



ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟ

- Π.1 Συναρτήσεις και τα γραφήματά τους
- Π.2 Συλλογή συναρτήσεων, μαθηματική μοντελοποίηση
- Π.3 Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, τεχνικές σχεδίασης
- Π.4 Αντίστροφες συναρτήσεις
- Π.5 Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις
- Π.6 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Π.7 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Π.8 Ακολουθίες, συμβολισμός αθροίσματος, διωνυμικό θεώρημα



Μέχρι τώρα, τα μαθηματικά που έχετε συναντήσει έχουν επικεντρωθεί κυρίως στην Άλγεβρα, τη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία. Οι τομείς αυτοί έχουν μακρά ιστορία, πάνω από 2000 χρόνια. Ο Λογισμός όμως είναι σχετικά καινούργιος, αφού αναπτύχθηκε τα τελευταία 400 χρόνια περίπου. Από τότε μέχρι σήμερα έχει επηρεάσει βαθιά κάθε πτυχή της ανθρώπινης δραστηριότητας από τη βιολογία έως την ιατρική, την οικονομία και τη φυσική, αναφέροντας εδώ μερικά μόνο παραδείγματα. Το 2019 σηματοδοτήθηκε από την 50ή επέτειο της αποστολής του *Απόλλων 11*, η οποία μετέφερε τους πρώτους ανθρώπους στη Σελήνη, ένα επίτευγμα που κατέστη δυνατό λόγω των μαθηματικών, ιδίως του Λογισμού.

Ο Λογισμός ασχολείται με τη μεταβολή και πώς η μεταβολή σε μία ποσότητα επηρεάζει άλλες ποσότητες. Θεμελιώδεις σε αυτές τις ιδέες είναι οι συναρτήσεις και οι ιδιότητές τους.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε πολλές από τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στον Λογισμό. Παρέχουμε επίσης μια σύνοψη των τεχνικών εκείνων που χρησιμοποιούνται από την προ Λογισμού εποχή για τη σχεδίαση των γραφημάτων των συναρτήσεων και για τη μετατροπή γνωστών συναρτήσεων σε νέες συναρτήσεις.

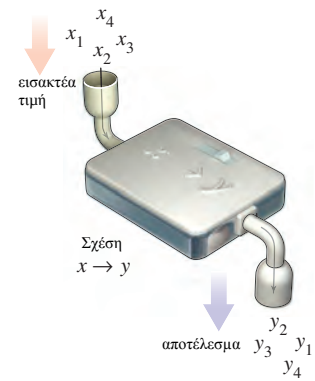
Ο καθηγητής σας μπορεί να επιλέξει να καλύψει ολόκληρο ή μέρος αυτού του κεφαλαίου. Ανεξάρτητα από αυτό, σε ολόκληρο το βιβλίο θα βλέπετε τη σημείωση με τίτλο ΧΡΕΙΑΖΕΣΤΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;. Οι σημειώσεις αυτές αναφέρονται σε συγκεκριμένα θέματα, τα οποία αναλύονται κυρίως στο παρόν κεφάλαιο.

Π.1 Συναρτήσεις και τα γραφήματά τους

ΣΤΟΧΟΙ Όταν ολοκληρώσετε αυτή την ενότητα, θα πρέπει να μπορείτε:

1. Να υπολογίζετε την τιμή μιας συνάρτησης (σ. 3)
2. Να βρίσκετε το πηλίκο διαφορών μιας συνάρτησης (σ. 5)
3. Να βρίσκετε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης (σ. 6)
4. Να αναγνωρίζετε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (σ. 7)
5. Να αναλύετε μια συνάρτηση που ορίζεται κατά τμήματα (σ. 9)
6. Να λαμβάνετε πληροφορίες από ή σχετικά με το γράφημα μιας συνάρτησης (σ. 10)
7. Να χρησιμοποιείτε τις ιδιότητες των συναρτήσεων (σ. 12)
8. Να βρίσκετε τον μέσο ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης (σ. 14)

Συχνά υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια μεταβλητή συνδέεται με κάποιον τρόπο με μια άλλη μεταβλητή. Για παράδειγμα, η τιμή ενός γαλονιού βενζίνης συνδέεται με την τιμή ενός βαρελιού πετρελαίου. Ο όγκος V μιας σφαίρας εξαρτάται από την ακτίνα της R . Η δύναμη F που ασκείται σε ένα σώμα σχετίζεται την επιτάχυνσή του a . Αυτά είναι παραδείγματα μιας **σχέσης**, δηλαδή μιας αντιστοιχίας μεταξύ δύο συνόλων που ονομάζονται **πεδίο ορισμού** και **σύνολο τιμών**. Αν το x είναι ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού και το y είναι ένα στοιχείο του συνόλου τιμών και αν υπάρχει μια σχέση μεταξύ του x και του y , τότε λέμε ότι το y **αντιστοιχεί** στο x ή ότι το y **εξαρτάται** από το x και γράφουμε $x \rightarrow y$. Συχνά είναι χρήσιμο να σκεφτόμαστε το x ως **εισακτέα τιμή** και το y ως **αποτέλεσμα** της σχέσης. Δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1

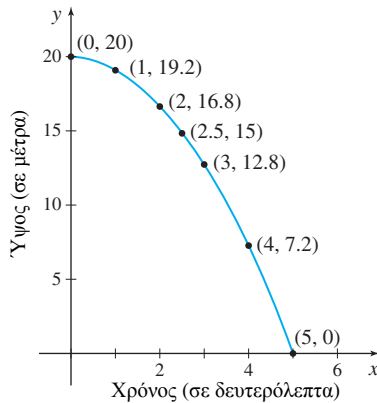
Ας υποθέσουμε ότι ένας αστροναύτης που στέκεται στη Σελήνη ρίχνει μια πέτρα προς τα πάνω η οποία φτάνει σε ύψος 20 m και ξεκινά να χρονομετρά από τη στιγμή που η πέτρα αρχίζει να πέφτει. Αν το x αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δευτερολέπτων στο χρονόμετρο και το y αντιπροσωπεύει το ύψος που βρίσκεται η πέτρα εκείνη τη στιγμή, τότε υπάρχει μια σχέση μεταξύ του χρόνου x και του ύψους y . Αν το ύψος μετριέται στα $x = 1, 2, 2.5, 3, 4$ και 5 s, τότε αυτό είναι περίπου $y = 19.2, 16.8, 15, 12.8, 7.2$ και 0 m, αντίστοιχα. Αυτό είναι ένα παράδειγμα σχέσης που εκφράζεται **λεκτικά**.

Ο αστροναύτης μπορούσε επίσης να εκφράσει αυτήν τη σχέση **αριθμητικά**, **γραφικά** ή **αλγεβρικά**. Η σχέση μπορεί να εκφραστεί με έναν πίνακα αριθμών (Δείτε τον Πίνακα 1) ή με το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $\{(0, 20), (1, 19.2), (2, 16.8), (2.5, 15), (3, 12.8), (4, 7.2), (5, 0)\}$, όπου το πρώτο στοιχείο κάθε ζεύγους δηλώνει τον χρόνο x και το δεύτερο στοιχείο δηλώνει το ύψος y . Η σχέση μπορεί επίσης να εκφραστεί οπτικά, χρησιμοποιώντας είτε ένα γράφημα, όπως στο Σχήμα 2, είτε μια απεικόνιση, όπως στο Σχήμα 3. Τέλος, η σχέση μπορεί να εκφραστεί αλγεβρικά με τον τύπο

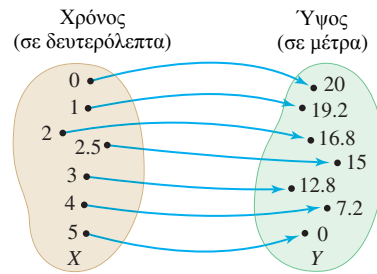
$$y = 20 - 0.8x^2$$

Πίνακας 1

Χρόνος (s), x	Ύψος (m), y
0	20
1	19.2
2	16.8
2.5	15
3	12.8
4	7.2
5	0



Σχήμα 2



Σχήμα 3

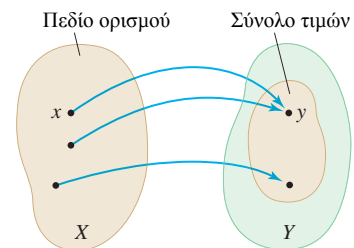
Σε αυτό το παράδειγμα παρατηρήστε ότι αν X είναι το σύνολο των χρόνων από 0 έως 5 s και Y είναι το σύνολο των υψών από 0 έως 20 m, τότε κάθε στοιχείο του X αντιστοιχεί σε ένα και μόνο στοιχείο του Y . Κάθε δεδομένη τιμή χρόνου αποδίδει μια **μοναδική**, δηλαδή ακριβώς μία, τιμή ύψους. Οποιαδήποτε σχέση με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται **συνάρτηση** από το X στο Y .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Δεν είναι όλες οι σχέσεις συναρτήσεις. Αν οποιοδήποτε στοιχείο x στο σύνολο X αντιστοιχεί σε περισσότερα από ένα στοιχεία y στο σύνολο Y , τότε η σχέση δεν είναι συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ Συνάρτηση

Έστω ότι X και Y είναι δύο μη κενά σύνολα.¹ Μια **συνάρτηση** f από το X στο Y είναι μια σχέση που συνδέει κάθε στοιχείο του X με ακριβώς ένα στοιχείο του Y .

Το σύνολο X ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης. Για κάθε στοιχείο x στο X , το αντίστοιχο στοιχείο y στο Y ονομάζεται **τιμή** της συνάρτησης στο x ή **εικόνα** του x . Το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του πεδίου ορισμού ονομάζεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης. Επειδή μπορεί να υπάρχουν στοιχεία στο Y που δεν είναι εικόνες κάποιου x στο X , το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι υποσύνολο του Y . Δείτε το Σχήμα 4.



Σχήμα 4

1. Υπολογισμός της τιμής μιας συνάρτησης

Οι συναρτήσεις συχνά συμβολίζονται με γράμματα όπως f , F , g κ.ο.κ. Αν f είναι μια συνάρτηση, τότε για κάθε στοιχείο x στο πεδίο ορισμού της, η αντίστοιχη εικόνα του στο σύνολο τιμών συμβολίζεται με $f(x)$ και διαβάζεται « f του x ». Το $f(x)$ ονομάζεται **τιμή της f στο x** . Η μεταβλητή x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ή **όρισμα**, επειδή μπορεί να αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού, ενώ η μεταβλητή y ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**, επειδή η τιμή της εξαρτάται από το x .

1. Τα σύνολα X και Y συνήθως είναι σύνολα πραγματικών αριθμών, ορίζοντας μια **πραγματική συνάρτηση**. Τα δύο σύνολα θα μπορούσαν επίσης να είναι σύνολα μιγαδικών αριθμών, ορίζοντας μια **μιγαδική συνάρτηση**, ή το X θα μπορούσε να είναι ένα σύνολο πραγματικών αριθμών και το Y ένα σύνολο διανυσμάτων, ορίζοντας μια **διανυσματική συνάρτηση**. Στον ευρύ ορισμό, τα X και Y μπορεί να είναι οποιαδήποτε δύο σύνολα.

Πεπλεγμένη μορφή συνάρτησης

Γενικά, μια συνάρτηση f που ορίζεται από μια εξίσωση μεταξύ των x και y δίνεται σε **πεπλεγμένη μορφή**, δηλαδή **έμμεσα**. Αν είναι δυνατόν να λύσουμε την εξίσωση ως προς y συναρτήσει του x , τότε γράφουμε $y = f(x)$ και λέμε ότι η συνάρτηση δίνεται σε **μη πεπλεγμένη μορφή**, δηλαδή **ρητά**. Για παράδειγμα,

Πεπλεγμένη μορφή	Ρητή μορφή
$x^2 - y = 6$	$y = f(x) = x^2 - 6$
$xy = 4$	$y = g(x) = \frac{4}{x}$

Στον Λογισμό μερικές φορές χειριζόμαστε συναρτήσεις που ορίζονται έμμεσα και δεν μπορούν να εκφραστούν σε ρητή μορφή. Για παράδειγμα, αν η συνάρτηση με την ανεξάρτητη μεταβλητή x και την εξαρτημένη μεταβλητή y ορίζεται από την $\sin(xy) = xy - 2y + \cos x - \sin y$, δεν υπάρχει μέθοδος επίλυσης ως προς y ώστε να εκφραστεί ρητά η συνάρτηση.

2. Εύρεση του πηλίκου διαφορών μιας συνάρτησης

Μια σημαντική μεθοδολογία στον Λογισμό αποτελεί η απασχόλησή μας με ένα συγκεκριμένο πηλίκο. Για μια δεδομένη συνάρτηση $y = f(x)$, οι εισακτές τιμές x και $x + h$, όπου $x + h$, $h \neq 0$, έχουν ως αποτέλεσμα τις εικόνες $f(x)$ και $f(x + h)$. Το πηλίκο των διαφορών τους

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

με $h \neq 0$, ονομάζεται **πηλίκο διαφορών** της f στο x .

ΟΡΙΣΜΟΣ Πηλίκο διαφορών

Το **πηλίκο διαφορών** μιας συνάρτησης f στο x δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \quad \text{με} \quad h \neq 0$$

Το πηλίκο διαφορών χρησιμοποιείται στον Λογισμό για να ορίσουμε την παράγωγο, η οποία χρησιμοποιείται σε εφαρμογές όπως η ταχύτητα ενός σώματος και η βελτιστοποίηση πόρων.

Όταν βρίσκουμε ένα πηλίκο διαφορών, είναι αναγκαίο να απλοποιούμε την παράσταση προκειμένου να απαλείψουμε το h από τον παρονομαστή, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Εύρεση του πηλίκου διαφορών μιας συνάρτησης

Βρείτε το πηλίκο διαφορών κάθε συνάρτησης:

α) $f(x) = 2x^2 - 3x$

β) $f(x) = \sqrt{x}$.

Λύση α)

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[2(x+h)^2 - 3(x+h)] - [2x^2 - 3x]}{h} \\ &\quad \uparrow \\ f(x+h) &= 2(x+h)^2 - 3(x+h) \\ &= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} \end{aligned} \quad \text{Ανάπτυγμα ταυτότητας}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} && \text{Απαλοιφή παρενθέσεων} \\
&= \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h} && \text{Αναγωγή ομοίων όρων} \\
&= \frac{h(4x + 2h - 3)}{h} && \text{Κοινός παράγοντας το } h \\
&= 4x + 2h - 3 && \text{Απλοποίηση}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} && f(x+h) = \sqrt{x+h} \\
&= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} && \text{Καθιστούμε ρητό τον αριθμητή} \\
&= \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} && (A-B)(A+B) = A^2 - B^2 \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} && (\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2 = x+h-x=h \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} && \text{Απλοποίηση}
\end{aligned}$$

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 23.

3. Εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης

Στις εφαρμογές, το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι μερικές φορές προκαθορισμένο. Για παράδειγμα, μπορεί να ενδιαφερόμαστε για τον πληθυσμό μιας πόλης από το 1990 έως το 2019. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι ο χρόνος σε έτη και περιορίζεται στο διάστημα $[1990, 2019]$. Άλλες φορές το πεδίο ορισμού περιορίζεται από το γενικό πλαίσιο της ίδιας της συνάρτησης. Για παράδειγμα, ο όγκος V μιας σφαίρας που δίνεται από τη συνάρτηση $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, έχει νόημα μόνο αν η ακτίνα R είναι μεγαλύτερη από 0. Συχνά όμως το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f δεν είναι προκαθορισμένο, αλλά δίνεται μόνο ο τύπος που ορίζει τη συνάρτηση. Σε τέτοιες περιπτώσεις, το **πεδίο ορισμού** της f είναι το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο πραγματικών αριθμών για το οποίο ορίζεται η τιμή $f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης

Βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης:

$$\alpha) f(x) = x^2 + 5x \quad \beta) g(x) = \frac{3x}{x^2 - 4} \quad \gamma) h(t) = \sqrt{4 - 3t} \quad \delta) F(u) = \frac{5u}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Λύση α) Εφόσον η $f(x) = x^2 + 5x$ ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x , το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών.

β) Επειδή η διαίρεση με το μηδέν δεν ορίζεται, το $x^2 - 4$ δεν μπορεί να είναι 0, που σημαίνει ότι πρέπει $x \neq -2$ και $x \neq 2$. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$ ορίζεται για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό εκτός από τους $x = -2$ και $x = 2$. Έτσι, το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\{x | x \neq -2, x \neq 2\}$.

γ) Επειδή η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού δεν είναι πραγματικός αριθμός, η τιμή του $4 - 3t$ πρέπει να είναι μη αρνητική. Η λύση της ανίσωσης $4 - 3t \geq 0$ είναι $t \leq \frac{4}{3}$, έτσι το πεδίο ορισμού της h είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\left\{t \mid t \leq \frac{4}{3}\right\}$ ή το διάστημα $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$.

ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;
Η επίλυση ανισώσεων αναλύεται στο Παράρτημα Α.1.

δ) Επειδή η τετραγωνική ρίζα είναι στον παρονομαστή, η τιμή του $u^2 - 1$ όχι μόνο δεν πρέπει να είναι αρνητική, αλλά ούτε και μηδέν. Δηλαδή πρέπει $u^2 - 1 > 0$. Η λύση της ανίσωσης $u^2 - 1 > 0$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\{u \mid u < -1\} \cup \{u \mid u > 1\}$ ή η ένωση των διαστημάτων $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;
Ο συμβολισμός του διαστήματος αναλύεται στο Παράρτημα Α.1.

Αν το x είναι στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f , λέμε ότι η f **ορίζεται** στο x ή ότι το $f(x)$ **υπάρχει**. Αν το x δεν είναι στο πεδίο ορισμού της f , λέμε ότι η f **δεν ορίζεται** στο x ή ότι το $f(x)$ **δεν υπάρχει**. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης εκφράζεται χρησιμοποιώντας ανισότητες, συμβολισμό διαστήματος, συμβολισμό συνόλου ή λέξεις, όποιο από αυτά είναι πιο βολικό. Παρατηρήστε τους διάφορους τρόπους με τους οποίους εκφράστηκε το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης στη λύση του Παραδείγματος 4.

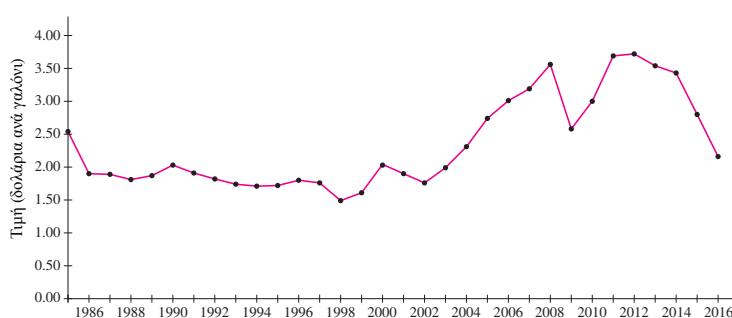
ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 17.

4. Αναγνώριση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

Στις εφαρμογές, ένα γράφημα συχνά αποκαλύπτει τη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών πιο ξεκάθαρα από ό,τι μια εξίσωση. Για παράδειγμα, ο Πίνακας 2 δείχνει τη μέση τιμή της βενζίνης σε ένα συγκεκριμένο πρατήριο καυσίμων στις Ηνωμένες Πολιτείες (για τα έτη 1985-2016 προσαρμοσμένη στην τιμή του πληθωρισμού, που βασίστηκε στο έτος 2014 σε δολάρια). Αν σχεδιάσουμε αυτά τα δεδομένα χρησιμοποιώντας το έτος ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την τιμή της βενζίνης ως εξαρτημένη μεταβλητή και στη συνέχεια ενώσουμε τα σημεία (έτος, τιμή), παίρνουμε το Σχήμα 6.

Πίνακας 2 Μέση λιανική τιμή βενζίνης
(σε δολάρια το 2014)

Έτος	Τιμή	Έτος	Τιμή	Έτος	Τιμή
1985	2.55	1996	1.80	2007	3.19
1986	1.90	1997	1.76	2008	3.56
1987	1.89	1998	1.49	2009	2.58
1988	1.81	1999	1.61	2010	3.00
1989	1.87	2000	2.03	2011	3.69
1990	2.03	2001	1.90	2012	3.72
1991	1.91	2002	1.76	2013	3.54
1992	1.82	2003	1.99	2014	3.43
1993	1.74	2004	2.31	2015	2.74
1994	1.71	2005	2.74	2016	2.24
1995	1.72	2006	3.01		



Σχήμα 6 Γράφημα της μέσης λιανικής τιμής της βενζίνης (σε δολάρια το 2014)

(Πηγή: U.S. Energy Information Administration)

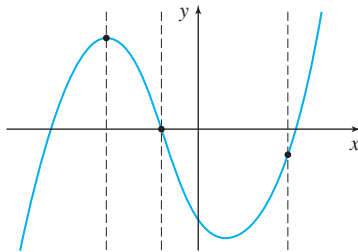
Το γράφημα δείχνει ότι για κάθε χρονολογία στον οριζόντιο άξονα υπάρχει μία μόνο τιμή στον κατακόρυφο άξονα. Έτσι, το γράφημα αναπαριστά μια συνάρτηση, αν και δεν δίνεται ο κανόνας για τον καθορισμό της τιμής από το έτος.

Όταν μια συνάρτηση ορίζεται από μια εξίσωση μεταξύ των x και y , η **γραφική παράσταση** (ή **το γράφημα**) της συνάρτησης είναι το σύνολο των σημείων (x, y) στο επίπεδο xy που ικανοποιούν την εξίσωση.

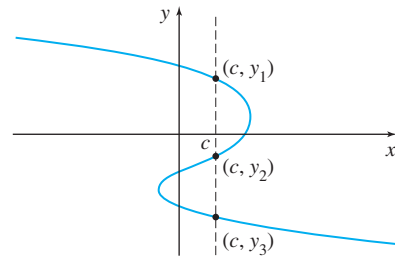
ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;

Η γραφική παράσταση μιας εξίσωσης αναλύεται στο Παράρτημα Α.3.

Όμως κάθε συλλογή σημείων στο επίπεδο xy δεν αντιπροσωπεύει απαραίτητα το γράφημα μιας συνάρτησης. Μην ξεχνάτε ότι μια σχέση είναι συνάρτηση μόνο εάν κάθε στοιχείο x του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί ακριβώς σε μία εικόνα y στο σύνολο τιμών. Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν περιέχει ποτέ δύο σημεία με την ίδια τεταγμένη x και διαφορετικές τεταγμένες y . Συγκρίνετε τα γραφήματα των Σχημάτων 7 και 8. Στο Σχήμα 7 κάθε αριθμός x συνδέεται με ακριβώς έναν αριθμό y , αλλά στο Σχήμα 8 ορισμένοι αριθμοί x συνδέονται με τρεις αριθμούς y . Άρα στο Σχήμα 7 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, ενώ στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται ένα γράφημα που δεν είναι γράφημα συνάρτησης.



Σχήμα 7 Συνάρτηση: Ακριβώς ένα y για κάθε x . Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει το γράφημα το πολύ σε ένα σημείο.



Σχήμα 8 Δεν είναι συνάρτηση: Το $x = c$ συνδέεται με τρία y . Η κατακόρυφη ευθεία $x = c$ τέμνει το γράφημα σε τρία σημεία.

Προκειμένου ένα γράφημα να είναι γράφημα συνάρτησης, πρέπει να ικανοποιεί το *κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας*.

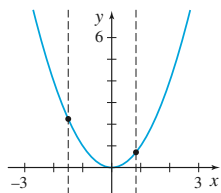
ΘΕΩΡΗΜΑ Κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας

Ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο xy είναι το γράφημα μιας συνάρτησης αν και μόνο αν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει το γράφημα το πολύ σε ένα σημείο.

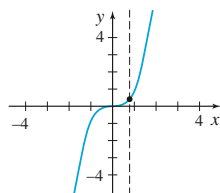
ΣΗΜΕΙΩΣΗ Η φράση «αν και μόνο αν» σημαίνει ότι οι δηλώσεις σε κάθε πλευρά της φράσης είναι ισοδύναμες. Δηλαδή έχουν το ίδιο νόημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Αναγνώριση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

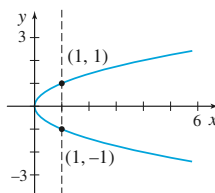
Ποια γραφήματα στο Σχήμα 9 αντιπροσωπεύουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;



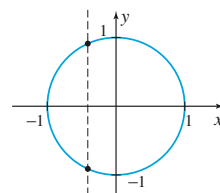
(α) $y = x^2$



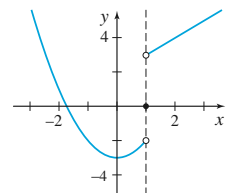
(β) $y = x^3$



(γ) $x = y^2$



(δ) $x^2 + y^2 = 1$



(ε) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{αν } x < 1 \\ 0 & \text{αν } x = 1 \\ x + 2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Σχήμα 9

Λύση Στα Σχήματα 9α, 9β και 9ε έχουμε γραφήματα συναρτήσεων, αφού κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει κάθε γράφημα το πολύ σε ένα σημείο. Τα γραφήματα στα Σχήματα 9γ και 9δ δεν είναι γραφήματα συναρτήσεων γιατί υπάρχει μια κατακόρυφη ευθεία που τέμνει κάθε γράφημα σε περισσότερα από ένα σημεία.

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Προβλήματα 31α,β.

Παρατηρήστε ότι, παρόλο που το γράφημα του Σχήματος 9ε αναπαριστά μια συνάρτηση, φαίνεται διαφορετικό σε σχέση με τα γραφήματα των α και β. Το γράφημα αυτό αποτελείται από δύο τμήματα και ένα σημείο, τα οποία δεν ενώνονται μεταξύ τους. Επίσης παρατηρήστε ότι διαφορετικές εξισώσεις περιγράφουν διαφορετικά τμήματα του γραφήματος. Οι συναρτήσεις που έχουν γραφικές παραστάσεις παρόμοιες με αυτήν του Σχήματος 9ε ονομάζονται *συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα*.

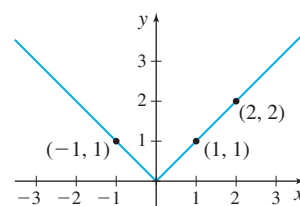
5. Ανάλυση συνάρτησης που ορίζεται κατά τμήματα

Μερικές φορές μια συνάρτηση ορίζεται διαφορετικά σε διαφορετικά τμήματα του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα, η *συνάρτηση της απόλυτης τιμής* $f(x) = |x|$ ορίζεται στην πραγματικότητα από δύο εξισώσεις: $f(x) = x$ αν $x \geq 0$ και $f(x) = -x$ αν $x < 0$. Οι εξισώσεις αυτές συνήθως συνδυάζονται γράφοντας μία έκφραση για τον τύπο της συνάρτησης όπως

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Στο Σχήμα 10 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης της απόλυτης τιμής. Παρατηρήστε ότι το γράφημα της f ικανοποιεί το κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας.

Όταν μια συνάρτηση ορίζεται από διαφορετικές εξισώσεις σε διαφορετικά τμήματα του πεδίου ορισμού της, ονομάζεται **συνάρτηση που ορίζεται κατά τμήματα** (ή **ορισμένη κατά τμήματα**).



Σχήμα 10

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Ανάλυση συνάρτησης που ορίζεται κατά τμήματα

Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0 \\ 10 & \text{αν } 0 \leq x \leq 100 \\ 0.2x - 10 & \text{αν } x > 100 \end{cases}$.

α) Υπολογίστε τις τιμές $f(-1)$, $f(100)$ και $f(200)$.

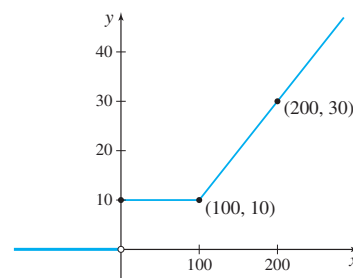
β) Σχεδιάστε το γράφημα της f .

γ) Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα σημεία τομής της f με τους άξονες των x και y .

Λύση α) $f(-1) = 0$, $f(100) = 10$, $f(200) = 0.2(200) - 10 = 30$

β) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τρία τμήματα που αντιστοιχούν σε κάθε εξίσωση του ορισμού της. Το γράφημα είναι η οριζόντια ευθεία $y = 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, η οριζόντια ευθεία $y = 10$ στο διάστημα $[0, 100]$ και η ευθεία $y = 0.2x - 10$ στο διάστημα $(100, \infty)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.

γ) Η f είναι συνάρτηση ορισμένη κατά τμήματα. Εξετάζουμε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x : $x < 0$, $0 \leq x \leq 100$, $x > 100$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Το σύνολο τιμών της f είναι το 0 και όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 10. Τα σημεία τομής της f με τον άξονα των x είναι όλοι οι αριθμοί στο διάστημα $(-\infty, 0)$, ενώ το σημείο τομής της f με τον άξονα των y είναι το 10.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0 \\ 10 & \text{αν } 0 \leq x \leq 100 \\ 0.2x - 10 & \text{αν } x > 100 \end{cases}$$

Σχήμα 11

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Τα σημεία τομής με τον άξονα των x είναι οι τετμημένες των σημείων τομής ή επαφής του γραφήματος μιας συνάρτησης με τον άξονα των x .

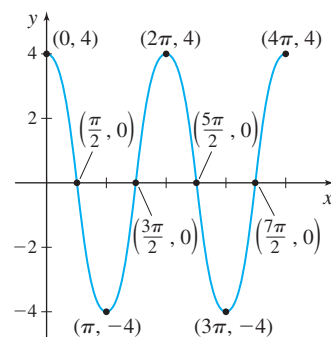
ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 33.

6. Συλλογή πληροφοριών από ή σχετικά με το γράφημα μιας συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης παρέχει πολλές πληροφορίες για αυτή. Η μελέτη και η ερμηνεία γραφημάτων είναι μια βασική δεξιότητα για τον Λογισμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Συλλογή πληροφοριών από το γράφημα μιας συνάρτησης

Το γράφημα της $y = f(x)$ δίνεται στο Σχήμα 12 (το x μπορεί να αντιπροσωπεύει τον χρόνο και το y μπορεί να αντιπροσωπεύει τη θέση ενός σώματος που είναι δεμένο στην άκρη ενός ελατηρίου, το οποίο έχει συσπειρωθεί 4 μονάδες από τη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια απελευθερώνεται. Το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ 4 μονάδων πάνω και 4 μονάδων κάτω από τη θέση ισορροπίας του).



Σχήμα 12

- α) Πόσο είναι τα $f(0)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ και $f(3\pi)$;
- β) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;
- γ) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;
- δ) Παραθέστε τα σημεία τομής του γραφήματος με τους άξονες.
- ε) Πόσες φορές τέμνει το γράφημα της f η ευθεία $y = 2$;
- στ) Για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) = -4$;
- ζ) Για ποιες τιμές του x είναι $f(x) > 0$;

Λύση α) Δεδομένου ότι το σημείο $(0, 4)$ ανήκει στο γράφημα της f , η τεταγμένη 4 είναι η τιμή της f στο 0, δηλαδή $f(0) = 4$. Όμοια, όταν $x = \frac{3\pi}{2}$, τότε $y = 0$ οπότε $y = 0$ και όταν $x = 3\pi$, τότε $y = -4$ οπότε $f(3\pi) = -4$.

β) Τα σημεία στο γράφημα της f έχουν τεταγμένες μεταξύ των 0 και 4π , συμπεριλαμβανομένων των άκρων. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\{x | 0 \leq x \leq 4\pi\}$ ή το κλειστό διάστημα $[0, 4\pi]$.

γ) Κάθε σημείο στο γράφημα της f έχει τεταγμένη μεταξύ των -4 και 4 , συμπεριλαμβανομένων των άκρων. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\{y | -4 \leq y \leq 4\}$ ή το κλειστό διάστημα $[-4, 4]$.

δ) Τα σημεία τομής του γραφήματος της f με τους άξονες είναι: $(0, 4)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{2}, 0\right)$ και $\left(\frac{7\pi}{2}, 0\right)$.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Τα σημεία τομής είναι τα σημεία στα οποία ένα γράφημα τέμνει ή εφάπτεται με έναν άξονα συντεταγμένων.

ε) Σχεδιάζουμε το γράφημα της ευθείας $y = 2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων με το γράφημα της f . Η ευθεία τέμνει το γράφημα της f τέσσερις φορές.

στ) Βρίσκουμε τα σημεία στη γραφική παράσταση της f για τα οποία $y = f(x) = -4$. Υπάρχουν δύο τέτοια σημεία: $(\pi, -4)$ και $(3\pi, -4)$. Επομένως, $f(x) = -4$ όταν $x = \pi$ και όταν $x = 3\pi$.

ζ) $f(x) > 0$ όταν η τεταγμένη ενός σημείου (x, y) στο γράφημα της f είναι θετική. Αυτό συμβαίνει όταν το x βρίσκεται στο σύνολο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Λήψη πληροφοριών σχετικά με το γράφημα μιας συνάρτησης

Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

α) Ποια είναι το πεδίο ορισμού της f ;

β) Ανήκει το σημείο $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ στο γράφημα της f ;

γ) Αν $x = 2$, πόσο είναι το $f(x)$; Ποιο είναι το αντίστοιχο σημείο στη γραφική παράσταση της f ;

δ) Αν $f(x) = 2$, ποιο είναι το x ; Ποιο είναι το αντίστοιχο σημείο στη γραφική παράσταση της f ;

ε) Ποια είναι τα σημεία τομής του γραφήματος της f με τον άξονα των x (εάν υπάρχουν); Ποια σημεία στο γράφημα της f αντιστοιχούν στα σημεία αυτά;

Λύση α) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το -2 , δηλαδή είναι το σύνολο $\{x | x \neq -2\}$. Η συνάρτηση δεν ορίζεται στο -2 .

β) Όταν $x = 1$, τότε $f(1) = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$. Άρα το σημείο $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ βρίσκεται στο γράφημα της f ,

$\uparrow$
 $x = 1$

ενώ το σημείο $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Αν $x = 2$, τότε $f(2) = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$. Άρα το σημείο $\left(2, \frac{3}{4}\right)$ ανήκει στο γράφημα της f .

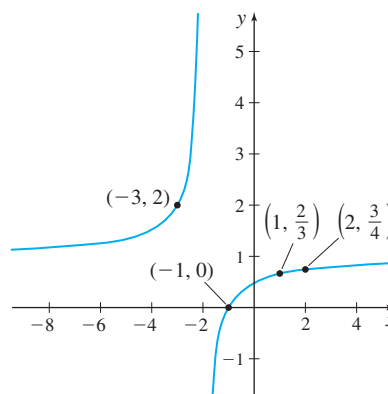
δ) Αν $f(x) = 2$, τότε $\frac{x+1}{x+2} = 2$. Λύνοντας ως προς x , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} x+1 &= 2(x+2) \\ x+1 &= 2x+4 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Άρα το σημείο $(-3, 2)$ βρίσκεται στο γράφημα της f .

ε) Στα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των x έχουμε $y = 0$. Δηλαδή είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$. Τα σημεία αυτά ονομάζονται επίσης και **πραγματικές ρίζες** της συνάρτησης f .

Οι πραγματικές ρίζες της συνάρτησης $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ικανοποιούν την εξίσωση $x+1 = 0$, οπότε $x = -1$. Άρα το μοναδικό σημείο τομής με τον άξονα των x είναι το -1 , οπότε το σημείο $(-1, 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . Στο Σχήμα 13 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της f .



Σχήμα 13 $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Προβλήματα **55, 57, 59**.

7. Χρήση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων

Ένας από τους στόχους του Λογισμού είναι η ανάπτυξη τεχνικών για τη σχεδίαση των γραφημάτων των συναρτήσεων. Εδώ θα εξετάσουμε μερικές ιδιότητες των συναρτήσεων που βοηθούν στη σχεδίαση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f είναι **άρτια** αν για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της, ο αριθμός $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού της και

$$f(-x) = f(x)$$

Μια συνάρτηση f είναι **περιττή** αν για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της, ο αριθμός $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού της και

$$f(-x) = -f(x)$$

Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2$ είναι μια άρτια συνάρτηση αφού

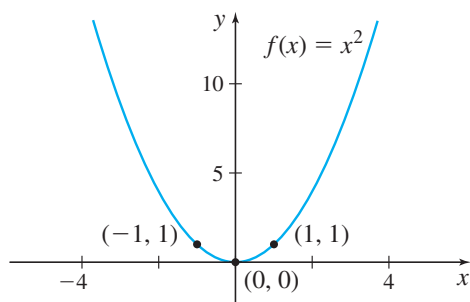
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Επίσης, η $g(x) = x^3$ είναι μια περιττή συνάρτηση αφού

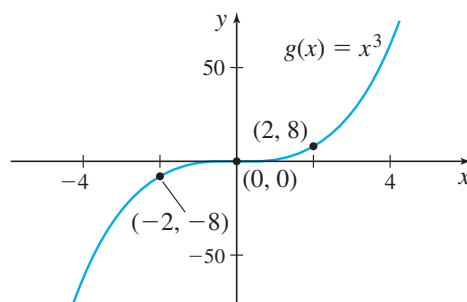
$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

Δείτε το Σχήμα 14 για τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ και το Σχήμα 15 για τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^3$. Παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση της άρτιας συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y , ενώ η γραφική παράσταση της περιττής συνάρτησης $g(x) = x^3$ είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;
Η συμμετρία των γραφημάτων αναλύεται στο Παράρτημα Α.3.



Σχήμα 14 Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι άρτια. Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y .



Σχήμα 15 Η συνάρτηση $g(x) = x^3$ είναι περιττή. Η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γραφήματα άρτιων και περιττών συναρτήσεων

- Μια συνάρτηση είναι άρτια αν και μόνο αν το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y .
- Μια συνάρτηση είναι περιττή αν και μόνο αν το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Αναγνώριση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Προσδιορίστε αν κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο. Στη συνέχεια, προσδιορίστε αν το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y , την αρχή των αξόνων ή τίποτα από τα δύο.

α) $f(x) = x^2 - 5$

β) $g(x) = \frac{4x}{x^2 - 5}$

γ) $h(x) = \sqrt[3]{5x^3 - 1}$

δ) $F(x) = |x|$

ε) $H(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x - 5)^2}$

Λύση α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, \infty)$, έτσι για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της, το $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού. Αντικαθιστούμε το x με το $-x$ και απλοποιούμε.

$$f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$$

Αφού $f(-x) = f(x)$, η συνάρτηση f είναι άρτια. Έτσι η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y .

β) Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\{x | x \neq \pm\sqrt{5}\}$, έτσι για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της, το $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού. Αντικαθιστούμε το x με το $-x$ και απλοποιούμε.

$$g(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 - 5} = \frac{-4x}{x^2 - 5} = -g(x)$$

Αφού $g(-x) = -g(x)$, η συνάρτηση g είναι περιττή. Έτσι η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) Το πεδίο ορισμού της h είναι το $(-\infty, \infty)$, έτσι για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της, το $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού. Αντικαθιστούμε το x με το $-x$ και απλοποιούμε.

$$h(-x) = \sqrt[3]{5(-x)^3 - 1} = \sqrt[3]{-5x^3 - 1} = \sqrt[3]{-(5x^3 + 1)} = -\sqrt[3]{5x^3 + 1}$$

Αφού $h(-x) \neq h(x)$ και $h(-x) \neq -h(x)$, η συνάρτηση h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή. Έτσι η γραφική παράσταση της h δεν είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα των y ούτε ως προς την αρχή των αξόνων.

δ) Το πεδίο ορισμού της F είναι το $(-\infty, \infty)$, έτσι για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της, το $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού. Αντικαθιστούμε το x με το $-x$ και απλοποιούμε.

$$F(-x) = |-x| = |-1| \cdot |x| = |x| = F(x)$$

Άρα η συνάρτηση F είναι άρτια. Έτσι η γραφική παράσταση της F είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y .

ε) Το πεδίο ορισμού της H είναι το $\{x | x \neq 5\}$. Ο αριθμός $x = -5$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της H , αλλά το $x = 5$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού. Έτσι η συνάρτηση H δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή και η γραφική παράσταση της H δεν είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα των y ούτε ως προς την αρχή των αξόνων.

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων είναι πού μια συνάρτηση είναι αύξουσα και πού φθίνουσα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f είναι **αύξουσα** σε ένα διάστημα I αν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στο I , με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f είναι **φθίνουσα** σε ένα διάστημα I αν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στο I , με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f είναι **σταθερή** σε ένα διάστημα I αν για όλα τα x στο I , οι τιμές $f(x)$ είναι ίσες.

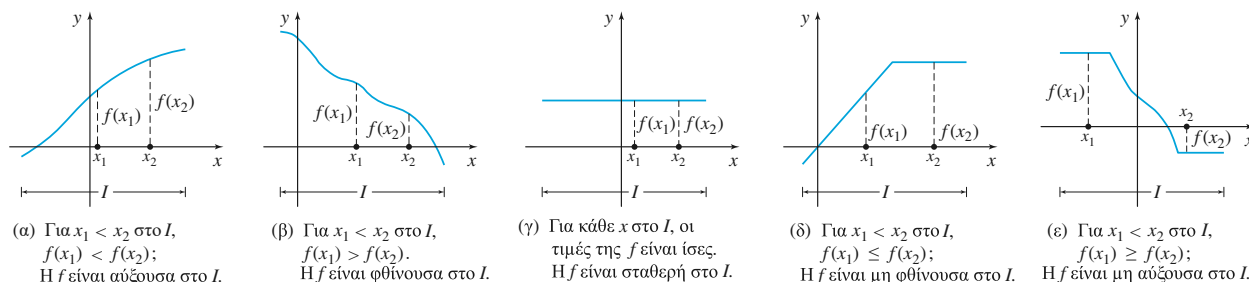
Παρατηρήστε στον ορισμό της αύξουσας (φθίνουσας) συνάρτησης f , η τιμή $f(x_1)$ είναι *αυστηρά* (ή *γνήσια*) μικρότερη (αυστηρά ή γνήσια μεγαλύτερη) από την τιμή $f(x_2)$. Αν χρησιμοποιηθεί μια μη αυστηρή (ή μη γνήσια) ανισότητα, παίρνουμε τους ορισμούς για τις *μη φθίνουσες* και *μη αύξουσες* συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f είναι **μη φθίνουσα** σε ένα διάστημα I αν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στο I , με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f είναι **μη αύξουσα** σε ένα διάστημα I αν για οποιαδήποτε x_1 και x_2 στο I , με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

ΜΕ ΛΟΓΙΑ Κοιτώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά, η γραφική παράσταση μιας αύξουσας συνάρτησης ανεβαίνει, η γραφική παράσταση μιας φθίνουσας συνάρτησης κατεβαίνει και η γραφική παράσταση μιας σταθερής συνάρτησης παραμένει σε σταθερό ύψος. Κοιτώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά, η γραφική παράσταση μιας μη φθίνουσας συνάρτησης δεν κατεβαίνει ποτέ και η γραφική παράσταση μιας μη αύξουσας συνάρτησης δεν ανεβαίνει ποτέ. Δείτε το Σχήμα 16.

Στο Σχήμα 16 απεικονίζονται οι ορισμοί. Στο Κεφάλαιο 4 χρησιμοποιούμε τον Λογισμό για να βρούμε πού μια συνάρτηση είναι αύξουσα, φθίνουσα ή σταθερή.



Σχήμα 16

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Προβλήματα 51, 53.

8. Εύρεση του μέσου ρυθμού μεταβολής μιας συνάρτησης

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης παίζει σημαντικό ρόλο στον λογισμό. Παρέχει πληροφορίες για το πώς μια μεταβολή στην ανεξάρτητη μεταβλητή x μιας συνάρτησης $y = f(x)$ προκαλεί μια μεταβολή στην εξαρτημένη μεταβλητή y . Χρησιμοποιούμε το σύμβολο Δx , διαβάζοντας «δέλτα x », για να αναπαραστήσουμε τη μεταβολή στο x και το Δy για να αναπαραστήσουμε τη μεταβολή στο y . Τότε, σχηματίζοντας

το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, φτάνουμε στον *μέσο ρυθμό μεταβολής*.

ΟΡΙΣΜΟΣ Μέσος ρυθμός μεταβολής

Αν τα a και b , όπου $a \neq b$, βρίσκονται στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $y = f(x)$, ο μέσος ρυθμός μεταβολής της f από το a στο b ορίζεται ως

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad a \neq b$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ αναπαριστά τη μεταβολή του y σε σχέση με το x .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 Εύρεση του μέσου ρυθμού μεταβολής

Βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της $f(x) = 3x^2$:

α) Από το 1 στο 3

β) Από το 1 στο x , με $x \neq 1$.

Λύση α) Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $f(x) = 3x^2$ από το 1 στο 3 είναι

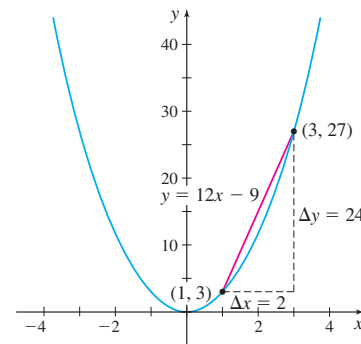
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 3}{3 - 1} = \frac{24}{2} = 12$$

Δείτε το Σχήμα 17.

Παρατηρήστε ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $f(x) = 3x^2$ από το 1 στο 3 είναι η κλίση της ευθείας που περιέχει τα σημεία $(1, 3)$ και $(3, 27)$.

β) Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $f(x) = 3x^2$ από το 1 στο x , για $x \neq 1$, είναι

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{3(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 3(x + 1) = 3x + 3$$



Σχήμα 17 $f(x) = 3x^2$

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 65.**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11** Ανάλυση μιας συνάρτησης κόστους

Το εβδομαδιαίο κόστος C , σε δολάρια, της παραγωγής x ηλεκτρικών λαμπτήρων είναι $C(x) = 7500 + \sqrt{125x}$.

- Βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του εβδομαδιαίου κόστους C της παραγωγής από 100 σε 101 λαμπτήρες.
- Βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του εβδομαδιαίου κόστους C της παραγωγής από 1000 σε 1001 λαμπτήρες.
- Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων α) και β).

Λύση α) Το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής 100 λαμπτήρων είναι

$$C(100) = 7500 + \sqrt{125 \cdot 100} = 7500 + \sqrt{12,500} \approx \$7611.80$$

Το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής 101 λαμπτήρων είναι

$$C(101) = 7500 + \sqrt{125 \cdot 101} = 7500 + \sqrt{12,625} \approx \$7612.36$$

Αρα ο μέσος ρυθμός μεταβολής του εβδομαδιαίου κόστους C από 100 σε 101 είναι

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(101) - C(100)}{101 - 100} \approx \frac{7612.36 - 7611.80}{1} = \$0.56$$

β) Το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής 1000 λαμπτήρων είναι

$$C(1000) = 7500 + \sqrt{125 \cdot 1000} = 7500 + \sqrt{125,000} \approx \$7853.55$$

Το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής 1001 λαμπτήρων είναι

$$C(1001) = 7500 + \sqrt{125 \cdot 1001} = 7500 + \sqrt{125,125} \approx \$7853.73$$

Αρα ο μέσος ρυθμός μεταβολής του εβδομαδιαίου κόστους C από 1000 σε 1001 είναι

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(1001) - C(1000)}{1001 - 1000} \approx \frac{7853.73 - 7853.55}{1} = \$0.18$$

γ) Το ερώτημα α) μας λέει ότι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος της παραγωγής του 101ου λαμπτήρα είναι \$0.56. Από το ερώτημα β) μαθαίνουμε ότι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος της παραγωγής του 1001ου λαμπτήρα είναι μόνο \$0.18. Αρα το κόστος ανά μονάδα της παραγωγής του 1001ου λαμπτήρα είναι μικρότερο από το κόστος ανά μονάδα της παραγωγής του 101ου λαμπτήρα.

ΝΕΑ ΕΡΓΑΣΙΑ Πρόβλημα 73.

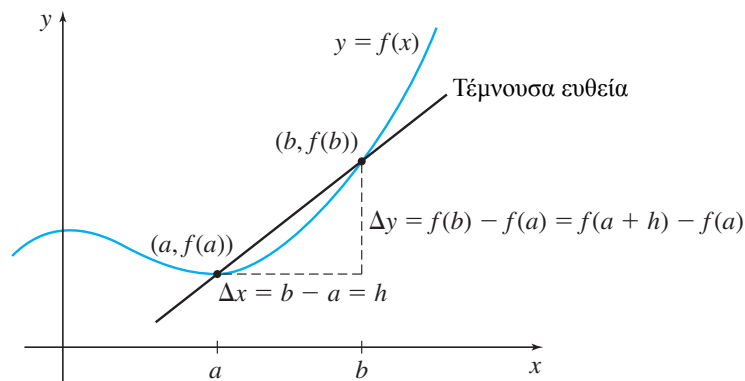
Τέμνουσα ευθεία

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης έχει μια σημαντική γεωμετρική ερμηνεία. Δείτε τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ στο Σχήμα 18. Στο γράφημα αυτό επισημαίνονται δύο σημεία: $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Η ευθεία που διέρχεται από αυτά τα δύο σημεία ονομάζεται **τέμνουσα ευθεία**. Η κλίση μιας τέμνουσας ευθείας είναι

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$\uparrow$
 $h = b - a$

Παρατηρήστε ότι η κλίση μιας τέμνουσας ευθείας είναι ίση με τον μέσο ρυθμό μεταβολής της f από το a στο b αλλά και ίση με το πηλίκο διαφορών της f στο a .



Σχήμα 18 Μια τέμνουσα ευθεία της συνάρτησης $y = f(x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ Κλίση τέμνουσας ευθείας

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f από το a στο b ισούται με την κλίση της τέμνουσας ευθείας που διέρχεται από τα δύο σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ της γραφικής παράστασης της f .

Π.1 Αξιολόγηση κατανόησης

Έννοιες και λεξιλόγιο

1. Αν f είναι μια συνάρτηση που ορίζεται από την $y = f(x)$, τότε το x ονομάζεται _____ μεταβλητή και το y ονομάζεται _____ μεταβλητή.
2. *Σωστό ή λάθος* Η ανεξάρτητη μεταβλητή αναφέρεται μερικές φορές ως όρισμα της συνάρτησης.
3. *Σωστό ή λάθος* Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f δεν είναι προκαθορισμένο, τότε θεωρείται ότι είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών.
4. *Σωστό ή λάθος* Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1}$ είναι το $\{x | x \neq \pm 1\}$.
5. *Σωστό ή λάθος* Μια συνάρτηση μπορεί να τέμνει τον άξονα των y σε περισσότερα από ένα σημεία.
6. Ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο xy είναι το γράφημα μιας συνάρτησης αν και μόνο αν κάθε _____ ευθεία το τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.
7. Αν το σημείο $(5, -3)$ βρίσκεται στο γράφημα της f , τότε $f(\text{_____}) = \text{_____}$.
8. Βρείτε το a έτσι ώστε το σημείο $(-1, 2)$ να βρίσκεται στο γράφημα της $f(x) = ax^2 + 4$.
9. *Πολλαπλής επιλογής* Μια συνάρτηση f είναι [α] αύξουσα β) φθίνουσα γ) μη αύξουσα δ) μη φθίνουσα ε) σταθερή] σε ένα διάστημα I αν για οποιαδήποτε επιλογή x_1 και x_2 στο I , με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
10. *Πολλαπλής επιλογής* Μια συνάρτηση f είναι [α] άρτια β) περιττή γ) ούτε άρτια ούτε περιττή] αν για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της, ο αριθμός $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού της και $f(-x) = f(x)$.
11. *Σωστό ή λάθος* Οι άρτιες συναρτήσεις έχουν γραφήματα που είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.
12. Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της $f(x) = 2x^3 - 3$ από το 0 στο 2 είναι _____.

Προβλήματα εξάσκησης

Στα Προβλήματα 13-16 για κάθε συνάρτηση βρείτε τα:

- α) $f(0)$ β) $f(-x)$ γ) $-f(x)$
 δ) $f(x+1)$ ε) $f(x+h)$.

13. $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ 14. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

15. $f(x) = |x| + 4$ 16. $f(x) = \sqrt{3-x}$

Στα Προβλήματα 17-22 βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης.

17. $f(x) = x^3 - 1$ 18. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

19. $v(t) = \sqrt{t^2 - 9}$ 20. $g(x) = \sqrt{\frac{2}{x-1}}$

21. $h(x) = \frac{x+2}{x^3 - 4x}$ 22. $s(t) = \frac{\sqrt{t+1}}{t-5}$

Στα Προβλήματα 23-28 βρείτε το πηλίκο διαφορών της f . Δηλαδή βρείτε το

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

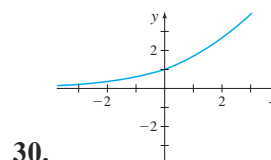
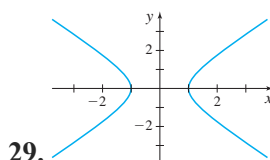
23. $f(x) = -3x + 1$ 24. $f(x) = \frac{1}{x+3}$

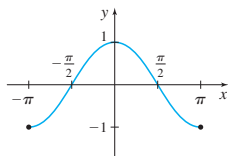
25. $f(x) = \sqrt{x+7}$ 26. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+7}}$

27. $f(x) = x^2 + 2x$ 28. $f(x) = (2x+3)^2$

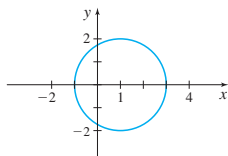
Στα Προβλήματα 29-32 προσδιορίστε αν το γράφημα είναι γράφημα συνάρτησης χρησιμοποιώντας το κριτήριο της κατακόρυφης ευθείας. Αν είναι, χρησιμοποιήστε το γράφημα αυτό για να βρείτε:

- α) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
 β) Τα σημεία τομής με τους άξονες, αν υπάρχουν.
 γ) Οποιαδήποτε συμμετρία ως προς τον άξονα των x , τον άξονα των y ή την αρχή των αξόνων.





31.



32.

Στα Προβλήματα 33-36 για κάθε συνάρτηση που ορίζεται κατά τμήματα:

α) Βρείτε τα $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ και $f(8)$.

β) Σχεδιάστε το γράφημα της f .

γ) Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα σημεία τομής της f με τους άξονες.

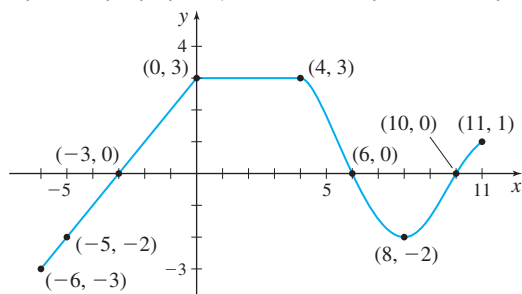
$$33. f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{αν } -2 \leq x < 1 \\ 5 & \text{αν } x = 1 \\ -x+2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$34. f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{αν } -3 \leq x < 0 \\ -3 & \text{αν } x = 0 \\ -5x & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

$$35. f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{αν } x < 0 \\ x^2 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

$$36. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Στα Προβλήματα 37-54 χρησιμοποιήστε το γράφημα της συνάρτησης f για να απαντήσετε στις ερωτήσεις.



37. Βρείτε τα $f(0)$ και $f(-6)$.

38. Το $f(3)$ είναι θετικό ή αρνητικό;

39. Το $f(-4)$ είναι θετικό ή αρνητικό;

40. Για ποιες τιμές του x είναι $f(x) = 0$;

41. Για ποιες τιμές του x είναι $f(x) > 0$;

42. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

43. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;

44. Ποια είναι τα σημεία τομής της f με τον άξονα των x ;

45. Ποια είναι τα σημεία τομής της f με τον άξονα των y ;

46. Πόσες φορές τέμνει το γράφημα η ευθεία $y = \frac{1}{2}$;

47. Πόσες φορές τέμνει το γράφημα η ευθεία $x = 5$;

48. Για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) = 3$;

49. Για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) = -2$;

50. Σε ποιο διάστημα (ή διαστήματα) είναι αύξουσα η συνάρτηση f ;

51. Σε ποιο διάστημα (ή διαστήματα) είναι φθίνουσα η συνάρτηση f ;

52. Σε ποιο διάστημα (ή διαστήματα) είναι σταθερή η συνάρτηση f ;

53. Σε ποιο διάστημα (ή διαστήματα) είναι μη αύξουσα η συνάρτηση f ;

54. Σε ποιο διάστημα (ή διαστήματα) είναι μη φθίνουσα η συνάρτηση f ;

Στα Προβλήματα 55-60 απαντήστε στις ερωτήσεις σχετικά με τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x+2}{x-6}$$

55. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της g ;

56. Βρίσκεται το σημείο $(3, 14)$ στο γράφημα της g ;

57. Αν $x = 4$, πόσο είναι το $g(x)$; Ποιο είναι το αντίστοιχο σημείο στο γράφημα της g ;

58. Αν $g(x) = 2$, ποιο είναι το x ; Ποιο είναι το αντίστοιχο σημείο (ή τα αντίστοιχα σημεία) στο γράφημα της g ;

59. Βρείτε τα σημεία τομής, αν υπάρχουν, του γραφήματος της g με τον άξονα των x .

60. Ποιο είναι το σημείο τομής, αν υπάρχει, του γραφήματος της g με τον άξονα των y ;

Στα Προβλήματα 61-64 προσδιορίστε αν η συνάρτηση είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο. Στη συνέχεια, προσδιορίστε αν το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y , την αρχή των αξόνων ή τίποτα από τα δύο.

61. $h(x) = \frac{x}{x^2-1}$

62. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+1}$

63. $G(x) = \sqrt{x}$

64. $F(x) = \frac{2x}{|x|}$

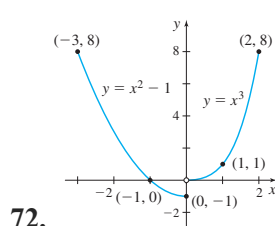
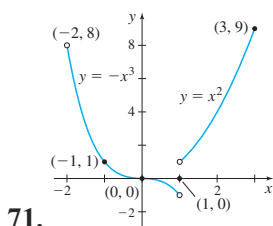
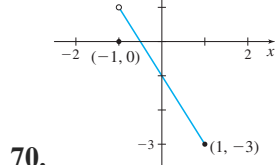
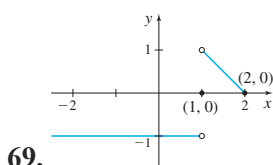
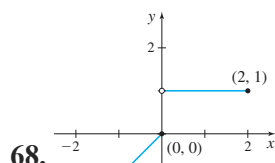
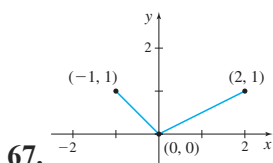
65. Βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της $f(x) = -2x^2 + 4$:

- α) Από το 1 στο 2.
- β) Από το 1 στο 3.
- γ) Από το 1 στο 4.
- δ) Από το 1 στο x , με $x \neq 1$.

66. Βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της $s(t) = 20 - 0.8t^2$:

- α) Από το 1 στο 4.
- β) Από το 1 στο 3.
- γ) Από το 1 στο 2.
- δ) Από το 1 στο t , με $t \neq 1$.

Στα Προβλήματα 67-72 δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που ορίζεται κατά τμήματα. Γράψτε έναν τύπο για κάθε συνάρτηση που ορίζεται κατά τμήματα. Κατόπιν δηλώστε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης.



73. Το μηνιαίο κόστος C , σε δολάρια, της παραγωγής x μοτοσικλετών δίνεται από τη συνάρτηση

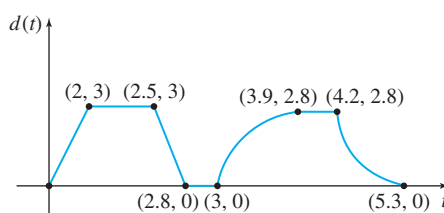
$$C(x) = 0.004x^3 - 0.6x^2 + 250x + 100,500$$

- α) Βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του κόστους C της παραγωγής από 100 σε 101 μοτοσικλέτες.

β) Βρείτε τον μέσο ρυθμό μεταβολής του κόστους C της παραγωγής από 500 σε 501 μοτοσικλέτες.

γ) Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων α) και β) στο πλαίσιο του προβλήματος.

74. Το παρακάτω γράφημα αναπαριστά την απόσταση d (σε mi) που απέχει ο Κέβιν από το σπίτι του ως συνάρτηση του χρόνου t (σε h). Απαντήστε στις ερωτήσεις με αναφορά στο γράφημα. Για τις περιπτώσεις α)-ζ), πόσες h παρήλθαν και πόσο μακριά βρισκόταν ο Κέβιν από το σπίτι του κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου;



- α) Από $t = 0$ έως $t = 2$.
- β) Από $t = 2$ έως $t = 2.5$.
- γ) Από $t = 2.5$ έως $t = 2.8$.
- δ) Από $t = 2.8$ έως $t = 3$.
- ε) Από $t = 3$ έως $t = 3.9$.
- στ) Από $t = 3.9$ έως $t = 4.2$.
- ζ) Από $t = 4.2$ έως $t = 5.3$.
- η) Ποια είναι η πιο μακρινή απόσταση που απείχε ο Κέβιν από το σπίτι του;
- θ) Πόσες φορές ο Κέβιν επέστρεψε σπίτι του;

75. Ο πληθυσμός ως συνάρτηση της ηλικίας
Η συνάρτηση

$$P(a) = 0.014a^2 - 5.073a + 327.287$$

αντιπροσωπεύει τον πληθυσμό P (σε εκατομμύρια) των Αμερικανών που το 2012 ήταν ηλικίας a ετών ή μεγαλύτεροι.

- α) Αναγνωρίστε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.
- β) Υπολογίστε το $P(20)$. Ερμηνεύστε το $P(20)$ στο πλαίσιο αυτού του προβλήματος.
- γ) Υπολογίστε το $P(0)$. Ερμηνεύστε το $P(0)$ στο πλαίσιο αυτού του προβλήματος.

(Πηγή: Πηγή: Υπηρεσία Απογραφής Η.Π.Α.)

Π.2 Συλλογή συναρτήσεων, μαθηματική μοντελοποίηση

ΣΤΟΧΟΙ Όταν ολοκληρώσετε αυτή την ενότητα, θα πρέπει να μπορείτε:

1. Να αναπτύσσετε μια συλλογή συναρτήσεων (σ. 20)
2. Να αναλύετε μια πολυωνυμική συνάρτηση και το γράφημά της (σ. 24)
3. Να βρίσκετε το πεδίο ορισμού και τα σημεία τομής με τους άξονες μιας ρητής συνάρτησης (σ. 27)
4. Να κατασκευάζετε ένα μαθηματικό μοντέλο (σ. 28)

Όταν ένα σύνολο συναρτήσεων παρουσιάζει κοινές ιδιότητες, τότε οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να «ομαδοποιηθούν» ανήκοντας σε μια κλάση συναρτήσεων. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις, οι εκθετικές συναρτήσεις και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι μερικά παραδείγματα των **κλάσεων συναρτήσεων**. Καθώς θα ερευνούμε τις αρχές του Λογισμού, θα διαπιστώνουμε ότι μια αρχή συχνά εφαρμόζεται σε όλες τις συναρτήσεις μιας κλάσης με τον ίδιο τρόπο.

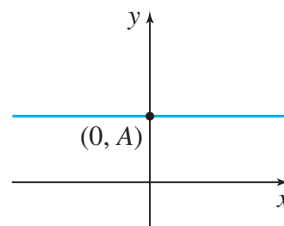
1. Ανάπτυξη μιας συλλογής συναρτήσεων

Οι περισσότερες από τις συναρτήσεις αυτής της ενότητας θα σας είναι γνωστές, ενώ αρκετές μπορεί να είναι καινούργιες. Αν και η λίστα μπορεί να φαίνεται οικεία, δώστε ιδιαίτερη προσοχή στο πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης και στις ιδιότητές της, ιδιαίτερα στο σχήμα κάθε γραφήματος. Η γνώση αυτών των γραφημάτων θέτει τα θεμέλια για μεταγενέστερες τεχνικές σχεδίασης.

Σταθερή συνάρτηση

$$f(x) = A \quad \text{όπου } A \text{ είναι ένας πραγματικός αριθμός}$$

Το πεδίο ορισμού μιας σταθερής συνάρτησης είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, ενώ το σύνολο τιμών της είναι ο μοναδικός αριθμός A . Το γράφημα μιας σταθερής συνάρτησης είναι μια οριζόντια ευθεία της οποίας το σημείο τομής με τον άξονα των y είναι το A και δεν τέμνει τον άξονα των x αν $A \neq 0$. Δείτε το Σχήμα 19.

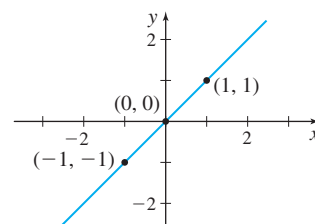


Σχήμα 19 $f(x) = A$

Ταυτοτική συνάρτηση

$$f(x) = x$$

Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της **ταυτοτικής συνάρτησης** είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Το γράφημά της είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων της οποίας η κλίση είναι $m = 1$. Το μοναδικό σημείο τομής της ευθείας με τους άξονες είναι το $(0, 0)$. Η ταυτοτική συνάρτηση είναι μια περιττή συνάρτηση και έτσι το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων. Επίσης είναι αύξουσα συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της. Δείτε το Σχήμα 20.



Σχήμα 20 $f(x) = x$

Παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = x$ διχοτομεί το 1ο και το 3ο τεταρτημόριο.

Τα γραφήματα και της σταθερής συνάρτησης και της ταυτοτικής συνάρτησης είναι ευθείες. Αυτές οι συναρτήσεις ανήκουν στην κλάση των *γραμμικών συναρτήσεων*:

Γραμμικές συναρτήσεις

$$f(x) = mx + b \quad \text{όπου } m \text{ και } b \text{ είναι πραγματικοί αριθμοί}$$

ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ;
Οι εξισώσεις ευθειών αναλύονται στο Παράρτημα Α.3.