manual** περιέχει τις λύσεις όλων των προβλημάτων, ακόμη και όσων αναφέρονται με την ένδειξη *Εφαρμογή*. Μπορείτε να το ‘κατεβάσετε’ κατέβασμα’ από μία ενότητα προστατευόμενη με κωδικό του διαδικτυακού καταλόγου του Οίκου Pearson Canada (catalogue.pearsoned.ca).

- **Computerized Test Bank.** Μηχανογραφημένες τράπεζες τεστ του Οίκου Pearson δίνουν τη δυνατότητα στους καθηγητές να φιλτράρουν και να επιλέξουν ερωτήσεις για να δημιουργούν κουίζ, τεστ ή εργασίες για το σπίτι. Οι καθηγητές μπορούν να τροποποιήσουν ερωτήματα ή να προσθέσουν δικά τους και μπορεί να επιλέξουν την έντυπη μορφή ή την διαδικτυακή μορφή. Οι ερωτήσεις αυτές είναι διαθέσιμες και σε μορφή Microsoft Word.

- **PowerPoint® Lecture Slides.** Η διάλεξη μάθημα-μάθημα του PowerPoint με διαφάνειες περιλαμβάνει βασικές έννοιες, εξισώσεις και λυμένα παραδείγματα από το βιβλίο.

- **Learning Solutions Managers.** Το πρόγραμμα αυτό συνεργάζεται με τους καθηγητές και τους υπεύθυνους κατάρτισης προγράμματος πανεπιστημίου για να διασφαλίσουν ότι τα τεχνολογικά προϊόντα του Οίκου Pearson, τα εργαλεία αξιολόγησης και το υλικό διαδικτυακής διδασκαλίας είναι προσαρμοσμένο έτσι που να ταιριάζει στις δικές σας ανάγκες. Αυτή η πολύ πεπειραμένη ομάδα είναι αφοσιωμένη στο να βοηθήσει τις Σχολές να αξιοποιήσουν πλήρως ένα ευρύ φάσμα εκπαιδευτικών πόρων βοηθώντας στην ενοποίηση μιας ποικιλίας διδακτικού υλικού και μορφών μέσων. Ο εκπρόσωπος πωλήσεων του Οίκου Pearson στην περιοχή σας μπορεί να σας δώσει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτό το πρόγραμμα υπηρεσιών.

- **Pearson eText.** Το Pearson eText δίνει στους φοιτητές πρόσβαση στο εγχειρίδιό τους ανά πάσα στιγμή και οπουδήποτε. Εκτός από το κράτημα σημειώσεων, τις υπογραμμίσεις και την τοποθέτηση ‘σελιδοδείκτη’, το Pearson eText διαθέτει διαδραστικά και από κοινού αξιοποίησης χαρακτηριστικά. Οι καθηγητές μπορούν να μοιραστούν τα σχόλιά τους ή τις επισημάνσεις τους και οι φοιτητές μπορούν να προσθέσουν τις δικές τους, δημιουργώντας έτσι μία καλά δεμένη κοινότητα εκπαιδευομένων μέσα στην τάξη τους.

Ευχαριστίες

Εκφράζουμε την εκτίμησή μας στους παρακάτω συναδέλφους οι οποίοι συνεισέφεραν σχόλια και προτάσεις που ήταν πολύτιμες για να αναπτύξουμε αυτό το κείμενο. (Οι καθηγητές των οποίων το όνομα σημειώνεται με αστερίσκο διάβασαν την 14η έκδοση).

E. Adibi, *Chapman University*
 R. M. Alliston, *Pennsylvania State University*
 R. A. Alo, *University of Houston*
 K. T. Andrews, *Oakland University*
 M. N. de Arce, *University of Puerto Rico*
 E. Barbut, *University of Idaho*
 G. R. Bates, *Western Illinois University*
 * S. Beck, *Navarro College*
 D. E. Bennett, *Murray State University*
 C. Bennett, *Harper College*
 A. Bishop, *Western Illinois University*
 P. Blau, *Shawnee State University*
 R. Blute, *University of Ottawa*
 S. A. Book, *California State University*
 A. Brink, *St. Cloud State University*
 R. Brown, *York University*
 R. W. Brown, *University of Alaska*
 S. D. Bulman-Fleming, *Wilfrid Laurier University*
 D. Calvetti, *National College*
 D. Cameron, *University of Akron*
 K. S. Chung, *Kapiolani Community College*
 D. N. Clark, *University of Georgia*
 E. L. Cohen, *University of Ottawa*
 J. Dawson, *Pennsylvania State University*
 A. Dollins, *Pennsylvania State University*
 T. J. Duda, *Columbus State Community College*
 G. A. Earles, *St. Cloud State University*
 B. H. Edwards, *University of Florida*
 J. R. Elliott, *Wilfrid Laurier University*
 J. Fitzpatrick, *University of Texas at El Paso*
 M. J. Flynn, *Rhode Island Junior College*
 G. J. Fuentes, *University of Maine*
 L. Gerber, *St. John’s University*
 T. G. Goedde, *The University of Findlay*
 S. K. Goel, *Valdosta State University*
 G. Goff, *Oklahoma State University*
 J. Goldman, *DePaul University*
 E. Greenwood, *Tarrant County College, Northwest Campus*
 J. T. Gresser, *Bowling Green State University*
 L. Griff, *Pennsylvania State University*
 R. Grinnell, *University of Toronto at Scarborough*
 F. H. Hall, *Pennsylvania State University*
 V. E. Hanks, *Western Kentucky University*
 * T. Harriott, *Mount Saint Vincent University*
 R. C. Heitmann, *The University of Texas at Austin*
 J. N. Henry, *California State University*
 W. U. Hodgson, *West Chester State College*

- * J. Hooper, *Acadia University*
 B. C. Horne, Jr., *Virginia Polytechnic Institute and State University*
 J. Hradnansky, *Pennsylvania State University*
 P. Huneke, *The Ohio State University*
 C. Hurd, *Pennsylvania State University*
 J. A. Jiminez, *Pennsylvania State University*
 * T. H. Jones, *Bishop's University*
 W. C. Jones, *Western Kentucky University*
 R. M. King, *Gettysburg College*
 M. M. Kostreva, *University of Maine*
 G. A. Kraus, *Gannon University*
 J. Kucera, *Washington State University*
 M. R. Latina, *Rhode Island Junior College*
 L. N. Laughlin, *University of Alaska, Fairbanks*
 P. Lockwood-Cooke, *West Texas A&M University*
 J. F. Longman, *Villanova University*
 * F. MacWilliam, *Algoma University*
 I. Marshak, *Loyola University of Chicago*
 D. Mason, *Elmhurst College*
 * B. Matheson, *University of Waterloo*
 F. B. Mayer, *Mt. San Antonio College*
 P. McDougale, *University of Miami*
 F. Miles, *California State University*
 E. Mohnike, *Mt. San Antonio College*
 C. Monk, *University of Richmond*
 R. A. Moreland, *Texas Tech University*
 J. G. Morris, *University of Wisconsin-Madison*
 J. C. Moss, *Paducah Community College*
 D. Mullin, *Pennsylvania State University*
 E. Nelson, *Pennsylvania State University*
 S. A. Nett, *Western Illinois University*
 R. H. Oehmke, *University of Iowa*
 Y. Y. Oh, *Pennsylvania State University*
 J. U. Overall, *University of La Verne*
 * K. Pace, *Tarrant County College*
 A. Panayides, *William Patterson University*
 D. Parker, *University of Pacific*
 N. B. Patterson, *Pennsylvania State University*
 V. Pedwaydon, *Lawrence Technical University*
 E. Pemberton, *Wilfrid Laurier University*
 M. Perkel, *Wright State University*
 D. B. Priest, *Harding College*
 J. R. Provencio, *University of Texas*
 L. R. Pulsinelli, *Western Kentucky University*
 M. Racine, *University of Ottawa*
 * B. Reed, *Navarro College*
 N. M. Rice, *Queen's University*
 A. Santiago, *University of Puerto Rico*
 J. R. Schaefer, *University of Wisconsin-Milwaukee*
 S. Sehgal, *The Ohio State University*
 W. H. Seybold, Jr., *West Chester State College*
 * Y. Shibuya, *San Francisco State University*
 G. Shilling, *The University of Texas at Arlington*
 S. Singh, *Pennsylvania State University*
 L. Small, *Los Angeles Pierce College*
 E. Smet, *Huron College*
 J. Stein, *California State University, Long Beach*
 M. Stoll, *University of South Carolina*
 T. S. Sullivan, *Southern Illinois University Edwardsville*
 E. A. Terry, *St. Joseph's University*
 A. Tierman, *Saginaw Valley State University*
 B. Toole, *University of Maine*
 J. W. Toole, *University of Maine*
 * M. Torres, *Athabasca University*
 D. H. Trahan, *Naval Postgraduate School*
 J. P. Tull, *The Ohio State University*
 L. O. Vaughan, Jr., *University of Alabama in Birmingham*
 L. A. Vercoe, *Pennsylvania State University*
 M. Vuilleumier, *The Ohio State University*
 B. K. Waits, *The Ohio State University*
 A. Walton, *Virginia Polytechnic Institute and State University*
 H. Walum, *The Ohio State University*
 E. T. H. Wang, *Wilfrid Laurier University*
 A. J. Weidner, *Pennsylvania State University*
 L. Weiss, *Pennsylvania State University*
 N. A. Weigmann, *California State University*
 S. K. Wong, *Ohio State University*
 G. Woods, *The Ohio State University*
 C. R. B. Wright, *University of Oregon*
 C. Wu, *University of Wisconsin-Milwaukee*
 B. F. Wyman, *The Ohio State University*
 D. Zhang, *Washington State University*

Μερικές ασκήσεις έχουν ληφθεί από ένθετα με προβλήματα που χρησιμοποίησαν φοιτητές στο Wilfrid Laurier University. Θα θέλαμε να εκφράσουμε τις ευχαριστίες μας στο Τμήμα Μαθηματικών του Wilfrid Laurier University που έδωσε την άδεια στον Οίκο Prentice Hall να χρησιμοποιήσει και να εκδώσει αυτό το υλικό καθώς και τον Οίκο Prentice Hall ο οποίος με τη σειρά του μας επέτρεψε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το υλικό.

Για μια ακόμη φορά εκφράζουμε την ειλικρινή ευγνωμοσύνη μας στο διδακτικό προσωπικό και στους συντονιστές του προγράμματος σπουδών του Ohio State University και του Columbia State University που ενδιαφέρθηκαν πραγματικά γι' αυτή και άλλες εκδόσεις, προσφέροντας μια σειρά από ανεκτίμητες εισηγήσεις.

Ξεχωριστές ευχαριστίες οφείλουμε στη MPS North America, LLC για την προσεκτική εργασία τους για τα εγχειρίδια των λύσεων. Η δουλειά τους ήταν ιδιαίτερα αναλυτική και χρήσιμη σε εμάς. Επίσης εκτιμάμε την φροντίδα που κατέβαλαν για τον έλεγχο του κειμένου και την ακρίβεια των ασκήσεων.

Ernest F. Haeussler, Jr.
 Richard S. Paul
 Richard J. Wood

ΜΕΡΟΣ Ι
Βασική Άλγεβρα





Ο

Επανάληψη της Άλγεβρας

- 0.1 Σύνολα πραγματικών αριθμών
- 0.2 Μερικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών
- 0.3 Δυνάμεις και ρίζες
- 0.4 Πράξεις με αλγεβρικές εκφράσεις
- 0.5 Παραγοντοποίηση
- 0.6 Κλάσματα
- 0.7 Εξισώσεις, και πιο συγκεκριμένα γραμμικές εξισώσεις
- 0.8 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0 Επανάληψη

Η LESLEY GRIFFITH εργαζόταν σε μία εταιρεία που κατασκεύαζε ιστιοφόρα με έδρα στις Αντίμπες της Γαλλίας. Συχνά έπρεπε να ελέγχει τις αποδείξεις εισπραξης όπου αναγράφονταν μόνο το συνολικά καταβληθέν ποσό και στη συνέχεια να υπολογίσει ποιο ποσό από το συνολικό ήταν ο «φόρος προστιθέμενης αξίας» που ίσχυε στη Γαλλία. Ο φόρος αυτός ήταν γνωστός ως TVA που προκύπτει από τα αρχικά των σχετικών γαλλικών λέξεων. Ο ΦΠΑ στη Γαλλία ήταν 19,6% (αλλά τον Ιανουάριο του 2014 έγινε 20%). Πολλές από τις δουλειές της Lesley προέρχονταν από Ιταλούς προμηθευτές και αγοραστές και γι' αυτό έπρεπε να ασχοληθεί με το παρόμοιο πρόβλημα των αποδείξεων εισπραξης οι οποίες εμπεριείχαν τον φόρο επί των πωλήσεων που ίσχυε στην Ιταλία και ήταν 18% (ενώ σήμερα είναι 22%).

Ένα τέτοιο πρόβλημα απαιτεί την ύπαρξη ενός μαθηματικού τύπου έτσι ώστε ο χρήστης να μπορεί να εισάγει ένα φορολογικό συντελεστή, π.χ. το 19,6% ή το 22% που να ταιριάζει σε συγκεκριμένο τόπο και

χρόνο, αλλά είναι πολλοί αυτοί που μπορούν να διαχειριστούν μία συγκεκριμένη περίπτωση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους αριθμούς, χωρίς να γνωρίζουν τον μαθηματικό τύπο. Συνεπώς, αν η Lesley είχε μια απόδειξη εισπραξης 200 ευρώ, μπορεί να είχε σκεφτεί ως εξής: Αν το αντικείμενο κόστιζε 100 ευρώ πριν από τον φόρο, τότε το συνολικό εισπραχθέν ποσό θα ήταν 119 ευρώ όταν ο φόρος είναι 19,6 και συνεπώς ο φόρος που εμπεριέχεται σε μια συνολική εισπραξη 200 ευρώ είναι επί του 200 όπως είναι ο φόρος 19,6 επί του 119,6. Ή, για να το διατυπώσουμε αυτό με μαθηματικό τρόπο:

$$\frac{\text{Φόρος επί του 200}}{200} = \frac{19,6}{119,6} \approx 0,164 = 16,4\%$$

Αν ο συλλογισμός της Lesley είναι σωστός, τότε το ποσό του ΦΠΑ σε μία απόδειξη εισπραξης των 200 ευρώ είναι περίπου το 16,4% των 200 ευρώ, δηλαδή 32,8 ευρώ. Στην ουσία πολλοί θα μαντέψουν τώρα ότι ο μαθηματικός τύπος

$$\text{Φόρος που εμπεριέχεται στο } R = R \left(\frac{p}{100 + p} \right)$$

δίνει τον φόρο που εμπεριέχεται σε μια απόδειξη εισπραξης R , όταν ο φορολογικός συντελεστής είναι $p\%$. Επομένως, αν η Lesley ήταν σίγουρη για τον συλλογισμό της, θα μπορούσε να πολλαπλασιάσει το ποσό της απόδειξης συναλλαγής με τους Ιταλούς επί 18/118 για να υπολογίσει το ποσό του φόρου που εμπεριείχε.

Φυσικά, οι περισσότεροι άνθρωποι δεν θυμούνται μαθηματικούς τύπους για πολύ καιρό και νιώθουν άβολα να στηρίζουν ένα χρηματικό υπολογισμό σε κάποια υπόθεση σαν κι αυτή που διατυπώσαμε με πλάγια γράμματα πιο πάνω. Υπάρχουν πολλές σχέσεις που είναι πολύ πιο περίπλοκες από μια απλή αναλογική σχέση! Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να κάνει μία ανασκόπηση της Άλγεβρας που είναι απαραίτητη για να κατασκευάζετε τους δικούς σας μαθηματικούς τύπους, με σιγουριά, ανάλογα με τις ανάγκες σας. Ειδικότερα, θα εξάγουμε τον μαθηματικό τύπο

της Lesley με βάση αρχές που γνωρίζουμε όλοι. Χρήση της Άλγεβρας γίνεται σε ολόκληρο αυτό το βιβλίο στη σειρά μαθημάτων που αφορούν την πραγματοποίηση γενικών υπολογισμών με μεταβλητές ποσότητες.

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα επαναλάβουμε τους πραγματικούς αριθμούς και τις αλγεβρικές εκφράσεις καθώς και τις βασικές με αυτούς πράξεις. Το Κεφάλαιο έχει σχεδιαστεί να προσφέρει μία σύντομη ανακεφαλαίωση κάποιων όρων και μεθόδων υπολογισμού με σύμβολα. Πιθανόν να έχετε ξαναδεί ήδη την περισσότερη από αυτή την ύλη. Όμως, επειδή αυτά τα θέματα είναι σημαντικά για τον χειρισμό των Μαθηματικών που θα ακολουθήσουν, μία άμεση δεύτερη επαφή με αυτά μπορεί να είναι χρήσιμη. Αφιερώστε όσο χρόνο κρίνετε απαραίτητο στις ενότητες που πρέπει να επαναλάβετε.

0.1 Σύνοδα πραγματικών αριθμών

Σύνολο είναι μία συλλογή αντικειμένων. Για παράδειγμα, μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των άρτιων αριθμών που βρίσκονται ανάμεσα στο 5 και το 11, δηλαδή το 6, το 8 και το 10. Ένα αντικείμενο που ανήκει σε κάποιο σύνολο ονομάζεται **στοιχείο** αυτού του συνόλου. Αν αυτό ακούγεται κάπως περίπλοκο, μην ανησυχείτε. Οι λέξεις *σύνολο* και *στοιχείο* είναι όπως η *γραμμή* και το *σημείο* στη Γεωμετρία. Δεν μπορούμε να τις ορίσουμε με πιο απλό τρόπο.

Μόνο με την εξάσκηση μέσα από τη χρήση τους μπορούμε να καταλάβουμε το νόημά τους. Η κατάσταση αυτή μοιάζει επίσης με τον τρόπο που ένα παιδί μαθαίνει την μητρική του γλώσσα. Χωρίς να γνωρίζει καμία λέξη το παιδί συνάγει τη σημασία μερικών πολύ απλών λέξεων κοιτάζοντας και ακούγοντας ένα γονέα και τελικά χρησιμοποιεί αυτές τις πολύ λίγες λέξεις για να αποκτήσει ένα λεξιλόγιο εργασίας. Κανείς από εμάς δεν χρειάζεται να καταλάβει τον μηχανισμό αυτής της διαδικασίας για να μάθει να μιλάει. Με τον ίδιο τρόπο είναι δυνατό να μάθετε πρακτικά Μαθηματικά χωρίς να εμπλακείτε στο θέμα των αρχικών όρων στους οποίους δεν έχει δοθεί κάποιος ορισμός.

Ένας τρόπος εξειδίκευσης ενός συνόλου είναι η αναφορά των στοιχείων του, με οποιαδήποτε σειρά, ανάμεσα σε άγκιστρα. Για παράδειγμα, το πιο πάνω σύνολο που αναφέραμε είναι το $\{6, 8, 10\}$ και το οποίο μπορούμε να συμβολίσουμε με ένα γράμμα όπως το A , γεγονός που μας επιτρέπει να γράψουμε $A = \{6, 8, 10\}$. Υπόψη ότι το $\{6, 8, 10\}$ συμβολίζει το ίδιο σύνολο όπως και το $\{6, 8, 10, 10\}$. Ένα σύνολο προσδιορίζεται από τα στοιχεία του και καμία αναδιάταξη ούτε επανάληψη μιας αναφοράς δεν επηρεάζει το σύνολο. Ένα σύνολο A λέμε ότι είναι υποσύνολο του συνόλου B όταν και μόνον όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Για παράδειγμα, αν $A = \{6, 8, 10\}$ και $B = \{6, 8, 10, 12\}$, τότε το A είναι υποσύνολο του B , αλλά το B δεν είναι υποσύνολο του A . Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει καθόλου στοιχεία. Ονομάζεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\emptyset$.

Ορισμένα σύνολα αριθμών έχουν ειδικά ονόματα. Οι αριθμοί 1, 2, 3 και ούτω καθεξής σχηματίζουν το σύνολο των **θετικών ακεραίων**:

$$\text{Σύνολο θετικών ακεραίων} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Οι τρεις κουκίδες είναι ένας ανεπίσημος τρόπος να δηλώσουμε ότι η αναφορά των στοιχείων δεν έχει τέλος και ο αναγνώστης αναμένεται να δημιουργήσει όσα στοιχεία χρειάζεται από αυτό το μοτίβο.

Οι θετικοί ακέραιοι (positive integers) μαζί με το 0 και οι **αρνητικοί ακέραιοι** $-1, -2, -3, \dots$ σχηματίζουν το σύνολο των **ακεραίων**:

$$\text{Σύνολο των ακεραίων} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Ο λόγος που πρέπει να ισχύει $q \neq 0$ είναι ότι δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν.

$\frac{p}{q}$ όπου p και q είναι ακέραιοι και $q \neq 0$. (Το σύμβολο $\neq$ διαβάζεται ‘διάφορο του’). Για παράδειγμα, οι αριθμοί $\frac{19}{20}$, $-\frac{2}{7}$, και $-\frac{6}{2}$ είναι ρητοί. Υπογραμμίζουμε ότι ο $\frac{2}{4}$, ο $\frac{1}{2}$, ο $\frac{3}{6}$, ο $\frac{4}{8}$, 0,5 και το 50% συμβολίζουν τον ίδιο ρητό αριθμό. Ο ακέραιος 2 είναι ρητός, αφού $2 = \frac{2}{1}$. Στην ουσία κάθε ακέραιος είναι ρητός.

Κάθε ακέραιος είναι ρητός αριθμός.

Όλους τους ρητούς αριθμούς μπορούμε να τους παραστήσουμε με δεκαδικούς αριθμούς που είναι *περατούμενοι* (terminate), όπως ο $\frac{3}{4} = 0,75$ και ο $\frac{3}{2} = 1,5$ ή *μη περατούμενοι* (indeterminate), *περιοδικοί* (repeated) δεκαδικοί αριθμοί (που αποτελούνται από

Στόχος

Να εξοικειωθείτε με τα σύνολα και ειδικότερα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών και τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

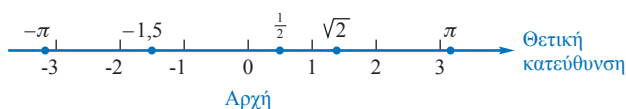
Κάθε ρητός αριθμός είναι πραγματικός αριθμός.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών περιλαμβάνει όλους τους δεκαδικούς αριθμούς.

μία ομάδα ψηφίων που επαναλαμβάνεται επ' άπειρον) όπως ο $\frac{2}{3} = 0,666\dots$, ο $\frac{-4}{11} = -0,3636\dots$ και ο $\frac{2}{15} = 0,1333\dots$. Οι αριθμοί που συμβολίζονται από μη περατούμενους, μη περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς ονομάζονται **άρρητοι αριθμοί (irrational numbers)**. Ο άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ως ένας ακέραιος διαιρεμένος με έναν ακέραιο. Οι αριθμοί π και $\sqrt{2}$ είναι παραδείγματα άρρητων αριθμών. Οι ρητοί αριθμοί μαζί με τους άρρητους σχηματίζουν το σύνολο των **πραγματικών αριθμών (real numbers)**.

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να συμβολιστούν με σημεία που βρίσκονται πάνω σε μία γραμμή. Αρχικά επιλέγουμε ένα σημείο πάνω στη γραμμή που να συμβολίζει το μηδέν. Το σημείο αυτό ονομάζεται *αρχή*. (Βλέπε Σχήμα 0.1) Στη συνέχεια επιλέγουμε ένα ενιαίο μέτρο της απόστασης, που ονομάζεται *μοναδιαία απόσταση*, και σημειώνουμε αυτή την απόσταση πρώτα προς τα δεξιά και ύστερα προς τα αριστερά της αρχής. Σε κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στην γραμμή αντιστοιχίζουμε μία συγκεκριμένη απόσταση, που εξαρτάται από τη θέση του σημείου σε σχέση με την αρχή.

Μερικά σημεία και οι συντεταγμένες τους



Σχήμα 0.1 Η γραμμή των πραγματικών αριθμών.

Οι θέσεις που βρίσκονται στα δεξιά της αρχής θεωρούνται θετικές (+) και οι θέσεις που βρίσκονται στα αριστερά είναι αρνητικές (-). Για παράδειγμα, με το σημείο $\frac{1}{2}$ δεξιά της αρχής αντιστοιχεί ο αριθμός $\frac{1}{2}$, που ονομάζεται **συντεταγμένη** αυτού του σημείου. Ομοίως, η συντεταγμένη του σημείου 1,5 στα αριστερά της αρχής είναι -1,5. Στο Σχήμα 0.1 έχουμε σημειώσει τις συντεταγμένες μερικών σημείων. Το βέλος δείχνει ότι η διεύθυνση στα δεξιά κατά μήκος της γραμμής θεωρείται ως θετική διεύθυνση.

Σε κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στη γραμμή αντιστοιχεί ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός και σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο της γραμμής. Υπάρχει μία *αντιστοιχία ένα προς ένα* ανάμεσα στα σημεία της γραμμής και τους πραγματικούς αριθμούς. Μία τέτοια γραμμή στην οποία έχουμε σημειώσει τις συντεταγμένες την ονομάζουμε **γραμμή των πραγματικών αριθμών**. Τους πραγματικούς αριθμούς τους θεωρούμε σημεία πάνω σε μία γραμμή των πραγματικών αριθμών και αντίστροφα.

Παράδειγμα 1 Εντοπίζοντας τα είδη των πραγματικών αριθμών

Ο αριθμός $0,151515\dots$ είναι όντως άρρητος αριθμός;

Λύση: Οι κουκίδες που υπάρχουν στον αριθμό $0,151515\dots$ θεωρούμε ότι δείχνουν την επανάληψη των ψηφίων «15». Ως άρρητους αριθμούς ορίσαμε τους πραγματικούς αριθμούς που συμβολίζονται με ένα *μη τερματιζόμενο, μη περιοδικό δεκαδικό* και συνεπώς ο $0,151515\dots$ δεν είναι άρρητος. Επομένως είναι ρητός αριθμός. Δεν είναι άμεσα φανερό πώς συμβολίζεται ο $0,151515\dots$ με ένα κλάσμα ακεραίων αριθμών. Στο Κεφάλαιο 1 θα μάθουμε πώς να δείχνουμε ότι ο $0,151515\dots = \frac{5}{33}$. Μπορείτε να ελέγξετε ότι αυτό είναι *αληθές* αν επιχειρήσετε να εκτελέσετε την πράξη $5 \div 33$ με μία αριθμομηχανή, αλλά πρέπει επίσης να σκεφτείτε γιατί αυτό το πείραμα με την αριθμομηχανή δεν αποδεικνύει ότι $0,151515\dots = \frac{5}{33}$.

Λύστε τώρα το πρόβλημα 7 <

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 0.1

Στα Προβλήματα 1-12 πείτε αν η εκφώνηση είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι ψευδής, εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

1. Ο $\sqrt{-13}$ είναι ακέραιος.
2. Ο $\frac{-2}{7}$ είναι ρητός.
3. Ο -3 είναι θετικός ακέραιος.
4. Ο 0 δεν είναι ρητός.
5. Ο $\sqrt{3}$ είναι ρητός.
6. Ο $\frac{-1}{0}$ είναι ρητός αριθμός.
7. Ο $\sqrt{25}$ δεν είναι θετικός ακέραιος.
8. Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός.

9. Ο $\frac{0}{0}$ είναι ρητός.
10. Ο π είναι θετικός ακέραιος.
11. Ο 0 βρίσκεται δεξιά του $-\sqrt{2}$ στην γραμμή των πραγματικών αριθμών.
12. Κάθε ακέραιος είναι θετικός ή αρνητικός.
13. Κάθε περατούμενος δεκαδικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός.
14. Ο $\sqrt{-1}$ είναι πραγματικός αριθμός.

0.2 Μερικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

Τώρα θα αναφέρουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Έστω ότι οι a , b , και c είναι πραγματικοί αριθμοί.

Στόχος

Να αναφέρουμε, να εξηγήσουμε και να συσχετίσουμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και τις πράξεις τους.

1. Η μεταβατική ιδιότητα της ισότητας (The transitive property of unity)

$$\text{Αν } a = b \text{ και } b = c, \text{ τότε } a = c.$$

Επομένως, δύο αριθμοί που είναι ίσοι προς ένα τρίτον αριθμό είναι και μεταξύ τους ίσοι. Για παράδειγμα, αν $x = y$ και $y = 7$, τότε $x = 7$.

2. Οι κλειστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (The closure properties of addition and multiplication)

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a και b , υπάρχουν οι μοναδικοί πραγματικοί $a + b$ και ab .

Αυτό σημαίνει ότι δύο οποιοδήποτε αριθμοί μπορούν να προστεθούν και να πολλαπλασιαστούν και το αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση είναι ένας πραγματικός αριθμός.

3. Οι αντιμεταθετικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (The commutative properties of addition and multiplication)

$$a + b = b + a \text{ και } ab = ba.$$

Αυτό σημαίνει ότι δύο αριθμοί μπορούν να προστεθούν ή να πολλαπλασιαστούν με οποιαδήποτε σειρά. Για παράδειγμα, $3 + 4 = 4 + 3$ και $(7)(-4) = (-4)(7)$.

4. Οι προσεταιριστικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (The associative properties of addition and multiplication)

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ και } a(bc) = (ab)c.$$

Αυτό σημαίνει ότι και για την πρόσθεση και για τον πολλαπλασιασμό οι αριθμοί μπορούν να ομαδοποιηθούν με οποιαδήποτε σειρά. Για παράδειγμα, $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$. Και στις δύο περιπτώσεις το άθροισμα είναι 9. Ομοίως, $2x + (x + y)$. Επίσης μπορείτε να δείτε ότι το δεξί σκέλος πιο εύκολα απλοποιείται σε $3x + y$ από ό,τι το αριστερό. Επίσης, $(6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 5 = 6(\frac{1}{3} \cdot 5)$ και εδώ το αριστερό σκέλος εύκολα συμπύσσεται σε 10 και συνεπώς το ίδιο συμβαίνει και με το δεξί σκέλος.

5. Οι ιδιότητες της ταυτότητας (The identity properties)

Υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί που συμβολίζονται με το 0 και το 1 έτσι ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό a , να ισχύει:

$$0 + a = a \quad \text{και} \quad 1a = a.$$

6. Οι ιδιότητες των αντίστροφων (The inverse properties)

Για κάθε πραγματικό αριθμό a , υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με $-a$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$a + (-a) = 0$$

Ο αριθμός $-a$ ονομάζεται αρνητικός του a .

Για παράδειγμα, επειδή $6 + (-6) = 0$, ο αρνητικός του 6 είναι ο αριθμός -6 . Ο αρνητικός ενός αριθμού δεν είναι απαραίτητα αρνητικός αριθμός. Για παράδειγμα, ο αρνητικός του -6 είναι ο 6, αφού $(-6) + (6) = 0$. Δηλαδή ο αρνητικός του -6 είναι 6 και επομένως μπορούμε να γράψουμε $-(-6) = 6$.

Για κάθε πραγματικό αριθμό a , εκτός από το 0, υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με a^{-1} έτσι ώστε να ισχύει:

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Ο αριθμός a^{-1} ονομάζεται **αντίστροφος** (reciprocal) του a .

Το μηδέν δεν έχει αντίστροφο επειδή δεν υπάρχει κανένας αριθμός που όταν πολλαπλασιαστεί επί το 0 να δίνει 1. Αυτή είναι μία συνεπαγωγή του γεγονότος ότι $0 \cdot a = 0$ στην 7. Οι επιμεριστικές ιδιότητες.

Επομένως όλοι οι αριθμοί εκτός από το 0 έχουν αντίστροφο. Αν θυμάστε ο a^{-1} μπορεί να γραφεί και $\frac{1}{a}$. Για παράδειγμα, ο αντίστροφος του 3 είναι $\frac{1}{3}$ αφού $3(\frac{1}{3}) = 1$. Συνεπώς ο $\frac{1}{3}$ είναι ο αντίστροφος του 3. Ο αντίστροφος του $\frac{1}{3}$ είναι 3 αφού $(\frac{1}{3})(3) = 1$. Ο αντίστροφος του 0 δεν ορίζεται.

7. Η προσεταιριστική ιδιότητα (The distributive property)

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{και} \quad (b + c)a = ba + ca$$

$$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$$

Για παράδειγμα, μολονότι $2(3 + 4) = 2(7) = 14$, μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$2(3 + 4) = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14$$

Ομοίως,

$$(2 + 3)(4) = 2(4) + 3(4) = 8 + 12 = 20$$

και

$$x(z + 4) = x(z) + x(4) = xz + 4x$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα μπορεί να ισχύσει για οποιονδήποτε αριθμό όρων.

Η **αφαίρεση** ορίζεται με βάση την πρόσθεση:

$$a - b \quad \text{σημαίνει} \quad a + (-b)$$

όπου $-b$ είναι ο αρνητικός του b . Επομένως, $6 - 8$ σημαίνει $6 + (-8)$.

Με ίδιο τρόπο ορίζουμε τη **διαίρεση** με βάση τον πολλαπλασιασμό. Αν $b \neq 0$, τότε

$$a \div b \text{ σημαίνει } ab^{-1}$$

Συνήθως γράφουμε $\frac{a}{b}$ ή a/b για την περίπτωση $a \div b$. Επειδή $b^{-1} = \frac{1}{b}$.

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}) = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

Το $\frac{a}{b}$ σημαίνει a επί το αντίστροφο του b . Επομένως, το $\frac{3}{5}$ σημαίνει 3 επί $\frac{1}{5}$ όπου $\frac{1}{5}$ είναι ο αντίστροφος του 5. Μερικές φορές το $\frac{a}{b}$ το προφέρουμε ως εξής: ο λόγος του a προς το b . Σημειώνουμε

ότι επειδή το 0 δεν έχει αντίστροφο αριθμό, **η διαίρεση με το 0 δεν ορίζεται**.

Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν κάποιες πράξεις που αφορούν τις πιο πάνω ιδιότητες.

Παράδειγμα 1 Εφαρμογή των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών

- α) $x(y - 3z + 2w) = (y - 3z + 2w)x$, με βάση την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.
 β) Με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, $3(4 \cdot 5) = (3 \cdot 4)5$. Επομένως το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του 3 επί το γινόμενο του 4 και του 5 είναι ίδιο με το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του γινομένου του 3 και του 4 επί το 5. Και στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα είναι 60.
 γ) Δείξτε ότι $a(b \cdot c) = (ab) \cdot (ac)$.

Λύση: Για να απορρίψουμε μια γενική πρόταση, αρκεί να παραθέσουμε ένα αντίθετο παράδειγμα. Στην περίπτωση αυτή, αν πάρουμε $a = 2$ και $b = 1 = c$, διαπιστώνουμε ότι $a(b \cdot c) = 2$ ενώ $(ab) \cdot (ac) = 4$.

Λύστε τώρα το πρόβλημα 9 <

Παράδειγμα 2 Εφαρμογή των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών

- α) Δείξτε ότι $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$.

Λύση: Με βάση τον ορισμό της αφαίρεσης, $2 - \sqrt{2} = 2 + (-\sqrt{2})$. Όμως, με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, $2 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2$. Επομένως, με βάση τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας, $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$. Ομοίως, είναι σαφές ότι, για οποιαδήποτε a και b , έχουμε:

$$a - b = -b + a$$

- β) Δείξτε ότι $(8 + x) - y = 8 + (x - y)$.

Λύση: Αρχίζοντας από το αριστερό μέλος, έχουμε:

$$\begin{aligned} (8 + x) - y &= (8 + x) + (-y) && \text{ορισμός της αφαίρεσης} \\ &= 8 + (x + (-y)) && \text{προσεταιριστική ιδιότητα} \\ &= 8 + (x - y) && \text{ορισμός της αφαίρεσης} \end{aligned}$$

- γ) Επομένως, σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας:

$$(8 + x) - y = 8 + (x - y)$$

Ομοίως, για κάθε a , b και c , έχουμε:

$$(a + b) - c = a + (b - c)$$

γ) Δείξτε ότι $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

Λύση: Με βάση την επιμεριστική ιδιότητα,

$$3(4x + 2y + 8) = 3(4x) + 3(2y) + 3(8)$$

Όμως, με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού,

$$3(4x) = (3 \cdot 4)x = 12x \text{ και ομοίως } 3(2y) = 6y$$

Επομένως, $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$

Λύστε τώρα το πρόβλημα 25 ◀

Παράδειγμα 3 Εφαρμογή των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών

α) Δείξτε ότι $\frac{ab}{c} = a \left(\frac{b}{c} \right)$ για $c \neq 0$.

Λύση: Ο περιορισμός είναι απαραίτητος. Αν $c = 0$ δεν ορίζεται κανένα μέλος της εξίσωσης. Με βάση τον ορισμό της διαίρεσης:

$$\frac{ab}{c} = (ab) \cdot \frac{1}{c} \text{ για } c \neq 0$$

Όμως, με βάση την προσεταιριστική ιδιότητα,

$$(ab) \cdot \frac{1}{c} = a \left(b \cdot \frac{1}{c} \right)$$

Όμως, με βάση τον ορισμό της διαίρεσης, $b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$. Επομένως,

$$\frac{ab}{c} = a \left(\frac{b}{c} \right)$$

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι $\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c} \right) b$.

β) Δείξτε ότι $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, για $c \neq 0$

Λύση: (Και εδώ είναι απαραίτητος ο περιορισμός, αλλά δεν θα το αναφέρουμε πάντα). Με βάση τον ορισμό της διαίρεσης και την επιμεριστική ιδιότητα,

$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}$$

Ωστόσο,

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Επομένως,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Λύστε τώρα το πρόβλημα 27 ◀

Για να βρείτε το γινόμενο πολλών αριθμών, μπορείτε να πολλαπλασιάσετε μεταξύ τους τα γινόμενα των αριθμών που έχετε υπολογίσει παίρνοντας τους αριθμούς δύο-δύο. Για παράδειγμα, για να βρείτε το γινόμενο των x , y και z , μπορούμε πρώτα να πολλαπλασιάσουμε το x επί το y και στη συνέχεια να πολλαπλασιάσουμε το γινόμενο αυτό επί z . Δηλαδή, υπολογίζουμε το γινόμενο $(xy)z$. Εναλλακτικά μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το x επί το γινόμενο των y και z . Δηλαδή υπολογίζουμε το γινόμενο $x(yz)$. Η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού

εγγυάται ότι και τα δύο αποτελέσματα είναι ίδια ανεξάρτητα από τον τρόπο ομαδοποίησης των αριθμών. Επομένως δεν προκαλείται καμία ασάφεια αν γράψουμε xyz . Η έννοια αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε περισσότερους από τρεις αριθμούς και ισχύει εξίσου ικανοποιητικά και στην πρόσθεση.

Δεν αρκεί μόνο να μπορείτε να χειρίζεστε τους πραγματικούς αριθμούς, πρέπει επίσης να γνωρίζετε και να είστε εξοικειωμένοι με την ορολογία που χρησιμοποιείται. Αυτό θα σας βοηθήσει να διαβάσετε το συγκεκριμένο βιβλίο, να παρακολουθείτε τις διαλέξεις και –το σημαντικότερο– θα σας δώσει την ευκαιρία να διατυπώσετε τις απορίες σας όταν αντιμετωπίσετε δυσκολίες.

Ο πιο κάτω κατάλογος αναφέρει σημαντικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών τις οποίες θα πρέπει να μελετήσετε διεξοδικά. Το να μπορείτε να χειρίζεστε τους πραγματικούς αριθμούς είναι θεμελιώδες για την επιτυχία σας στα Μαθηματικά. Μετά από κάθε ιδιότητα ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα. Όλοι οι παρονομαστές έχουμε υποθέσει ότι είναι διάφοροι του μηδενός (αλλά για χάρη της έμφασης είμαστε σαφείς σχετικά με αυτούς τους περιορισμούς).

Ιδιότητα

1. $a - b = a + (-b)$
2. $a - (-b) = a + b$
3. $-a = (-1)(a)$
4. $a(b + c) = ab + ac$
5. $a(b - c) = ab - ac$
6. $-(a + b) = -a - b$
7. $-(a - b) = -a + b$
8. $-(-a) = a$
9. $a(0) = 0$
10. $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$
11. $(-a)(-b) = ab$
12. $\frac{a}{1} = a$
13. $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$ για $b \neq 0$
14. $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ για $b \neq 0$
15. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ για $b \neq 0$
16. $\frac{0}{b} = 0$ για $a \neq 0$
17. $\frac{a}{a} = 1$ για $a \neq 0$
18. $a\left(\frac{b}{a}\right) = b$ για $a \neq 0$
19. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ για $a \neq 0$
20. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ για $b, d \neq 0$
21. $\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b = a\left(\frac{b}{c}\right)$ για $c \neq 0$
22. $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{c}$ για $b, c \neq 0$
23. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}$ για $b, c \neq 0$

Παραδείγματα

$$\begin{aligned}
 2 - 7 &= 2 + (-7) = -5 \\
 2 - (-7) &= 2 + 7 = 9 \\
 -7 &= (-1)(7) \\
 6(7 + 2) &= 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 54 \\
 6(7 - 2) &= 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30 \\
 -(7 + 2) &= -7 - 2 = -9 \\
 -(2 - 7) &= -2 + 7 = 5 \\
 -(-2) &= 2 \\
 2(0) &= 0 \\
 (-2)(7) &= -(2 \cdot 7) = 2(-7) = -14 \\
 (-2)(-7) &= 2 \cdot 7 = 14 \\
 \frac{7}{1} &= 7, \frac{-2}{1} = -2 \\
 \frac{2}{7} &= 2\left(\frac{1}{7}\right) \\
 \frac{2}{-7} &= -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7} \\
 \frac{-2}{-7} &= \frac{2}{7} \\
 \frac{0}{7} &= 0 \\
 \frac{2}{2} &= 1, \frac{-5}{-5} = 1 \\
 2\left(\frac{7}{2}\right) &= 7 \\
 2 \cdot \frac{1}{2} &= 1 \\
 \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} &= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15} \\
 \frac{2 \cdot 7}{3} &= \frac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \frac{7}{3} \\
 \frac{2}{3 \cdot 7} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \\
 \frac{2}{7} &= \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}
 \end{aligned}$$

$$24. \frac{a}{b(-c)} = \frac{a}{(-b)c} = \frac{-a}{bc} =$$

$$\frac{-a}{(-b)(-c)} = -\frac{a}{bc} \quad \text{για } b, c \neq 0$$

$$25. \frac{a(-b)}{c} = \frac{(-a)b}{c} = \frac{ab}{-c} =$$

$$\frac{(-a)(-b)}{-c} = -\frac{ab}{c} \quad \text{για } c \neq 0$$

$$26. \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{για } c \neq 0$$

$$27. \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad \text{για } c \neq 0$$

$$28. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{για } b, d \neq 0$$

$$29. \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad \text{για } b, d \neq 0$$

$$30. \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\text{για } b, c, d \neq 0$$

$$31. \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{c}} = \frac{a}{b} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} \quad \text{για } b, c \neq 0$$

$$32. \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \quad \text{για } b, c \neq 0$$

$$\frac{2}{3(-5)} = \frac{2}{(-3)(5)} = \frac{-2}{3(5)} =$$

$$\frac{-2}{(-3)(-5)} = -\frac{2}{3(5)} = -\frac{2}{15}$$

$$\frac{2(-3)}{5} = \frac{(-2)(3)}{5} = \frac{2(3)}{-5} =$$

$$\frac{(-2)(-3)}{-5} = -\frac{2(3)}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{2}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2-3}{9} = \frac{-1}{9}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Η ιδιότητα 23 είναι ιδιαίτερα σημαντική και θα μπορούσε να χαρακτηριστεί **θεμελιώδης αρχή των κλασμάτων**. Αναφέρει ότι όταν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό πλην του μηδενός προκύπτει ένα κλάσμα που είναι ίσο με το αρχικό. Επομένως,

$$\frac{7}{\frac{1}{8}} = \frac{7 \cdot 8}{\frac{1}{8} \cdot 8} = \frac{56}{1} = 56$$

Με βάση τις ιδιότητες 28 και 23, έχουμε:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 15 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 15} = \frac{50}{75} = \frac{2 \cdot 25}{3 \cdot 25}$$

Μπορούμε, επίσης, να λύσουμε αυτό το πρόβλημα μετατρέποντας το $\frac{2}{5}$ και το $\frac{4}{15}$ σε κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα 26. Τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{4}{15}$ μπορούν να γραφτούν με κοινό παρονομαστή τον $5 \cdot 15$:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 15} \quad \text{και} \quad \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 5}$$

Ωστόσο, ο 15 είναι ο *ελάχιστος κοινός παρονομαστής* και ονομάζεται *ελάχιστος κοινός παρονομαστής* (LCD, Least Common Denominator) των $\frac{2}{5}$ και $\frac{4}{15}$. Συνεπώς,

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6+4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} - \frac{5}{12} &= \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} & \text{ΕΚΠ} &= 24 \\ &= \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = \frac{9-10}{24} \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 0.2

Στα Προβλήματα 1-10 βρείτε αν η εκφώνηση είναι αληθής ή ψευδής.

1. Κάθε πραγματικός αριθμός έχει αντίστροφο.
2. Ο αντίστροφος του 6.6 είναι 0.151515...
3. Ο αρνητικός του 7 είναι $-\frac{1}{7}$.
4. $1(x \cdot y) = (1 \cdot x)(1 \cdot y)$
5. $-x + y = -y + x$
6. $(x + 2)(4) = 4x + 8$
7. $\frac{x+3}{5} = \frac{x}{5} + 3$
8. $3\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4}$
9. $2(x \cdot y) = (2x) \cdot (2y)$
10. $x(4y) = 4xy$

Στα Προβλήματα 11-20 βρείτε ποιες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών χρησιμοποιούνται.

11. $2(x + y) = 2x + 2y$
12. $(x + 5.2) + 0.7y = x + (5.2 + 0.7y)$
13. $2(3y) = (2.3)y$
14. $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$
15. $5(b - a) = (a - b)(-5)$
16. $y + (x + y) = (y + x) + y$
17. $\frac{5x - y}{7} = \frac{1}{7}(5x - y)$
18. $5(4 + 7) = 5(7 + 4)$
19. $(2 + a)b = 2b + ba$
20. $(-1)(-3 + 4) = (-1)(-3) + (-1)(4)$

Στα Προβλήματα 21-27 δείξτε ότι η εκφώνηση είναι αληθής χρησιμοποιώντας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

21. $2x(y - 7) = 2xy - 14x$
22. $\frac{x}{y}z = x \frac{z}{y}$
23. $(x + y)(2) = 2x + 2y$
24. $a(b + (c + d)) = a((d + b) + c)$
25. $x(2y + 1) + 3 = 2xy + 4x$
26. $(1 + a)(b + c) = b + c + ab + ac$
27. Δείξτε ότι
 $(x - y + z)w = xw - yw + zw$.
 [Υπόδειξη:
 $b + c + d = (b + c) + d]$

Απλοποιήστε αν είναι δυνατόν τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις.

28. $-2 + (-4)$
29. $-a + b$
30. $6 + (-4)$
31. $7 - 2$
32. $\frac{3}{2^{-1}}$
33. $-5 - (-13)$
34. $-(-a) + (-b)$
35. $(-2)(9)$
36. $7(-9)$
37. $(-1.6)(-0.5)$
38. $19(-1)$
39. $\frac{-1}{-\frac{1}{a}}$
40. $-(-6 + x)$
41. $-7(x)$
42. $-3(a - b)$
43. $-(-6 + (-y))$

44. $-3 \div 3a$
45. $-9 \div (-27)$
46. $(-a) : (-b)$
47. $3 + (3^{-1}9)$
48. $3(-2(3) + 6(2))$
49. $(-a)(-b)(-1)$
50. $(-12)(-12)$
51. $X(1)$
52. $-71(x - 2)$
53. $4(5 + x)$
54. $-(x - y)$
55. $0(-x)$
56. $8\left(\frac{1}{11}\right)$
57. $\frac{X}{1}$
58. $\frac{14x}{21y}$
59. $\frac{2x}{-2}$
60. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$
61. $\frac{a}{b}(3b)$
62. $5a + (7 - 5a)$
63. $\frac{-aby}{-ax}$
64. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$
65. $\frac{2}{x} \cdot \frac{5}{y}$
66. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{llll}
67. \frac{x}{3a} + \frac{y}{a} & 69. \frac{a}{b} + \frac{c}{b} & 71. \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} & 73. \frac{6}{\frac{x}{y}} \\
68. \frac{3}{10} - \frac{7}{15} & 70. \frac{X}{\sqrt{5}} - \frac{Y}{\sqrt{5}} & 72. \frac{3}{7} - \frac{5}{9} & 74. \frac{\frac{l}{w}}{m} \\
& & & 75. \frac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{z}{xy}} \\
& & & 76. \frac{7}{0} \\
& & & 77. \frac{0}{X}, \text{ για } X \neq 0 \\
& & & 78. \frac{0}{0}
\end{array}$$

0.3 Δυνάμεις και ρίζες

Το γινόμενο $x \cdot x \cdot x$ γράφεται συνοπτικά ως x^3 . Γενικά, όταν ο n είναι ένας θετικός ακέραιος, x^n είναι ο συνοπτικός τρόπος παρουσίασης του γινομένου που έχει n παράγοντες ίσους με x . Το γράμμα n στην έκφραση x^n ονομάζεται **εκθέτης (exponent)** και το x ονομάζεται **βάση (base)**. Πιο συγκεκριμένα, αν ο n είναι θετικός ακέραιος, έχουμε:

$$\begin{array}{ll}
1. x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ παράγοντες}} & 2. x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ παράγοντες}}} \text{ για } x \neq 0 \\
2. \frac{1}{x^{-n}} \text{ για } x \neq 0 & 4. x^0 = 1
\end{array}$$

Στόχος

Να κάνουμε επανάληψη των θετικών ακεραίων δυνάμεων, της μηδενικής δύναμης, των αρνητικών ακεραίων δυνάμεων, των ρητών δυνάμεων, των πρωτευσών ριζών, των ριζών και της διαδικασίας μετατροπής του παρονομαστή σε ρητό αριθμό.

Μερικοί συγγραφείς υποστηρίζουν ότι το 0^0 δεν ορίζεται. Όμως, το $0^0 = 1$ είναι ένας συνεπής και συχνά χρήσιμος ορισμός.

Παράδειγμα 1 Δυνάμεις (Exponential)

$$\begin{array}{ll}
\alpha) \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \\
\beta) 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{243} \\
\gamma) \frac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243 \\
\delta) 2^0 = 1, \pi^0 = 1, (-5)^0 = 1 \\
\epsilon) x^1 = x
\end{array}$$

Λύστε τώρα το πρόβλημα 5 ◀

Αν $r^n = x$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε το r είναι η n τάξης **ρίζα (root)** του x . Οι δεύτερες ρίζες, όταν $n = 2$, ονομάζονται τετραγωνικές ρίζες. Και οι τρίτες ρίζες, όταν $n = 3$, ονομάζονται κυβικές ρίζες. Για παράδειγμα, $3^2 = 9$ και επομένως το 3 είναι η τετραγωνική ρίζα του 9. Δεδομένου ότι $(-3)^2 = 9$, το -3 είναι και αυτό μία τετραγωνική ρίζα του 9. Ομοίως, το -2 είναι μία κυβική ρίζα του -8 , αφού $(-2)^3 = -8$, ενώ το 5 είναι μία τέταρτη ρίζα του 625, αφού $5^4 = 625$.

Μερικοί αριθμοί δεν έχουν ρίζα n τάξης η οποία να είναι πραγματικός αριθμός. Για παράδειγμα, επειδή το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός, δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός ο οποίος να είναι μία τετραγωνική ρίζα του -4 .

Η **πρωτεύουσα ρίζα n τάξης** (principal n th root) του x είναι η ρίζα n τάξης του x η οποία είναι θετική, αν ο x είναι θετικός, ενώ είναι αρνητική αν ο x είναι αρνητικός και ο n περιττός αριθμός (odd). Συμβολίζουμε την πρωτεύουσα ρίζα n τάξης του x με $\sqrt[n]{x}$. Επομένως,

$$\text{Η } \sqrt[n]{x} \text{ είναι } \begin{cases} \text{θετική, αν ο } x \text{ είναι θετικός} \\ \text{Είναι αρνητική, αν ο } x \text{ είναι αρνητικός και το } n \text{ είναι περιττός αριθμός.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ και $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$. Ορίζουμε $\sqrt[n]{0}$.

Μολονότι το 2 και το -2 είναι τετραγωνικές ρίζες του 4, η πρωτεύουσα τετραγωνική ρίζα του 4 είναι 2 και όχι το -2 . Επομένως, $\sqrt{4} = 2$. Για θετικό x , συχνά γράφουμε $\pm\sqrt{x}$ για να συμβολίσουμε και τις δύο ρίζες του x και « $\pm\sqrt{4} = \pm 2$ » είναι ένας εύκολος σύντομος τρόπος να γράψουμε « $\sqrt{4} = 2$ και $-\sqrt{4} = -2$ », αλλά η μοναδική τιμή του $\sqrt{4}$ είναι 2.

Το σύμβολο $\sqrt[n]{x}$ ονομάζεται **ριζικό (radical)**. Στην περίπτωση των πρωτευουσών τετραγωνικών ριζών συνήθως χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sqrt{x}$ αντί το $\sqrt[2]{x}$. Επομένως, $\sqrt{9} = 3$.

Αν ο x είναι θετικός, η έκφραση $x^{p/q}$, όπου p και q είναι ακέραιοι και δεν έχουν κοινούς παράγοντες και το q είναι θετικό, ορίζεται ως εξής: $\sqrt[q]{x^p}$. Συνεπώς,

$$x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}; \quad 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$4^{-1/2} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων και των ριζών:

Ιδιότητες

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $x^0 = 1$
3. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
4. $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$
5. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$
6. $\frac{x^m}{x^m} = 1$
7. $(x^m)^n = x^{mn}$
8. $(xy)^n = x^n y^n$
9. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
10. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$
11. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
12. $x^{-1/n} = \frac{1}{x^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$
13. $\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
14. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$
15. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
16. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$
17. $(\sqrt[m]{x})^m = x$

Παραδείγματα

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256; \quad x^2 \cdot x^3 = x^5$$

$$2^0 = 1$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8; \quad \frac{1}{x^{-5}} = x^5$$

$$\frac{2^{12}}{2^8} = 2^4 = 16; \quad \frac{x^8}{x^{12}} = \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{2^4}{2^4} = 1$$

$$(2^3)^5 = 2^{15}; \quad (x^2)^3 = x^6$$

$$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$3^{1/5} = \sqrt[5]{3}$$

$$4^{-1/2} = \frac{1}{4^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$$

$$\frac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{90}{10}} = \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$$

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

$$(\sqrt[8]{7})^8 = 7$$